

Raisonnement,
Démonstration
et
Pratiques Pédagogiques
en Terminale

Les textes :

- **Raisonnement et langage mathématiques**

Comme en classe de seconde, les capacités d'argumentation, de rédaction d'une démonstration et de logique font partie intégrante des exigences du cycle terminal.

Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne font pas l'objet de cours spécifiques mais prennent naturellement leur place dans tous les champs du programme.

Il importe toutefois de prévoir des moments d'institutionnalisation de certains concepts ou types de raisonnement, après que ceux-ci ont été rencontrés plusieurs fois en situation.

De même, le vocabulaire et les notations mathématiques ne sont pas fixés d'emblée, mais sont introduits au cours du traitement d'une question en fonction de leur utilité.

Il convient de prévoir des temps de synthèse, l'objectif étant que ces éléments soient maîtrisés en fin de cycle terminal.

Les textes :

- **Diversité de l'activité de l'élève**

Les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à :

- chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels ;
- choisir et appliquer des techniques de calcul ;
- mettre en œuvre des algorithmes ;
- raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective ;
- expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit.

Fréquents, de longueur raisonnable et de nature variée, les travaux hors du temps scolaire contribuent à la formation des élèves et sont absolument essentiels à leur progression. Ils sont conçus de façon à prendre en compte la diversité et l'hétérogénéité de leurs aptitudes.

Les textes :

- **Organisation du programme**

Le programme fixe les objectifs à atteindre en termes de capacités. Il est conçu pour favoriser une acquisition progressive des notions et leur pérennisation.

À titre indicatif, on pourrait consacrer *la moitié du temps à l'analyse, l'autre moitié se répartissant équitablement entre géométrie et probabilités-statistique*. [environ deux tiers du temps à l'analyse et le reste aux probabilités statistique]

Les capacités attendues indiquent un niveau minimal de maîtrise des contenus en fin de cycle terminal. La formation ne s'y limite pas.

Plusieurs démonstrations, ayant valeur de modèle, sont repérées par le symbole □ . Certaines sont exigibles et correspondent à des capacités attendues.

Les démonstrations du programme

1. Analyse

Suites

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Limites et comparaison.	<ul style="list-style-type: none"> ▣ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : <ul style="list-style-type: none"> - u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; - u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. 	<ul style="list-style-type: none"> ▣ On démontre que si une suite est croissante et admet pour limite l, alors tous les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à l. Le théorème dit « des gendarmes » est admis.
Comportement à l'infini de la suite (q^n) , q étant un nombre réel.	<ul style="list-style-type: none"> ▣ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$. 	<ul style="list-style-type: none"> On démontre par récurrence que pour a réel strictement positif et tout entier naturel n : $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
Suite majorée, minorée, bornée.	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées. 	<ul style="list-style-type: none"> Ce théorème est admis. ▣ Il est intéressant de démontrer qu'une suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

1. Analyse

Fonction exponentielle

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonction $x \mapsto \exp(x)$.	▣ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur \mathbf{R} , égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0.	La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur \mathbf{R} telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise.
Relation fonctionnelle, notation e^x .	▣ Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.	

1. Analyse

Intégration

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a, b]$, la fonction F définie sur $[a, b]$</p> $\text{par } F(x) = \int_a^x f(t) dt$ <p>est dérivable sur $[a, b]$ et a pour dérivée f.</p>		<p>☐ Il est intéressant de présenter le principe de la démonstration du théorème dans le cas où f est positive et croissante.</p>
<p>Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.</p>		<p>☐ Il est intéressant de démontrer ce théorème dans le cas d'un intervalle fermé borné, en admettant que la fonction a un minimum.</p> <p>On admet le cas général.</p> <p>On fait observer que certaines fonctions comme $x \mapsto \exp(-x^2)$ n'ont pas de primitive « explicite ».</p>

2. Géométrie dans l'espace

Géométrie vectorielle

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.		<p>On étend à l'espace la notion de vecteur et les opérations associées.</p> <p>On fait observer que des plans dirigés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.</p> <p>▣ Il est intéressant de présenter la démonstration du théorème dit « du toit ».</p>

Produit scalaire

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Vecteur normal à un plan. Équation cartésienne d'un plan.	<ul style="list-style-type: none">• Déterminer si un vecteur est normal à un plan.▣ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls.▣ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.	On caractérise vectoriellement l'orthogonalité de deux droites et on introduit la notion de plans perpendiculaires.

3. Probabilités et statistique

Conditionnement et indépendance

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Indépendance de deux événements.	☐ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour \bar{A} et B .	Cette partie du programme se prête particulièrement à l'étude de situations concrètes.

3. Probabilités et statistique

Notion de loi à densité à partir d'exemples

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
<p>Lois exponentielles.</p> <p>Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle.</p>	<ul style="list-style-type: none"> Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. <p>▣ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$.</p>	<p>▣ On démontre qu'une variable aléatoire T suivant une loi exponentielle vérifie la propriété de durée de vie sans vieillissement : pour tous réels t et h positifs, $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$.</p> <p>L'espérance est définie comme la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\int_0^x t f(t) dt$ où f est la fonction de densité de la loi exponentielle considérée.</p>

<p>Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.</p> <p>Théorème de Moivre Laplace (admis).</p>	<ul style="list-style-type: none"> Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et sa représentation graphique. <p>▣ Démontrer que pour $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.</p> <ul style="list-style-type: none"> Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$. 	<p>Pour introduire la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, on s'appuie sur l'observation des représentations graphiques de la loi de la variable aléatoire $Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ où X_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, et cela pour de grandes valeurs de n et une valeur de p fixée entre 0 et 1. Le théorème de Moivre Laplace assure que pour tous réels a et b, $P(Z_n \in [a, b])$ tend vers $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.</p>
--	---	--

3. Probabilités et statistique

Intervalle de fluctuation

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Intervalle de fluctuation	<p>☐ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0, 1[$ on a,</p> $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha,$ <p>où I_n désigne l'intervalle</p> $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$	<p>La démonstration ci-contre donne l'expression d'un intervalle de fluctuation asymptotique(*) au seuil $1 - \alpha$ de la variable aléatoire fréquence $F_n = \frac{X_n}{n}$ qui, à tout échantillon de taille n, associe la fréquence obtenue f.</p>

3. Probabilités et statistique

Estimation

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Niveau de confiance.	<ul style="list-style-type: none">• Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.	<p>☐ Il est intéressant de démontrer que, pour une valeur de p fixée, l'intervalle $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}, F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient, pour n assez grand, la proportion p avec une probabilité au moins égale à 0,95.</p> <p>On énonce alors que p est élément de l'intervalle $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec un niveau de confiance de plus de 95 %, où f désigne la fréquence observée sur un échantillon de taille n.</p> <p>Avec les exigences usuelles de précision, on utilise cet intervalle dès que $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.</p>

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants: \in , \subset , \cup , \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A , on utilise la notation des probabilités A^c .

Pour ce qui concerne le raisonnement logique,

les élèves sont entraînés sur des exemples à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall , \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Quelques exemples

Approche historique :

Extrait du BO spécial n°8 du 1 octobre 2011:

Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts.

[Activité nbres complexes.docx](#)

Une démonstration du programme : théorème de comparaisons de deux suites

Contenus	Capacités attendues
Limites et comparaison.	<p>☐ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que :</p> <ul style="list-style-type: none">- u_n est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ;- u_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; <p>alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.</p>

Différentes idées pour amener la démonstration :

- Revenir sur la définition d'une suite divergeant vers l'infini
- Exemples (ou contre exemples) de deux suites avec illustration de leur comportement (avec un tableur)
- Choisir plusieurs exemples ou contre- exemples permettant de conjecturer des hypothèses nécessaires et suffisantes

Exemple suite.xlsx

$$u_n = n + 1 + \cos(n)$$

Les objectifs :

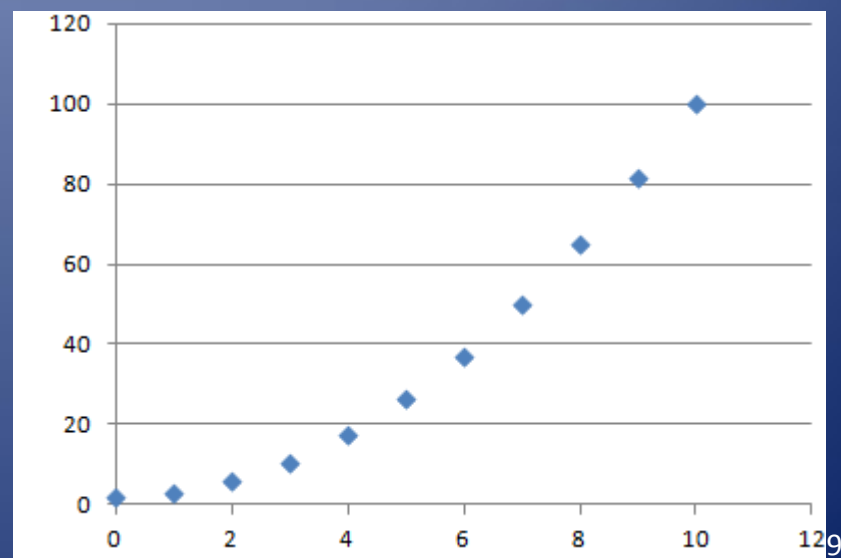
- Conjecturer un comportement de la suite
- Essayer d'induire la comparaison avec n
- Pourquoi une comparaison avec n est-elle intéressante ?

Exemple suite.xlsx

$$u_n = n^2 - e^{\frac{n}{10}} + 3$$

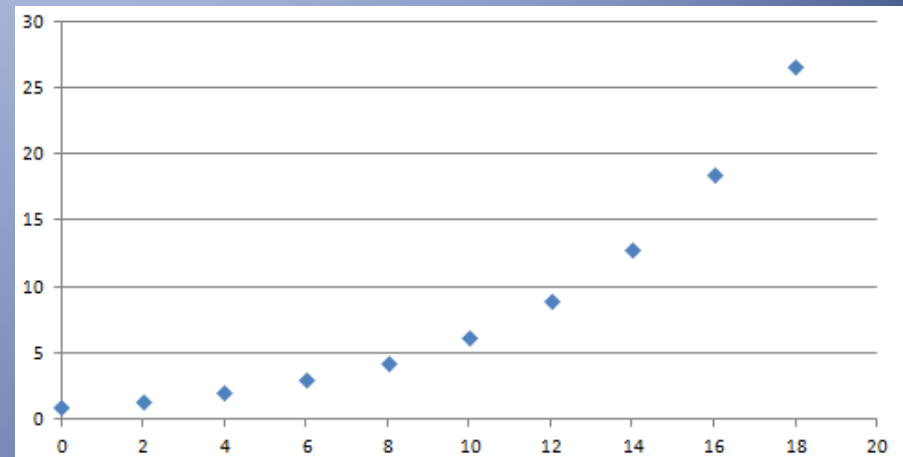
Une suite où les premiers termes se comparent facilement à n^2

(Au début)



Exemple suite.xlsx

Une suite, où les termes qui apparaissent tendent vers l'infini



- Faire énoncer aux élèves la propriété mise en évidence ;
- Revenir à la définition d'une suite tendant vers l'infini ;
- Démontrer le théorème avec les élèves.

- Reprendre l'exemple 1 et faire la démonstration en utilisant le théorème.

Exemple de TD :

[TD 7 Limites de suites.docx](#)

Exemple de DM :

[DM atelier.docx](#)

[Autre exemple de devoir maison.docx](#)

Une autre démonstration : intégration

[Espérance loi exponentielle.pptx](#)

Accompagnement personnalisé :

Extrait du BO spécial n°8 du 1 octobre 2011:

Quelques propositions d'approfondissement, destinées à des activités dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, figurent en italique avec la mention (AP).

[AP TS archi.docx](#)

[Fiche AP Heron.docx](#)

QUESTIONS ?