Graphes

Philippe Lac
(philippe.lac@ac-clermont.fr)
Malika More
(malika.more@u-clermont1.fr)

IREM Clermont-Ferrand

Stage Algorithmique

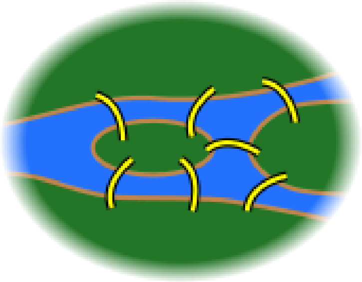
Année 2010-2011

1. Introduction
2. Vocabulaire
3. Représentation des graphes en machine

Les sept ponts de Königsberg

Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

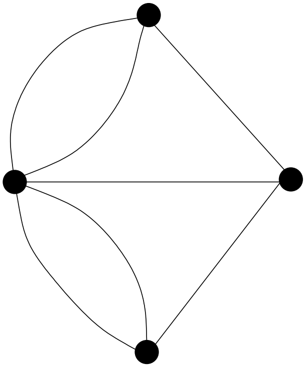


- Leonard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

Les sept ponts de Königsberg

Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

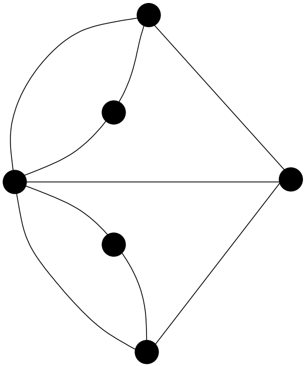


- Leonard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

Les sept ponts de Königsberg

Une énigme

Le fleuve Pregel traverse la ville et entoure deux îles. Sept ponts permettent de traverser. En 1736, le mathématicien Leonhard Euler demande : Est-il possible de faire une promenade qui emprunte chacun des sept ponts une fois et une seule (et revient à son point de départ) ?

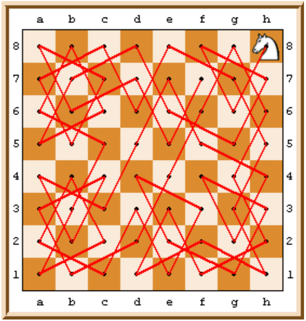


Leonard Euler. « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ». Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 1759

La course du cavalier

Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

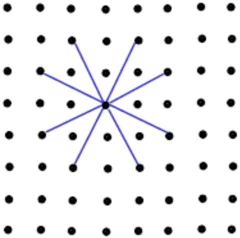


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

La course du cavalier

Une autre énigme

Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

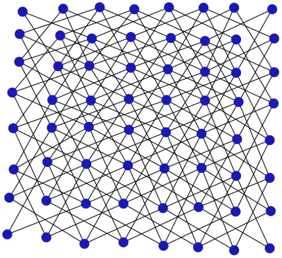


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

La course du cavalier

Une autre énigme

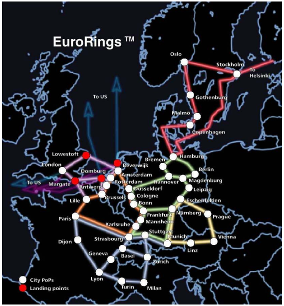
Peut-on promener un cavalier, en observant les règles de déplacement de cette pièce (deux cases dans une direction, une case dans l'autre) sur l'échiquier (8 lignes et 8 colonnes) de sorte qu'il passe une fois et une seule par chacune des cases ?

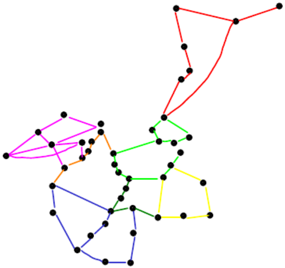


- al-Adli ar-Rumi donne une solution, vers 840.
- Warnsdorff donne une méthode heuristique, 1843.

Un réseau

The pan European KPNQwest network, when complete, will connect major cities together by six high-capacity backbone rings.



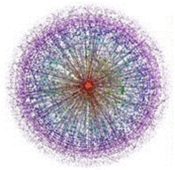


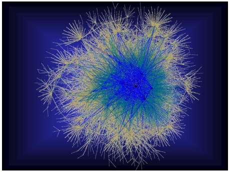
- Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007

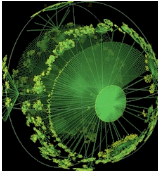
Le graphe du Web

Définition

Ses sommets correspondent aux pages web, ses arêtes aux hyperliens.







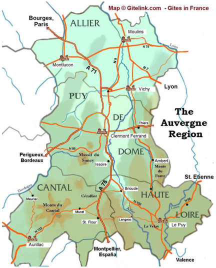
Remarques

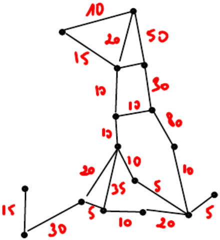
- Ce graphe est tellement énorme que trouver de bonnes manières de le dessiner est un domaine de recherche à part entière.
- Comprendre les propriétés de ce graphe est essentiel pour une compagnie comme Google.

- Atlas of Cyberspace, Martin Dodge & Rob Kitchin 2007

Le voyageur de commerce

Étant donné un ensemble de destinations, le problème est de trouver un circuit qui visite chaque destination en visitant chacune d'elle exactement une seule fois, le tout en minimisant le coût du voyage.

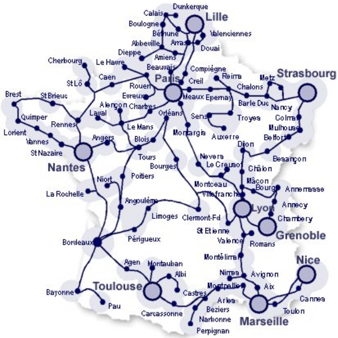


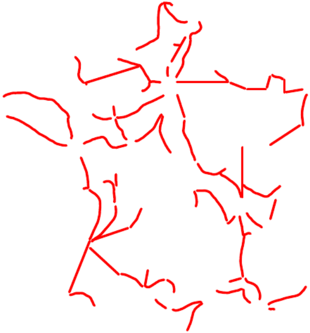


- William Rowan Hamilton, vers 1800.
- Karl Menger, vers 1930.

Mise en place d’un réseau mixte cuivre et optique

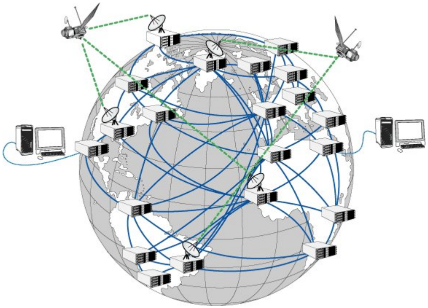
Une société de téléphonie souhaite câbler entièrement une zone à l’aide de fibres optiques en minimisant le nombres de connexions à réaliser. Le nouveau câblage s’appuie sur le réseau téléphonique déjà existant.





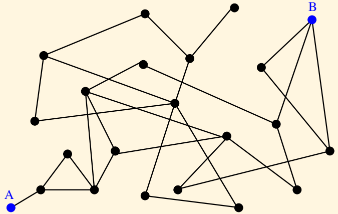
Problème de routage dans un réseau du type internet.

Si un utilisateur désire accéder au contenu d'une page web présentée sur un serveur, une connexion entre ce serveur et la machine de l'utilisateur est nécessaire. Cette connexion n'est en général pas directe mais doit passer par une série de machine relais.



À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

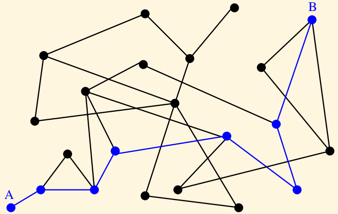
Les machines A et B peuvent-elles communiquer ?

Notion

existence de chaînes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

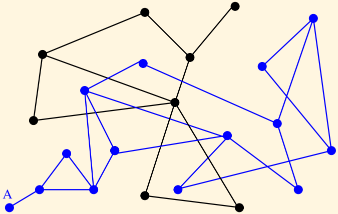
Si oui, en passant par quels intermédiaires ?

Notion

détermination de chaînes - longueur de chaînes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

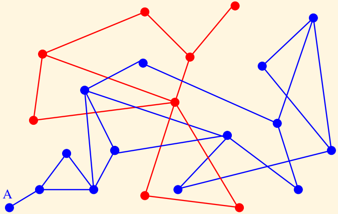
Avec quelles machines la machine A peut-elle communiquer ?

Notion

sommets accessibles - composantes connexes

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

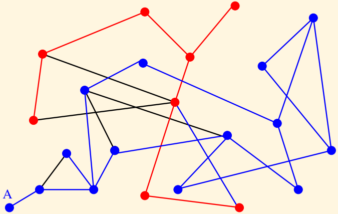
Deux machines quelconques peuvent-elles communiquer ?

Notion

connexité

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

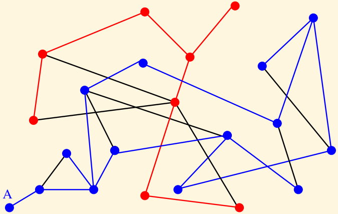
Pourrait-on se passer de certaines connexions ?

Notion

recouvrement

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

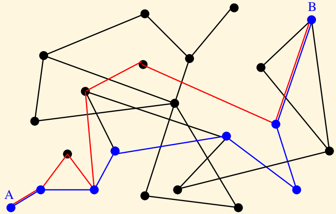
Trouver un ensemble minimal de connexions préservant la topologie du réseau ?

Notion

arbre ou forêt de recouvrement minimal

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

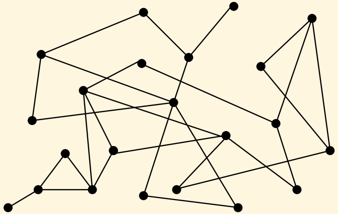
Si deux machines peuvent communiquer de plusieurs façons, comment choisir la meilleure ?

Notion

chemins optimaux, distance

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un circuit imprimé



Question

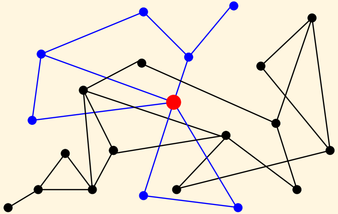
Imprimer le circuit de sorte que les liaisons ne se croisent pas (pour minimiser les couches) ?

Notion

graphe planaire

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe d'un réseau



Question

Assurer le fonctionnement du réseau si une des machines tombe en panne ?

Notion

biconnexité

À chaque question concrète, un problème de graphe

Graphe avec capacités

Question

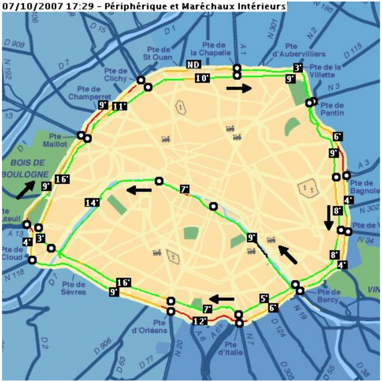
Capacité du réseau, problème de débit ?

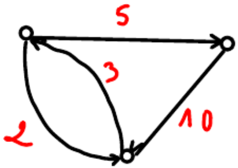
Notion

problèmes de flots

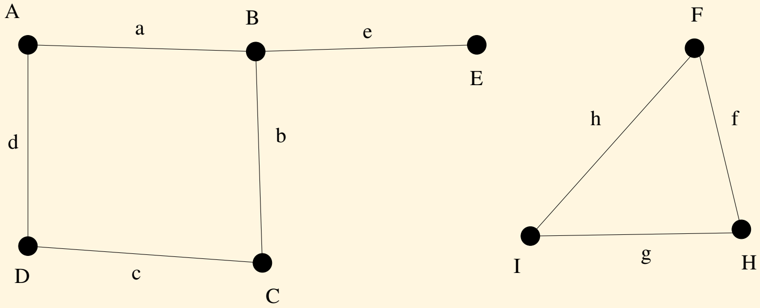
Problème de temps de parcours

Par exemple, autour du périphérique à Paris.
Notons que les temps de parcours dans un sens et dans l'autre ne sont pas forcément les mêmes (notion de graphe orienté).





Un Graphe

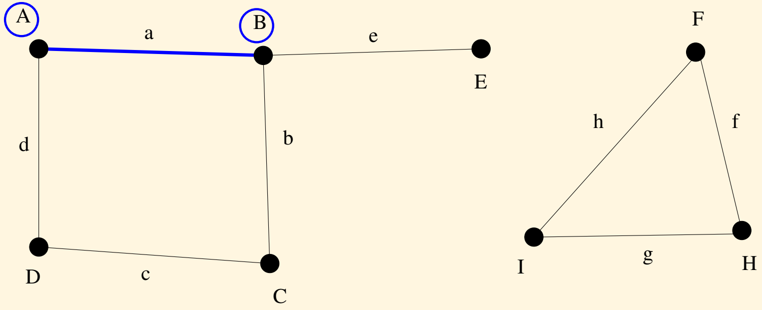


« Définition » par l'exemple

Le graphe est constitué

- des sommets $\{A, B, C, D, E, F, H, I\}$
- des arêtes $\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

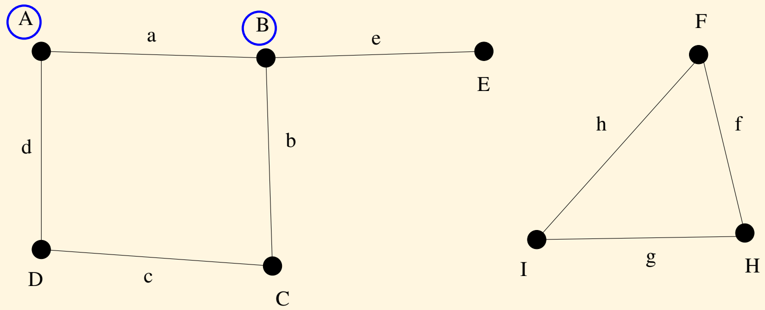
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

les sommets A et B sont les extrémités de l'arête a

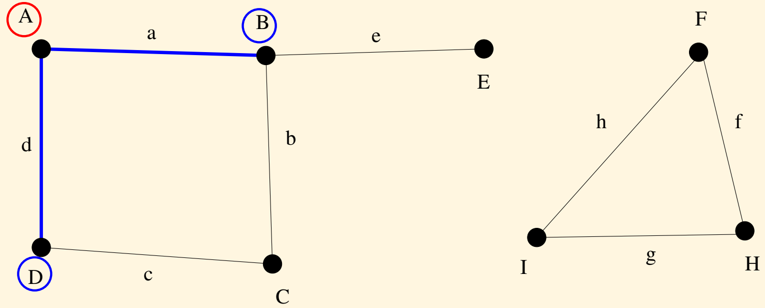
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

les sommets *A* et *B* sont voisins

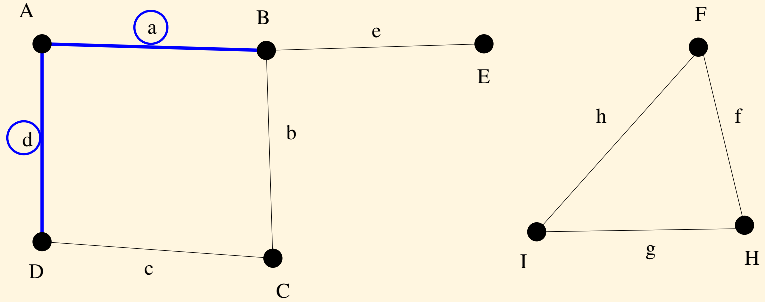
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

l'ensemble des sommets voisins du sommet A est $\{B, D\}$

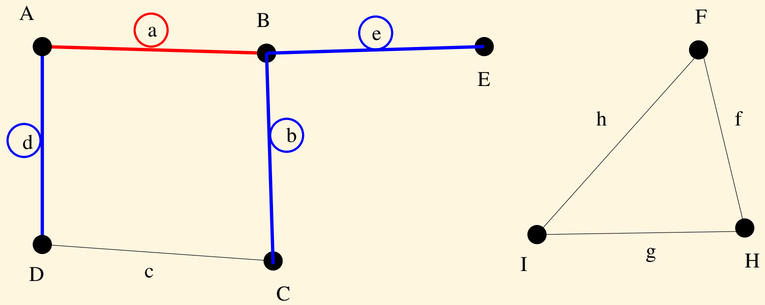
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

les arêtes *a* et *d* sont adjacentes

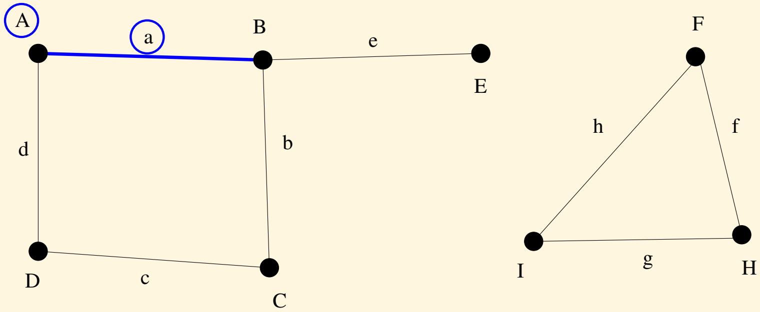
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

l'ensemble des arêtes adjacentes à l'arête a est $\{b, d, e\}$

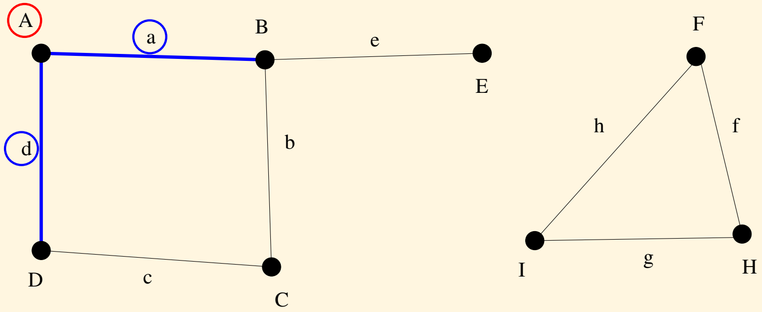
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

l'arête a est incidente au sommet A

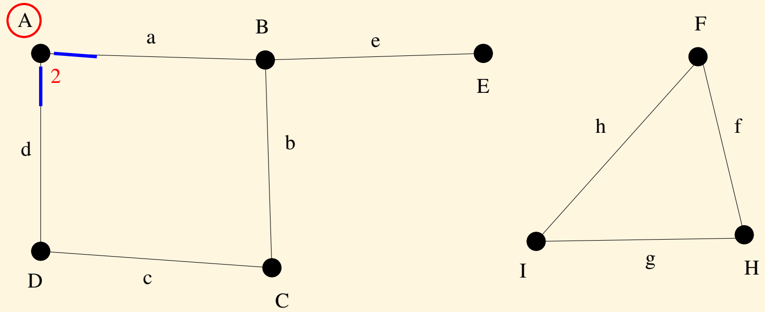
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

l'ensemble des arêtes incidentes au sommet A est $\{a, d\}$

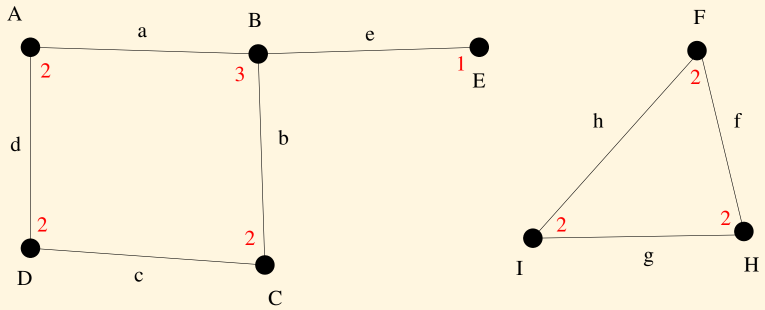
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

le degré du sommet A est 2.

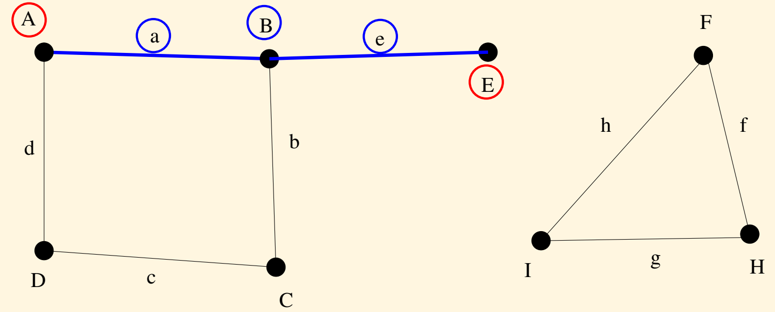
Un Graphe



« Définition » par l'exemple

La séquence (croissante) des degrés est $(1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$.

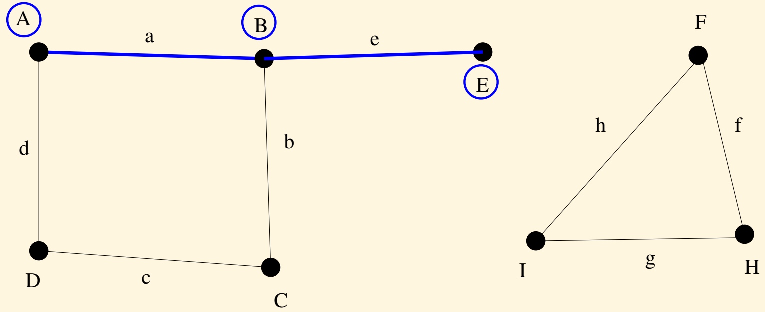
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
Les extrémités de cette chaîne sont *A* et *E*.

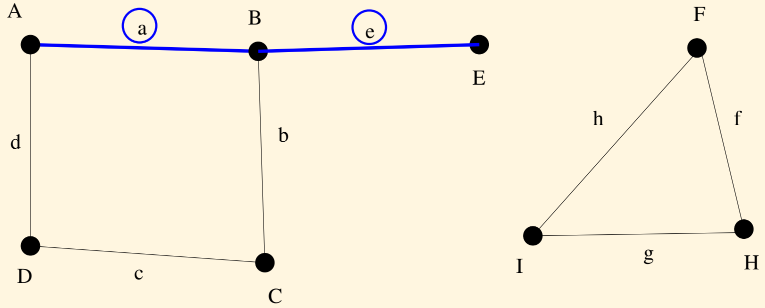
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
Les sommets de la chaîne sont *A*, *B* et *E*.

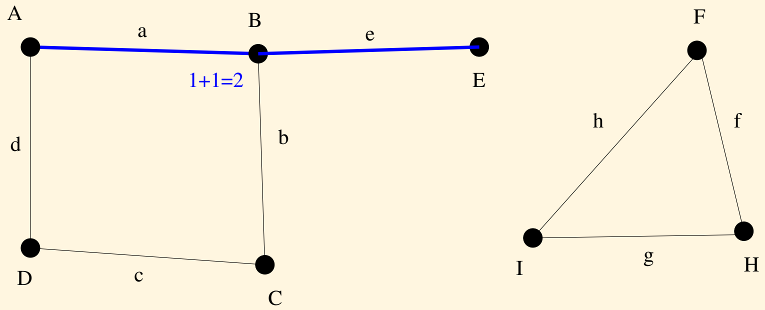
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
Les arêtes de la chaîne sont *a* et *e*.

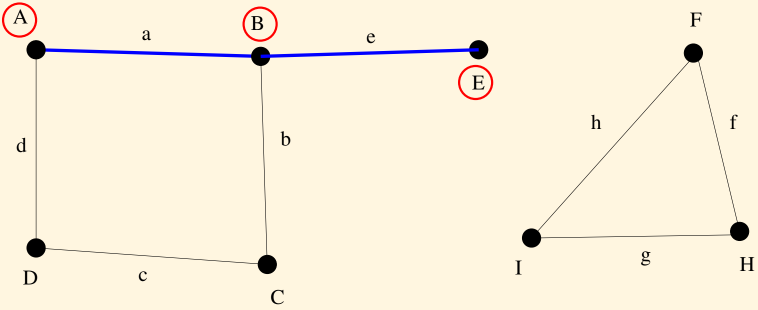
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
La longueur de la chaîne est 2.

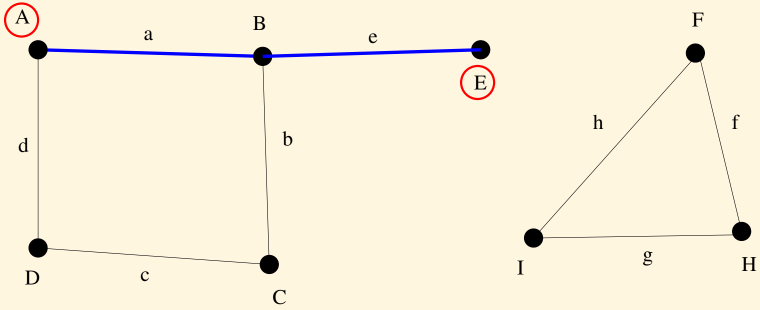
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
En général, on parle en raccourci de la "chaîne *ABE*".

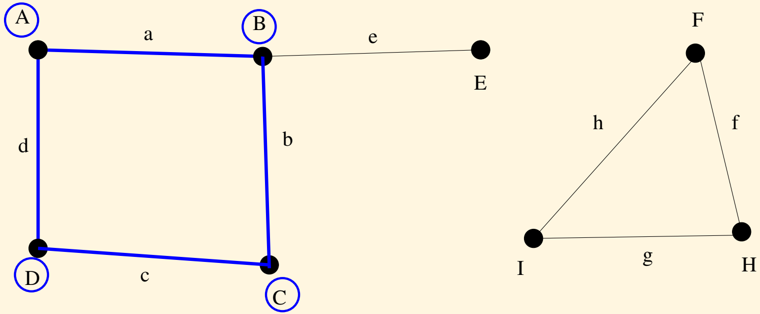
Chaîne



« Définition » par l'exemple :

AaBeE est une chaîne de notre graphe.
E est accessible à partir de *A* et *A* est accessible à partir de *E*.

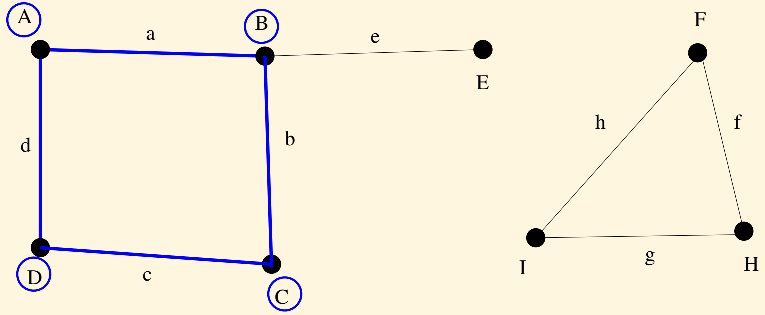
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.

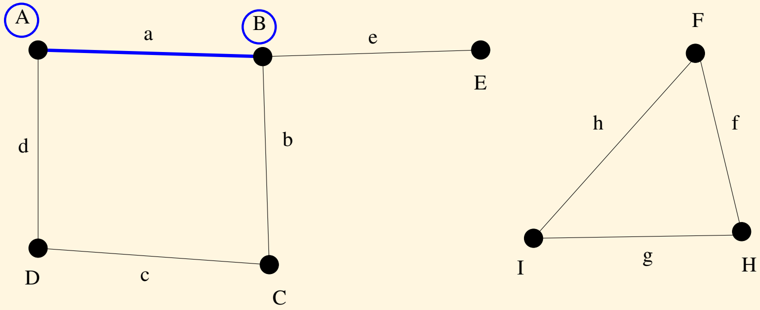
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.
ABCDA est isomorphe au graphe C_4 et il est donc de taille 4.

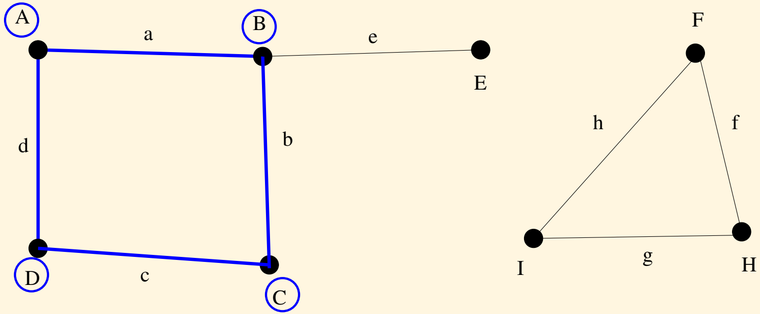
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.
Attention : les arêtes doivent être distinctes, c.-à-d. que *ABA* n'est pas un cycle.

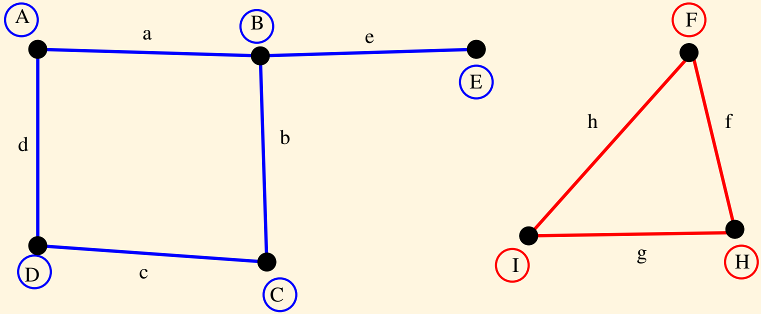
Cycle



« Définition » par l'exemple :

ABCDA est un cycle de notre graphe.
La longueur minimale d'un cycle est 3.

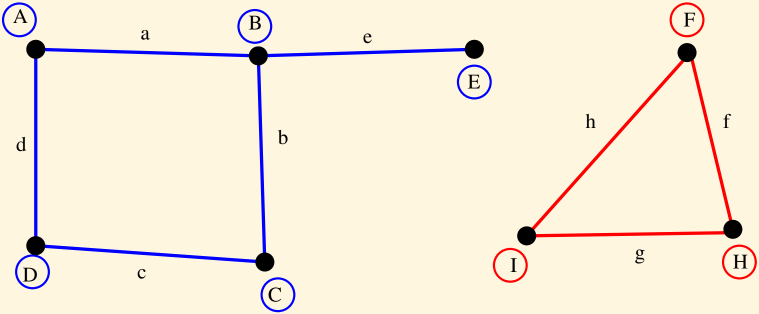
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Composante connexe : ensemble maximal de sommets mutuellement accessibles.

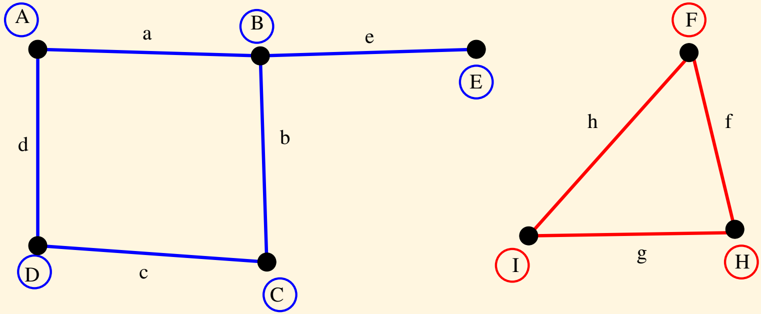
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Les composantes connexes de notre graphe sont $\{A, B, C, D, E\}$ et $\{F, H, I\}$.

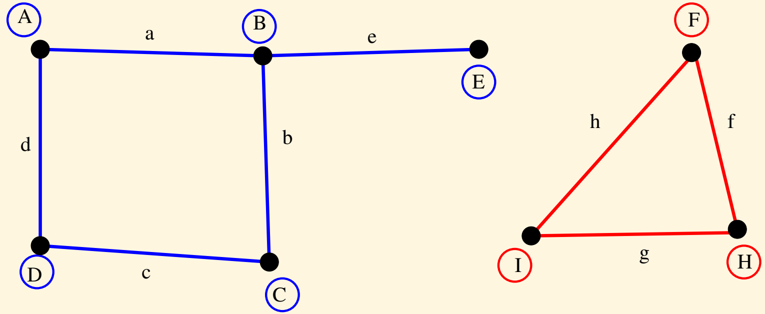
Connexité



« Définition » par l'exemple :

Un graphe est connexe si tous les sommets sont mutuellement accessibles (c.-à-d. graphe constitué d'une seule composante connexe).

Connexité



« Définition » par l'exemple :

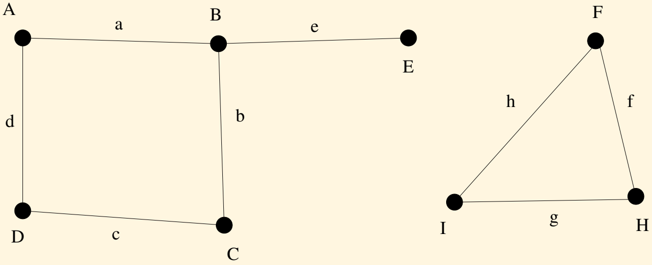
Notre graphe n'est pas connexe puisqu'il est constitué de deux composantes connexes.

Chaînes particulières

Analogie villes et routes

- Considérons les nœuds de notre graphe comme des villes et les arêtes comme des routes.
- On veut pouvoir faire la différence entre des trajets (des chaînes) qui ne réutilisent pas la même “route” et ceux qui ne repassent pas par la même “ville”.
- On les appelle respectivement chaîne simple et chaîne élémentaire.

Chaînes particulières



« Définition » par l'exemple :

	chaîne simple arêtes distinctes	chaîne élémentaire sommets distincts
ABE	oui	oui
ABEB	non	non
BADCBE	oui	non
(impossible	non	oui)

Enlever les détours

Remarque

- Si un trajet d'une ville à une autre repasse par une ville plusieurs fois, on peut toujours ne pas faire de détour et aller directement vers notre but.
- C'est ce que dit le résultat suivant.

Lemme (Chaîne extraite)

Soit G un graphe et soient x et y deux sommets de G. S'il existe une chaîne d'extrémités x et y dans G, alors il existe une chaîne élémentaire d'extrémités x et y dans G.

Représentations d'un graphe

Question

Comment représenter un graphe afin de le coder en machine ?

Remarque

La démarche est la même dans le cas d'un graphe orienté ou non. En effet, un graphe (non orienté) est vu comme un graphe orienté où on a un arc dans les deux sens pour chaque arête.

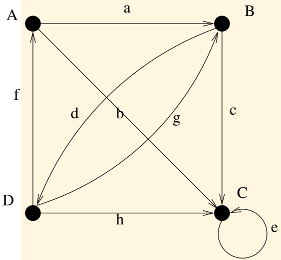
Réponse

Il y a plusieurs solutions.

- avec des listes
- avec des tableaux

Représentations par listes (graphes orientés)

Listes des successeurs



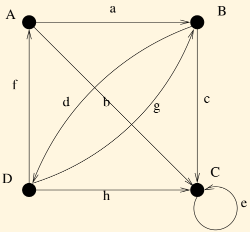
sommet	successeurs
A	B, C
B	C, D
C	C
D	A, B, C

Remarques

- Alternative : Listes des prédécesseurs.
- Pour un graphe non-orienté, on prend simplement les listes des voisins.

Représentation par Tableau I (graphes orientés)

Tableau d'adjacence



origine \ fin	A	B	C	D
A		a	b	
B			c	d
C			e	
D	f	g	h	

Codage en C

- Tableau à deux dimensions `t`
- `t[i][j]` $= 1$ si il y a un arc du sommet i au sommet j, et 0 sinon.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Représentation par Tableau I (graphes orientés)

Mathématiquement, il s'agit d'une matrice

Tableau d'adjacence

origine \ *fin*	*A*	*B*	*C*	*D*
A		*a*	*b*	
B			*c*	*d*
C			*e*	
D	*f*	*g*	*h*	

Matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pub : google et la théorie spectrale des graphes

On peut même utiliser l'algèbre linéaire (le domaine d'étude des matrices) pour aborder et apréhender autrement les graphes. C'est le cas de l'algorithme d'indexation de google qui repose *grosso modo* sur le calcul d'un vecteur propre de la matrice d'adjacence du graphe du web.

Représentations par Tableau II (graphes orientés)

Tableau d'incidence

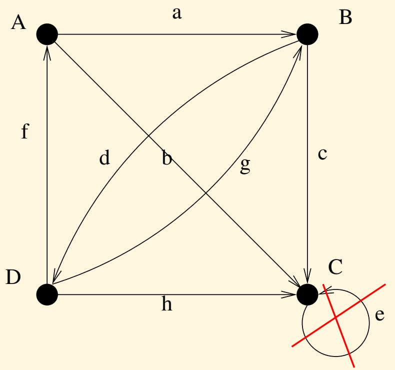


Tableau d'incidence

	a	b	c	d	e	f	g	h
A	d	d			$\times$	f		
B	f		d	d	$\times$		f	
C		f	f		$\times$			f
D				f	$\times$	d	d	d

Matrice d'incidence

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

On utilise cette représentation pour les graphes sans boucle uniquement.

Avantages et inconvénients

- Listes des successeurs
  - Avantage : Le stockage utilise moins de mémoire ($s + a$)
  - Inconvénient : L'accès prend plus de temps (parcourir les listes)
- Tableau d'adjacence
  - Avantage : L'accès est direct ($t[i][j]$)
  - Inconvénient : Le stockage utilise plus d'espace (s^2)
- Tableau d'incidence
  - Avantage : L'accès est direct ($t[i][j]$)
  - Inconvénient : Le stockage utilise plus d'espace ($s \times a$)

FIN