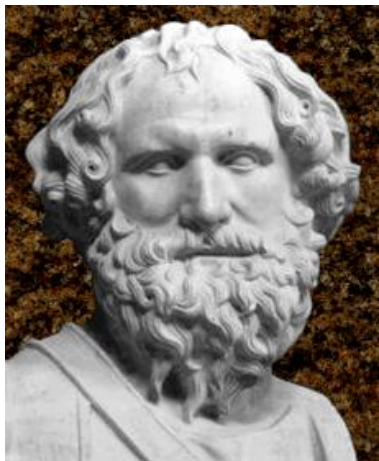


## Accompagnement personnalisé : Approximation des nombres réels

Extrait du bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011 :

« Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme. Connaître le nom de quelques mathématiciens célèbres, la période à laquelle ils ont vécu et leur contribution fait partie intégrante du bagage culturel de tout élève ayant une formation scientifique. La présentation de textes historiques aide à comprendre la genèse et l'évolution de certains concepts »



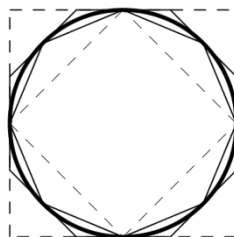
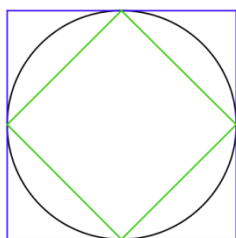
**Archimède** est né à Syracuse (actuelle Sicile) vers 287 av. J.-C.

Il grandit dans un milieu scientifique, car son père est astronome.

De bonne heure, il montre une vive passion pour les études qu'il fait sans doute à Alexandrie où il se lie d'amitié avec le célèbre Eratosthène de Cyrène, qui a calculé la circonférence de la Terre.

Revenu à Syracuse, il s'absorbe dans ses multiples recherches : mathématiques, physique, géométrie, mécanique, optique, astronomie.

L'idée pour trouver une approximation  $\pi$  est la suivante : un cercle  $\mathcal{C}$  de rayon 1 a pour circonférence  $2\pi$ , on peut construire des polygones réguliers inscrits dans le cercle et circonscrits au cercle dont les périmètres successifs forment un encadrement de  $2\pi$ . Par conséquent, leurs demi-périmètres seront des approximations de  $\pi$ .



On peut par exemple partir d'un carré  $P_0$  de demi-périmètre noté  $p_0$  inscrit dans un cercle puis doubler le nombre de ses côtés. On obtient alors un octogone  $P_1$  de demi-périmètre noté  $p_1$  puis, par doublements successifs du nombre de côtés, on obtient une suite croissante  $p_2, p_3, \dots$  qui tend vers  $\pi$ .

On notera  $k_n$  le nombre de côtés du polygone  $P_n$  et  $c_n$  la longueur de chacun de ses côtés.

1. Combien valent  $k_0$ ,  $c_0$  et  $p_0$  ?
2. Calculer  $k_1$  et  $k_2$  ? Conjecturer la valeur de  $k_n$  et démontrer votre résultat.
3. Quelle est la limite en  $+\infty$  de  $k_n$  ?
4. a) Montrer que  $c_n^2 = 2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right)$   
b) Montrer que, pour tout réel  $a$ ,  $\cos(a) = 2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) - 1$ .  
c) En déduire que  $c_n = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_{n-1}^2}}$  (l'avantage de cette écriture étant de se détacher du calcul de cosinus)
5. a) Quel est le premier terme de cette suite ?  
b) Montrer que  $(c_n)$  est décroissante et minorée par 0. Que peut-on en déduire pour la suite  $(c_n)$  ?  
c) Quelle est la limite de  $(c_n)$  en  $+\infty$  ?
6. Déterminer l'expression de  $p_n$  en fonction de  $c_n$  et  $k_n$ .
7. A l'aide d'un tableur, déterminer le rang à partir duquel l'approximation de  $\pi$  par  $p_n$  est exacte à  $10^{-8}$  près.

Remarque : la méthode d'Archimède est ici un peu transformée, la méthode originale consistait à encadrer le périmètre du cercle entre les demi-périmètres de polygones réguliers.

8. Si on note  $u_n$  et  $v_n$  la longueur du côté des polygones réguliers à  $n$  côtés respectivement inscrits et circonscrits au cercle de rayon 1 ( $n$  entier supérieur ou égal à 3), par des considérations géométriques, on

peut montrer que  $v_{2n} = \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}$  et  $u_{2n} = \sqrt{\frac{u_n v_n}{2}}$ .

Programmer sur un tableur le calcul des valeurs de  $u_n$  et  $v_n$  et trouver la valeur de  $n$  permettant d'avoir une aussi bonne approximation que celle trouvée par Archimède donnée par l'encadrement  $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$

[Pi.xlsx](#)