Université Blaise PASCAL
I.R.E.M. de CLERMONT-FERRAND

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

- Actes de l'Université d'été -

4 - 11 juillet 1998

La Rochelle - Charente-Maritime

Edition coordonnée par :
Robert Noirfalise - IREM de Clermont-Ferrand

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Complexe scientifique des Cézeaux - 63177 AUBIERE cedex
Tél. 04.73.40.70.98 - Fax.04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr

CLER-222

Université Blaise PASCAL
I.R.E.M. de CLERMONT-FERRAND

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

- Actes de l'Université d'été -

4 - 11 juillet 1998

La Rochelle - Charente-Maritime

Edition coordonnée par :
Robert Noirfalise - IREM de Clermont-Ferrand

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Complexe scientifique des Cézeaux - 63177 AUBIERE cedex
Tél. 04.73.40.70.98 - Fax.04.73.40.70.78 - irem@univ-bpclermont.fr

PRESENTATION de l'UNIVERSITE d'ETE

Organisée par la Commission Inter-IREM de Didactique, cette Université d'éte a été conçue comme un lieu et un temps d'étude d'outils et de concepts de la didactique des mathématiques pour l'analyse des pratiques enseignantes.

La communauté française des didacticiens organise tous les deux ans une école d'été internationale s'adressant à la fois aux chercheurs et aux formateurs. Le nombre limité de places fait que des formateurs IUFM, IREM, MAFPEN, n' ont pas la possibilité d'y participer. La Commission Inter-IREM de didactique s'est proposée en alternance avec l'école d'été d'organiser une UE destinée plus spécifiquement à des formateurs. L'UE que nous présentons ici est la seconde du genre.

Le choix du thème nous a été dicté à la fois par les termes de l'appel d'offres lancé par le Ministère de l'éducation nationale, par l' actualité et aussi par les nombreux débats que nous avons pu avoir au sein de la commission à propos de l'analyse de séquences didactiques.

L'analyse des pratiques enseignantes n'est pas nouvelle, elle est ancienne, mais elle connaît un regain d'actualité avec la création des IUFM et la formation en leur sein des jeunes professeurs. C'est aussi, sur le plan scientifique, parce que le développement des théories didactiques autorise de nouvelles analyses intégrant le fonctionnement des savoirs disciplinaires en situation scolaire. D'autres approches existent mais, comme en sociologie, intègrent rarement la dimension des savoirs spécifiques à enseigner dans les analyses proposées ou encore, comme en psychologie, la prise en compte spécifique du contexte scolaire et de ses conséquences.

Quelques débats, souvent passionnés au sein même de la Commission Inter-IREM de Didactique, ont montré qu'il y avait des interprétations divergentes des concepts didactiques se révélant en particulier dans l'analyse et l'évaluation des conduites enseignantes. Ceci explique que les organisateurs de l'UE aient fait appel à des créateurs de théories didactiques et à des chercheurs les connaissant bien, pour que ceux-ci puissent montrer l'intérêt théorique et pratique de ce qui se fait dans ce domaine de recherche, en espérant qu'ainsi puissent être levées certaines ambiguités d'interprétations de leurs travaux.

"Théorie des situations", d'une part, et "approche anthropologique" d'autre part, étant deux courants théoriques majeurs en didactique des mathématiques, nous avons fait le choix d'articuler l'organisation de l'UE à partir de ceux-ci. On retrouve dans ces actes, en conséquence, deux grandes parties consacrées à ces deux approches théoriques. On y trouvera aussi, en troisième partie, un aperçu d'une recherche plus quantitative menée par des chercheurs en collaboration avec le Bureau "Direction des études et de la prospective" du Ministère de l'éducation, recherche visant à décrire les pratiques des enseignants de mathématiques (en classe de sixième).

Dans les pages qui suivent le lecteur rencontrera quelques traces de l'organisation didactique des études proposées, aussi la présentons nous rapidement.
Un thème d'étude était organisé en cinq moments:

- un exposé théorique par un chercheur,
- un atelier où un (ou des) chercheur montrait un usage des outils présentés dans l'exposé théorique,
- un TD (Travaux dirigés): classiquement les stagiaires, dirigés par un intervenant, s'exerçaient à l'usage des outils présentés. On trouvera dans ces actes une partie de quelques matériaux bruts utilisés pour ces TD: on y trouve des photocopies de cahier d'élèves qui malheureusement ne sont pas toujours d'une grande qualité typographique et nous prions le lecteur de bien vouloir nous le pardonner,
- un temps de travail en petits sous-groupes où les particiapnts à l'UE étaient invités à réagir et à questionner les divers intervenants. Les questions et remarques étaient formulées par écrit en fin de journée,
- le lendemain les intervenants répondaient aux questions posées (le texte de Guy Brousseau dans ces actes est constitué en partie des réponses aux questions formulées à propos de la théorie des situations).

Signalons que certains intervenants, pour des raisons diverses, ont fait le choix de ne pas publier ici leur contribution à l'université.

PLANNING

	Sam 4 juillet	Dim 5 juillet	Lun 6 juillet	Mar 7 juillet	Merc 8 juillet	Jeu 9 juillet	Ven 10 juillet	Sam 11 juillet
		Théorie des situations			Théorie anthropologique			
8h30		*Cours magistral*	*Cours magistral*	*Réactions; synthèse mise au point*	*Cours magistra l*	*Cours magistral*	*Cours magistral*	*Réactions; synthèse mise au point*
9h45		Pause	Pause		Pause	Pause	Pause	
10h15 à 12h		*Visite d'atelier*	*Visite d'atelier*	10h30 Pause 11h : *Perspectives* : initialisation de travaux par les stagiaires	*Visite d'atelier*	*Visite d'atelier*	*Visite d'atelie r*	10h30 Pause 11h : *Perspectives* : initialisation de travaux par les stagiaires
12h30		Repas	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas	Repas
14h				Balade et repas à l'île de Ré		Musée Rochelais		
15h	Logistique Présentations des thèmes 16h ouverture officielle	*TD en parallèle*	*TD en parallèle*		*TD en parallèle*	16h : *TD en parallèle*	*TD en parallèle*	
17h	Apéritif mairie	Pause	Pause		Pause		Pause	
17h30		*Synthèse de la journée*	*Synthèse de la journée*		*Synthèse de la journée*		*Questions écrites pour débattre*	
18h à18h30		*Réaction-Régulation*	*Questions écrites pour débattre*		*Réaction-régulation*	*Synthèse de la journée*		
19h	Repas	Repas	Repas		Repas	*Réaction-régulation : Questions écrites pour débattre*	Repas	
19h30					Visite cloître roman	Repas		
20h30		La Rochelle à huis clos	21h : Aquarium			*21h : Commu nication*		

REMERCIEMENTS

La Commission Inter-IREM de Didactique, les organisateurs tiennent à adresser leurs remerciements aux institutions, aux personnes qui, par leur soutien, ont permis le bon fonctionnement de cette Université d'Eté :

- Le Ministère de l'Education Nationale qui a accepté le projet de cette U.E. avec le nombre de participants (50) prévus.

- L'IREM de Poitiers, son personnel, ses animateurs qui ont pris en charge toute l'organisation matérielle et financière et qui ont su, avec efficacité et bonne humeur, faire de cette U.E. un temps de travail mais aussi de détente.

- Le département de mathématiques de l'Université de la Rochelle qui nous a accueilli dans ses locaux.

- Les IREM de Besançon et de Montpellier qui ont contribué à l'organisation de cette U.E.

- L'IREM de Clermont-Ferrand qui a pris en charge l'édition des actes.

- Le Rectorat de Poitiers pour son soutien.

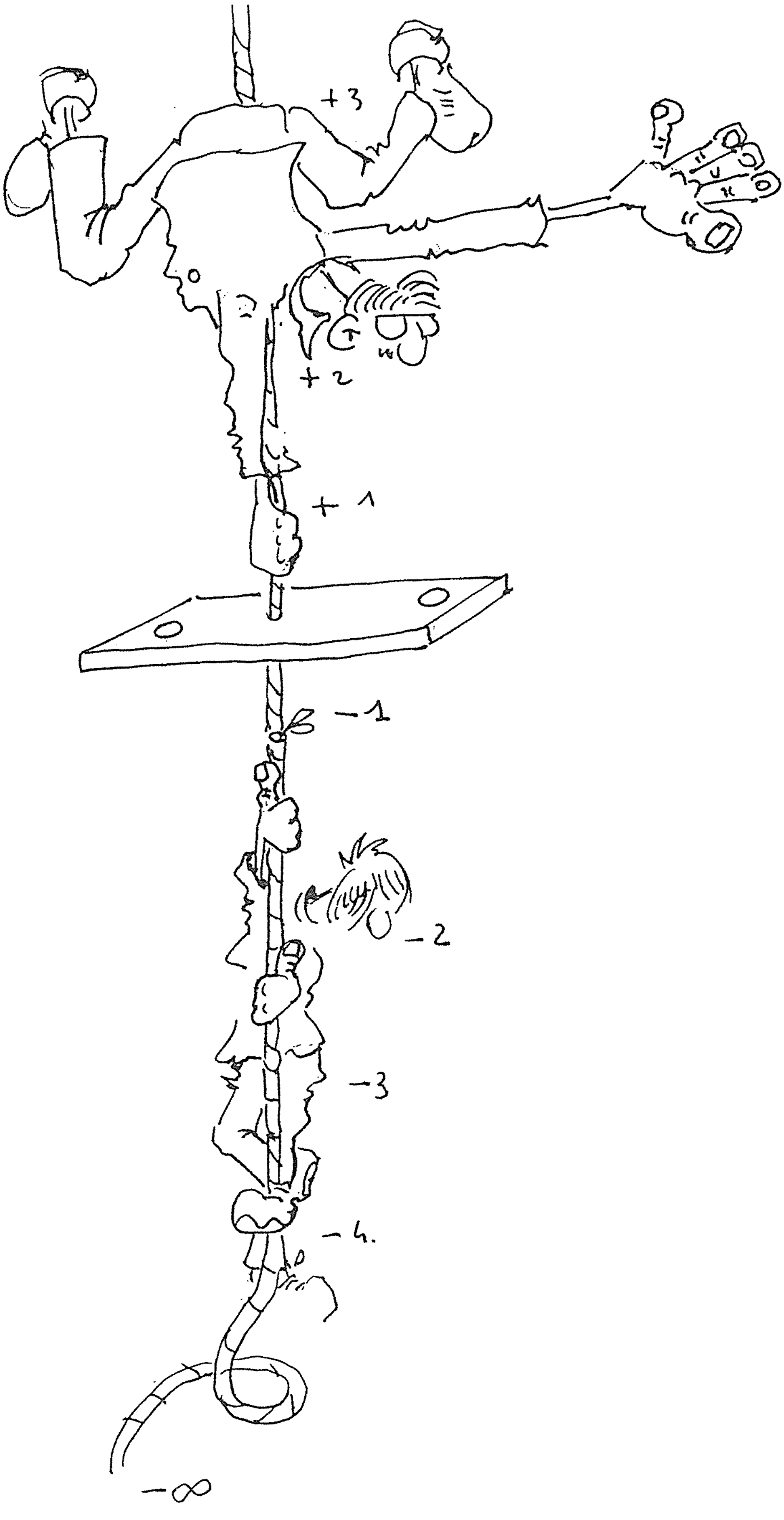
- La Mairie de la ville de la Rochelle pour son accueil

Les dessins illustrant ces actes ont été réalisés pendant l'UE par Serge CECCONI.

SOMMAIRE

I

THEORIE DES SITUATIONS


+3
+2
+1
-1
-2
-3
-4.
$-\infty$

LE MILIEU ET LE CONTRAT, CONCEPTS POUR LA CONSTRUCTION ET L'ANALYSE DE SITUATIONS D'ENSEIGNEMENT

par Claire Margolinas

IUFM d'Auvergne

et Equipe de didactique des mathématiques, Laboratoire Leibniz, Grenoble

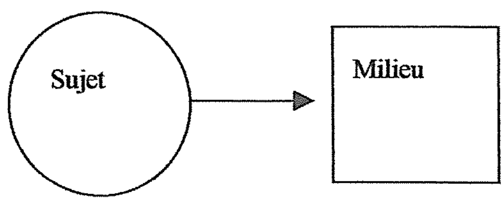
Dans ce texte, j'essayerai de montrer comment les deux concepts de milieu et de contrat sont importants pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. Ces deux concepts ont été introduits par Guy Brousseau dans le cadre de la théorie des situations (pour une synthèse, voir Brousseau 1998). Je résumerai tout d'abord les nécessités théoriques de cette introduction. Il s'agit en effet de concepts tout à fait centraux, nécessaires pour une bonne interprétation des notions de situations didactiques et adidactiques, mais parfois mal connus. Je me situerai ensuite sur le plan de l'analyse des situations d'enseignement, pour montrer comment ces notions permettent de comprendre le fonctionnement de situations tout à fait ordinaires, vécues dans des classes de mathématiques non organisées pour la recherche.

1 - Le concept de milieu: une nécessité théorique

1.1- Nécessité du point de vue de la finalité de l'enseignement

Une des caractéristiques paradoxales du système d'enseignement est que sa finalité est de disparaître : à la sortie de l'école, l'ex-élève doit être capable d'utiliser ses connaissances dans des situations *non didactiques*, c'est-à-dire qui n'auront pas été construites spécialement pour lui faire acquérir ou pour évaluer une connaissance.

Dans ces situations non didactiques, le sujet cherche à produire des actions, des formulations, ou des preuves, pour agir sur un *milieu* qui comprend des éléments matériels et éventuellement humains.

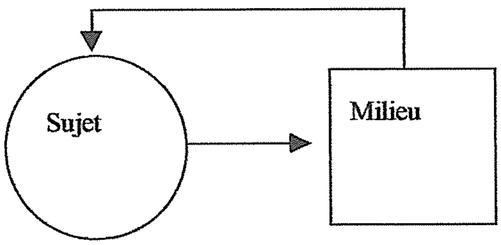


La résolution de cette finalité du système d'enseignement (qui est fondamentale, même s'il peut y en avoir d'autres) peut être obtenue de différentes manières. L'une d'entre elle consiste à ménager, dans la classe même, des situations dans lesquelles l'élève se retrouve en interaction avec un milieu qui aura été le plus possible épuré des intentions didactiques du professeur, Brousseau parle dans ce cas de situation *adidactique*. Il s'agit d'une fiction, que l'enseignant et l'élève peuvent partager un temps.

> « Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en œuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. » Brousseau 1998, page 59.

1-2 Nécessité du point de vue de l'apprentissage

En référence à la théorie piagétienne, on fait l'hypothèse psychologique suivante: le sujet apprend en s'adaptant (assimilation et accommodation) à un milieu qui est producteur de contradictions, de déséquilibres.

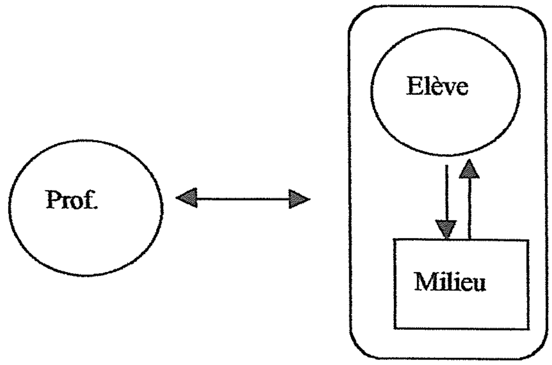


Cette hypothèse nous conduit, elle aussi, à construire des situations dans lesquelles le sujet peut apprendre en s'adaptant à un milieu, Brousseau a nommé ce processus, dans sa réalisation en situation didactique, l'apprentissage par adaptation.

1-3 Le rôle du professeur dans l'organisation du milieu

Dans la perspective d'un enseignement basé sur l'apprentissage par adaptation, le professeur est l'organisateur des jeux de l'élève avec le milieu. C'est lui qui doit choisir les situations adidactiques les plus adaptées.

On a donc le schéma suivant



Il est le garant de l'adéquation de la connaissance acquise avec le savoir visé (qui relève de la culture), ce qui nécessite une recherche de situations caractéristiques des différentes fonctions du savoir. Brousseau parle alors de la recherche d'une situation fondamentale d'un savoir donné, dont les variables engendrent les situations adidactiques cherchées.

Dans la situation de classe, le professeur doit donc établir puis maintenir la relation des élèves avec la situation adidactique choisie (Brousseau parle de processus de dévolution). Il est clair que le professeur ne se contente pas de livrer le problème aux élèves, mais qu'il soutient également leurs efforts, par exemple en rappelant les règles du jeu (c'est vous qui devez trouver mais pour cela il faut chercher, vous devez travailler sur le problème que je vous ai donné et pas sur un autre, etc.). D'autre part, il observe le travail des élèves, et cette observation lui est nécessaire pour gérer l'avancement du travail (activer les élèves les plus lents, par exemple), mais également pour prendre des décisions sur l'opportunité d'introduction d'une nouvelle valeur de variable dans la suite des situations, ou, plus généralement, de l'opportunité d'une nouvelle situation. C'est également cette observation qui lui permet de constituer une mémoire du travail des élèves qui pourra être utile par la suite, pour le rappel des difficultés rencontrées et de la façon de les dépasser, par exemple (voir la position symbolisée par P-1 dans le §4 consacré à la structuration du milieu).

1-4 Situation et milieu

Plaçons-nous maintenant dans une perspective *d'observation* et non plus de construction. Dans la plupart des classes, les professeurs n'organisent pas leur enseignement selon une suite de situations adidactiques, comme dans l'apprentissage par adaptation. Néanmoins le modèle de Brousseau va nous être très utile pour analyser des situations « ordinaires », non pas pour dénoncer une espèce d'écart hypothétique avec un modèle supposé idéal (ce qui serait aussi illusoire que stérile), mais pour permettre de caractériser les situations dans lesquelles les élèves sont effectivement plongés.

En effet, un sujet agit toujours dans un environnement, et interagit avec un milieu. Dans la plupart des situations « ordinaires » le milieu considéré n'a pas été organisé par une autre personne dans un but particulier, même s'il est en grande partie culturel, « l'organisation culturelle » reste très peu précise.

Quand ce sujet est un élève en situation didactique, plusieurs questions se posent:

- Quelle est l'adéquation entre le milieu avec lequel l'élève-sujet interagit et le milieu adidactique d'une situation fondamentale relative au savoir à enseigner?
- Quelles sont les connaissances nécessaires à l'interaction avec le milieu ou produites par cette interaction? Ces connaissances font-elles partie des connaissances caractéristiques du savoir à enseigner ? Sinon, à quel(s) savoir(s) sont-elles relatives ?

Quand ce sujet est un professeur en situation didactique, d'autres questions se posent:

- Le professeur contrôle-t-il le milieu avec lequel l'élève interagit?

Le professeur lui-même est en situation, et en interaction avec un milieu,

- Quelles sont les connaissances du professeur nécessaires à l'interaction avec le milieu ou produites par cette interaction?

Dans tous les cas, pour répondre à ces questions, il faut pouvoir construire un modèle du milieu dans lequel les élèves et le professeur interagissent (ce qui est l'objet du § 4).

2- Le contrat didactique, une autre nécessité théorique et un exemple de fonctionnement et de dysfonctionnement

> « Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. » (Brousseau 1998, page 60).

On emploie le qualificatif "didactique" pour signifier la part du contrat qui est spécifique de la connaissance mathématique visée.

En particulier, « Le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances, et il doit reconnaître cette appropriation quand elle se produit » (idem page 61). Ce travail du professeur est connu de l'élève, qui l'observe et qui peut inférer des connaissances spécifiques: des *connaissances du contrat didactique*.

Ces connaissances peuvent être très efficaces dans la résolution de problèmes en situation didactique, mais elles relèvent du "métier" d'élève et, si elles lui permettent de donner des réponses correctes, elles ne sont donc pas un objectif d'enseignement, dans la mesure où elles ne s'adaptent qu'à des situations didactiques, crées pour l'enseignement, et à aucune situation non didactique, finalité de l'enseignement.

En algèbre, notamment, ces connaissances du contrat didactique permettent d'expliquer l'uniformité de certaines réponses, là où le problème ne les justifie pas.

Exemple: Voici un problème posé à des élèves de niveau $5^{ème}$, au tout début de l'apprentissage du calcul littéral

Ecris une formule pour calculer l'aire de la partie hachurée de la figure.

Mesure les longueurs dont tu as besoin et calcule l'aire de la partie hachurée de la figure.

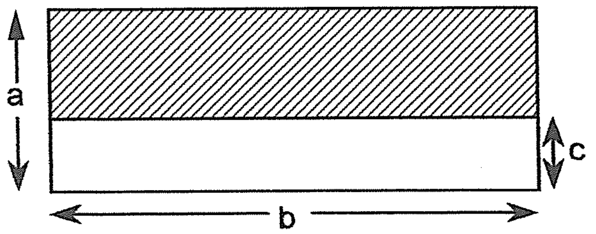


Figure A

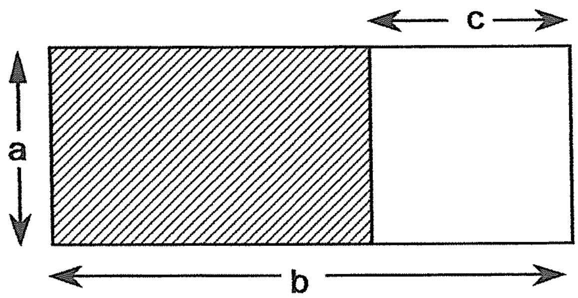


Figure B

On peut classer les réponses des élèves en réponses justes attendues, réponses fausses attendues, *mais également réponses justes « inattendues ».*

Réponses justes attendues

type: b x (a - c) ou b x a - b x c	type: a x (b - c) ou a x b - a x c
4 réponses	3 réponses

Réponses fausses ou non-réponses

4 réponses	5 réponses

Réponses justes inattendues

Type lxL ou bx(a-1) ou bxa - b	Type lxL ou ax(b-a) ou axb - a^2
1 réponse	2 réponses

Plusieurs remarques s'imposent : j'ai parlé de réponse juste « inattendue », en effet, il n'est pas faux de considérer que lxL est une formule pour l'aire du rectangle, c'est même la formule « standard ». Elle n'utilise pas ici les lettres données dans l'énoncé, et c'est ce qui fait son caractère inattendu (par le professeur), ce qui révèle « en creux » un élément du contrat didactique de ce type de travail algébrique : il faut utiliser les lettres données par l'énoncé.

De même, une formule du type b x (a - 1) pour la figure A n'est pas fausse, puisque c=1, d'autant que dans la question 2 on va justement demander aux élèves de mesurer. L'élément de contrat didactique qui rend cette formule inattendue est alors : on ne remplace les lettres données par l'énoncé par des valeurs numériques que quand c'est explicitement demandé.

Comme je l'ai signalé, les élèves sont ici au début de l'apprentissage du calcul littéral, et ce type de réponse disparaîtra assez vite, quand les règles du contrat seront mieux assimilées par les élèves.

Mais considérons un moment la question 2 d'un point de vue non didactique, c'est-à-dire essayons d'oublier un instant les raisons que peut avoir un professeur de poser cette question. Sur la figure B distribuée aux élèves, a=2,5 cm, b = 6,5 cm, c=2,5. Si l'on calcule selon la formule lxL, il suffit de mesurer la largeur du rectangle hachuré, soit 4 cm, et d'effectuer 4x2,5. Si par contre on utilise la deuxième formule juste et attendue, on doit effectuer 2,5x6,5 - 2,5x2,5 ce qui, sans machine à calculer, comporte un grand risque d'erreur.

Les élèves observés se conforment à cette prévision, et l'on trouve beaucoup d'erreurs de calcul dans la question 2, parmi les élèves produisant les réponses attendues.

Dans le problème posé aux élèves, on constate donc que la conformité au contrat didactique peut être poussée jusqu'à l'absurde, en quelque sorte, puisqu'elle conduit les élèves à faire des erreurs. On peut se demander l'effet de ce type de problème sur la représentation des élèves des mathématiques : ça complique tout ? ou bien, c'est comme ça en math, mais je ne ferai jamais ça si je devais résoudre un problème ?

En conclusion, si le contrat didactique est nécessaire à l'établissement d'une situation didactique, les connaissances qu'il engendre peuvent parasiter l'apprentissage des contenus mathématiques. La description des connaissances du contrat est donc très importante pour essayer de limiter leur impact sur l'apprentissage, mais aussi pour rendre les enseignants plus conscients des dérives possibles de leur enseignement.

Le problème n'est donc pas d'expliciter le contrat, mais que le professeur connaisse les situations qu'il met en place et en contrôle la validité par rapport à ses objectifs, en particulier en évitant que les connaissances du contrat soient les seules connaissances à acquérir.

4- *Descriptions du milieu*

Dans les paragraphes précédents, j'ai insisté sur la nécessité théorique de décrire, non seulement l'élève et l'enseignant, mais également le milieu. Mais encore faut-il savoir de quoi est constitué ce milieu, et plus exactement le milieu adidactique de l'élève, qui nous intéresse principalement. On imagine bien que le milieu n'est pas uniquement matériel (par exemple, un élève de Terminale va considérer, dans un problème d'arithmétique, les nombres entiers comme faisant partie du « matériel » à sa disposition, même s'il s'agit d'objets conceptuels). D'autre part, tout le milieu matériel présent dans la classe ne fait sans doute pas partie du milieu de la situation adidactique de l'élève (les radiateurs, les tables, les chaises, etc.). D'autre part, quand l'élève est impliqué dans une situation de formulation, d'autres élèves font partie du milieu… Les paragraphes qui suivent vont donc esquisser cette question, selon plusieurs approches et plusieurs échelles de description.

4.1- Organisation du milieu et enseignement

> « La situation adidactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut-être étudiée de façon théorique mais, dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour laisser la connaissance personnelle et objective. » (Brousseau 1998, page 60)

Pour qu'une telle ambition soit possible, le professeur doit organiser le milieu pour permettre une interaction élève - milieu. Rentrons un peu dans les caractéristiques nécessaires du milieu.

Brousseau (1998, page 93) définit le milieu comme le système *antagoniste* du système enseigné. Fregona (1995) insiste sur le qualificatif *antagoniste:*

> « Pour agir, pour apprendre, l'élève doit trouver insuffisant ses moyens de contrôle, donc le sous-système avec lequel il négocie *ne doit pas pour lui être un allié mais un concurrent.* » (page 45)

Ce qui lui permet de définir l'interaction *effective :*

> « L'interaction que nous appelons *effective* est celle qui ne dépend pas entièrement de l'acteur. Il reçoit de l'extérieur des sanctions non prévues de sa part. Le contrôle de ses actions est assumé, en partie, par un système extérieur. » (page 62)
>
> « En revanche, si l'enseignant cherche à organiser un milieu *allié* où l'acteur agit sous des contraintes *qui essayent de lui faire éviter les confrontations,* alors nous sommes en face *d'interactions de type fictif.* » (page 68)

Dans les pratiques d'enseignement *ostensives* (dans lesquelles le professeur cherche à montrer à l'élève ce qu'il doit voir et comprendre) le milieu est allié, l'élève doit "lire" ou "reconnaître" dans ce milieu les connaissances qu'il s'agit d'acquérir. Son rapport avec le milieu est donc fictif puisqu'il n'y a rien qui réagisse pour montrer une réponse inadéquate.

Exemple

Dans un manuel de $5^{ème}$ 1997.

ACTIVITE DECOUVRIR une figure agrandie
ABCD est un trapèze rectangle (dans le manuel, ce trapèze est représenté)
Agrandis ce trapèze en multipliant par 4 les dimensions indiquées. Le trapèze que tu obtiens est une représentation à l'échelle 4 du trapèze dessiné sur le livre.
Pour représenter une figure à l'échelle 4, on multiplie les dimensions de cette figure par 4

L'usage du mot "découvrir" dans ce manuel montre bien l'ambiguïté du credo "l'enfant doit construire son savoir". La "construction" est ici la reconnaissance des propriétés d'un milieu allié, il s'agit d'un apprentissage par ostension, même si l'élève manipule des objets matériels (ici il multiplie par 4 et dessine la figure agrandie).

Dans l'apprentissage par adaptation, il s'agit au contraire de construire des connaissances contre un milieu antagoniste qui résiste. En effet, ce sont les rétroactions du milieu qui permettent l'apprentissage de l'élève. Dans un milieu allié, il n'y a pas de rétroaction, l'élève agit, le milieu « est agit ».

4.2- La structuration du milieu

Dans l'environnement de l'élève, il n'y a pas qu'un milieu "matériel", avec lequel il serait en interaction "simple", et c'est pourquoi la description antagoniste/allié ne suffit pas si l'on veut décrire finement les situations de classe (ce qui n'est pas toujours nécessaire, d'ailleurs).

Brousseau (1990) décrit le milieu comme une structure "emboîtée" en "oignon", dont le point de départ est le milieu matériel. J'ai transformé ce modèle (Margolinas 1993) pour mettre en valeur le caractère central de la situation didactique et pour analyser, symétriquement à celle de l'élève, la situation du professeur.

Les ateliers publiés dans ces actes donneront des exemples d'utilisation de ce modèle pour l'analyse de situations ordinaires.

Dans la situation didactique, j'ai considéré précédemment plusieurs acteurs ou systèmes en présence : milieu, élève, professeur. On va considérer ceci comme des « places » : M, E, P. La situation didactique étant la situation de base que nous étudions, je lui ai attribué l'indice zéro, on a donc les places M0, E0, P0, dont les interactions forment la situation didactique S0. Sous la forme d'une ligne d'un tableau (voir annexe pour le tableau complet), on a donc :

M0: M-d'apprentissage	E0: Elève	P0: Professeur	S0: situation didactique

La structuration du milieu va décrire les milieux "intérieurs", symbolisés par des indices négatifs, avec lesquels l'élève interagit de façon privilégiée, et les milieux "extérieurs", symbolisés par des indices positifs, avec lesquels c'est le professeur qui interagit de façon privilégiée. Brousseau (1990) décrit 3 niveaux de milieux "intérieurs", et j'ai symétriquement (Margolinas 1993) défini 3 niveaux de milieux "extérieurs". Nous nous intéresserons ici uniquement aux milieux intérieurs, pour décrire les niveaux d'action de l'élève.

Avant d'avancer un peu dans la description du modèle, entendons-nous sur sa finalité : les problèmes que l'on peut poser (et parfois résoudre) à l'aide de ce modèle sont les suivants:

Le professeur, quand il donne un problème à résoudre à l'élève, plonge celui-ci dans un milieu.

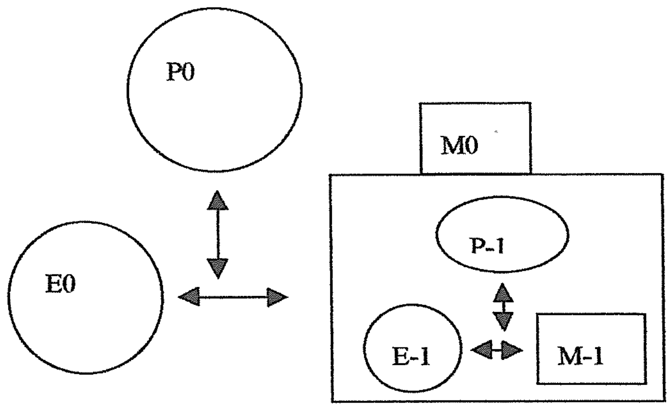
- Quelles sont les caractéristiques du milieu obtenu?
- En particulier, s'agit-il d'un milieu allié ou d'un milieu antagoniste?
- Dans le cas d'un milieu antagoniste, peut-on parler de situation adidactique pour la connaissance visée? Pour une autre connaissance?
- Les connaissances du contrat didactique sont-elles en jeu dans la situation?

Les travaux que je mène depuis 1993 m'ont montré qu'une des questions importantes était également:

- Le problème posé définit-il une ou plusieurs situations?

Si l'on décrit schématiquement la description, il s'agit de modéliser ce qui constitue M0. Brousseau (1990) décrit ceci « en oignon », le milieu M0 est donc constitué des interactions entre un milieu (M-1), un sujet qui caractérise une des positions de l'élève (E-1), et un sujet qui caractérise une des positions du professeur (P-1). On peut représenter ceci soit comme une nouvelle « ligne » du tableau, soit comme une « couche » plus intérieure de « l'oignon ».

M-1:	E-1:	P-1:	S-1:
M-de référence	E-apprenant	P-observateur	situation d'apprentissage



Et ainsi de suite, on considère ensuite le niveau suivant (-2), dans lequel on « rentre » dans M-1, et dans lequel la position du professeur n'apparaît plus (il s'agit du travail autonome de l'élève), puis le niveau final (-3) . Pour l'instant, j'imagine qu'il est difficile de se faire une représentation concrète de ces objets, et c'est pourquoi l'article va se clore sur une illustration de cette question, prolongée dans les différents ateliers.

Exemple (repris de Comiti, Grenier et Margolinas 1995).

Le problème suivant est posé oralement dans une classe de 3e en 1992 pour introduire la racine carrée:

Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un?

Les élèves travaillent sans calculatrice

Détermination de la situation objective (S-3)

La situation objective est une situation non finalisée, dans lequel le milieu matériel (M-3) comporte les objets disponibles pour E-3 qui permettent une entrée dans le problème.

Selon le point de vue de Chevallard (1989) on peut dire que le rapport institutionnel à ces objets doit être stable.

Ici, on trouve au minimum dans M-3

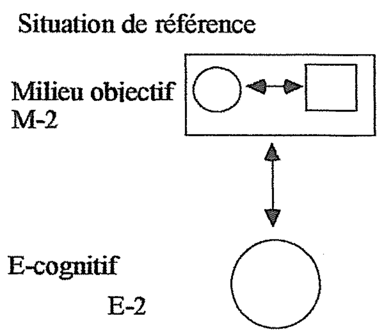
- les nombres entiers, relatifs, rationnels

Les connaissances de E-3 permettant l'interaction avec M-3 sont:

- les propriétés de la multiplication sur ces nombres, notamment la règle des signes
- la définition d'un carré comme multiplication du nombre par lui-même.

S-3 (situation objective): E-3 produit (effectivement ou virtuellement) des couples de nombres connus associant un nombre et son carré (a, a^2).

Pour déterminer le niveau suivant (S-2), on doit se souvenir de l'emboîtement



Les objets avec lesquels E-3 établit un rapport localement stable, issus de la situation objective (S-3), deviennent le milieu (M-2) pour l'interaction de E-2.

Ici, il s'agit des couples (a, a^2).

Sans connaissance supplémentaire, on obtient

S-2: E-2 recherche des couples de nombres dans lesquels le deuxième terme (carré) est moins un.

Cette exploration systématique de l'ensemble des couples est la stratégie de base.

On obtient la situation d'apprentissage (S-1)

Le milieu M-1 est formé de l'absence de couple trouvé dans la situation précédente.

E-1 doit donc chercher une raison de cette propriété du milieu.

Les connaissances en jeu (utilisation de la règle des signes appliquée à une propriété de l'ensemble d'arrivée de la fonction carrée) sont bien celles que le professeur a pour projet que l'élève apprenne.

M-1 permet à E-1 de faire des essais, mais pas de conclure.

S-1: E-1 cherche une raison à l'absence de carré égale à moins un dans ses recherches.

P-1 observe (sans conclure) le déroulement de S-1.

La situation didactique S0

Dans S0, il s'agit de trouver une raison mathématiquement acceptable à l'absence de nombre dont le carré est moins un.

E0 peut formuler ce qu'il a appris dans la situation S-1.

P0 va intervenir pour conclure.

On peut notamment faire une preuve par exhaustion, qui semble à la portée des élèves:

il y a trois cas possibles, zéro, dont le carré n'est pas -1, un nombre positif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1, un nombre négatif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1.

La situation telle que je viens de la décrire est celle que le professeur veut produire, *mais on peut décrire une autre situation qui correspond au même problème.*

Pourquoi rechercher une nouvelle situation ? Il y a ici plusieurs motivations :

- le milieu matériel précédent inclue des connaissances récentes et sans doute peu stabilisées pour certains élèves de troisième (produit de nombres négatifs, définition du carré);
- dans les couples retenus, aucun ne correspond au couple $(-(1)^2, -1)$, pourtant donné par un élève de la classe, ce qui perturbera beaucoup le professeur dans le déroulement de la situation observée.

On peut construire un milieu **M'-3** qui permet l'entrée dans le problème:

- nombres entiers (ou écritures entières),
- "signes" parenthèses, virgule décimale, signe "moins", exposant, etc.
- règles d'écritures des signes (par exemple, on n'écrit pas 2,2,34).

S'-3 (situation objective): E-3 produit (effectivement ou virtuellement) des couples de nombres connus associant un nombre et une écriture comportant ce nombre et un exposant "carré" (a, a^2), $(a, (-a)^2)$, $(a, -(a)^2)$, etc.

La **situation d'action (S'-2)**

Recherche de couples de nombres dans lesquels le deuxième terme est moins un.

Cette exploration systématique de l'ensemble des couples est la stratégie de base. Dans S'2, il existe de tels couples.

La **situation d'apprentissage (S'-1)**

Dans S'-1, E-1 formule une réponse à la question et sa raison. Dans S'-1, la réponse est positive et il suffit d'exhiber le couple correspondant.

Cette situation S' n'est pas attendue par le professeur, mais l'observation de classe montre qu'elle permet d'interpréter de nombreux moments d'incompréhension entre le professeur et les élèves.

Un moment d'observation, résumé de l'interaction entre le professeur et Michaël :

Michaël propose la réponse "oui" à la question "Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un?". Il a en effet trouvé un tel nombre, il s'agit du "carré négatif".

L'enseignant ne comprend pas ce que veut dire Michaël, l'explication de celui-ci se rapporte à *l'écriture* de l'expression à laquelle il pense (ce sont bien des écritures et non pas des nombres qui sont en jeu dans S').

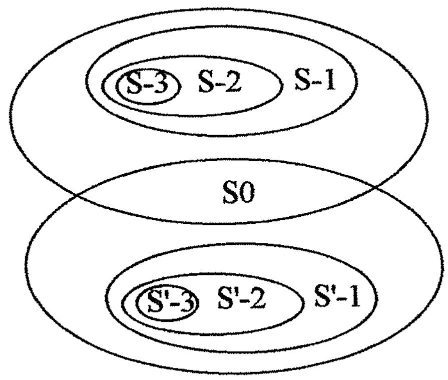
Cette écriture n'a aucune interprétation dans S (où $-(1)^2$ n'est jamais le carré d'un nombre), et l'enseignant, contrairement au contrat usuel dans la classe, envoie Michaël écrire au tableau.

L'explication qui permettrait de répondre à Michaël pourrait être "toutes les écritures bien formées avec un carré ne s'appellent pas toutes carré".

Ce type d'information est très éloigné des propriétés que l'enseignant pense pouvoir institutionnaliser; elle pose d'autre part des problèmes avec le savoir savant sur le domaine numérique (dans lequel la question de l'écriture est secondaire).

Les interventions d'autres élèves au cours de la séance montrent que les deux analyses en S et S' de la situation permettent d'interpréter de nombreuses interventions d'élèves et d'incompréhension de l'enseignant.

Tout se passe comme s'il y avait "dédoublement" de la situation:



Conclusion

A travers le filtre des deux concepts en jeu dans ce texte, contrat et milieu, on a vu apparaître la description de beaucoup de connaissances différentes, connaissances des élèves mais aussi connaissances du professeur.

Pour faire son travail, l'élève a des connaissances qui ne sont pas équivalentes du point de vue des savoirs à enseigner : connaissances du contrat didactique, connaissances adéquates (ou idoines) pour un savoir donné. Pour le professeur, savoir évaluer quel type de connaissance l'élève peut utiliser pour réussir est essentiel, puisque son travail est d'enseigner des savoirs prédéterminés. C'est pour moi la raison majeure pour laquelle les enseignants et les formateurs d'enseignants pourraient être plus attentifs aux situations dans lesquelles ils mettent effectivement les élèves. Mais cette « attention » demande des connaissances, dont certaines me semblent développées dans le paradigme de la théorie des situations.

Grâce au travail de Fregona, le professeur peut par exemple s'interroger, avant de s'engager dans une activité, sur le caractère fictif ou effectif des relations que les élèves vont entretenir avec le milieu mis en place. S'il s'agit de relations de caractère fictif, mais qu'aucune situation meilleure ne semble possible, le professeur pourra au moins faire l'économie de temps de l'établissement concret du problème pour chaque élève, puisque son évocation ou son travail collectif n'est pas fondamentalement d'une nature différente.

Grâce à la métaphore de l'emboîtement des niveaux du milieu, ou bien grâce à la technique d'analyse de la structuration, le professeur peut s'apercevoir avant de vivre un problème avec ses élèves des « dédoublements » ou « bifurcations » possibles dans une situation, ce qu'il peut parfois prévenir par des interventions visant à maintenir l'élève dans la situation souhaitée, du point de vue de l'apprentissage.

Ces connaissances sont souvent présentes, sans justification formulée, chez les enseignants les plus expérimentés. Exemple : « ce problème je le corrige collectivement, je ne demande plus à chacun de dessiner le trapèze », ou autre exemple : « il y a des élèves qui bloque sur le carré, et il faut s'entendre avant sur ce que c'est, » etc. Ce qui nous importe ici, c'est de commencer à nous intéresser à ces connaissances professionnelles, souvent éparses, et qui se transmettent difficilement du fait qu'elles ne sont pas organisées en raisons.

Références bibliographiques

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU Guy, 1998, *Théorie des situations didactiques*, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

COMITI Claude, GRENIER Denise, MARGOLINAS Claire, 1995, Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques, in ARSAC Gilbert et al. coord, *Différents types de savoirs et leur articulation*, pp. 92-113, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

FREGONA Dilma, 1995, Les figures planes comme « milieu » dans l'enseignement de la géométrie: interactions, contrats et transpositions didactiques, Thèse de l'Université de Bordeaux I, diffusion LADIST Bordeaux.

MARGOLINAS Claire, 1993, *De l'importance du vrai et le faux dans la classe de mathématiques*, 255p., ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in Margolinas Claire, *Les débats de didactique des mathématiques,* annales 1993-1994, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS Claire, 1998, Etude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu: détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*

Annexe : Tableau de la structuration du milieu

A chaque niveau, Sn=Mn-1

M+3 M de construction		P+3 P-noosphérien	S+3 S-noosphérienne
M+2 M de projet		P+2 P-constructeur	S+2 S-de construction
M+1 M –didactique	E+1 E-réflexif	P+1 P-projeteur	S+1 S de projet
M0 *M d'apprentissage*	*E0* *Elève*	*P0* *Professeur*	*S0* *S-didactique*
M-1 M de référence	E-1 E-apprenant	P-1 P-observateur	S-1 S-d'apprentissage
M-2 M – objectif	E-2 E-agissant		S-2 S de référence
M-3 M - matériel	E-3 E-objectif		S-3 S-objective

Actes de l'U.E. de la Rochelle « Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques - juillet 1998.

ANALYSE D'UN PROBLÈME DE FONCTIONS EN TERMES DE MILIEU. STRUCTURATION DU MILIEU POUR L'ÉLÈVE ET POUR LE MAÎTRE.

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, équipe DIDIREM, Université Paris 7
et IUFM Nord-Pas-deCalais, Université d'Artois

J'ai choisi d'illustrer l'analyse des situations en termes de milieu à partir d'un exemple : un problème posé en classe de seconde et mettant en jeu les fonctions. Il est extrait d'un DEA soutenu en 1996 à Paris 7 par Didier Pihoué et dirigé par M. Artigue. Les analyses a priori et a posteriori de Pihoué mettent en avant un point de vue épistémologique et sont centrées sur les notions de cadres, de registres et de ce qu'il appelle « différents modes de pensée ». Je vais essayer, à partir des extraits qu'il nous donne de faire une analyse a priori de la situation et une analyse des résolutions de deux groupes d'élèves en utilisant la théorie des situations et la notion de milieu. Il s'agit ici d'utiliser la théorie pour un problème assez complexe et très ouvert : aucune démarche n'est suggérée, ce qui fait que les élèves sont obligés pour résoudre le problème posé de le transformer et de se poser de nouvelles questions, d'identifier de nouveaux problèmes abordables avec les outils dont ils disposent. L'analyse a priori du travail de l'élève et de l'enseignant a été exposé dans l'atelier ; l'analyse a posteriori du travail des groupes faisait l'objet du T.D. Le choix d'un travail déjà rédigé nous met dans des conditions un peu particulières qui risquent d'amener quelques limitations dans les analyses a posteriori que nous pourrons mener :

- un choix a déjà été fait au niveau de l'information et nous ne disposons que de ce qui est écrit, notamment en ce qui concerne l'organisation de la classe et le travail des élèves : nous devrons nous contenter des extraits d'enregistrements fournis et d'éventuels compléments d'information apportés dans les commentaires. Cependant une observation très précise avait été prévue (un observateur par groupe d'élèves, avec une grille fournie, et enregistrement audio du travail de chaque groupe)

- l'auteur de la recherche est en même temps l'enseignant de la classe. Il n'y a pas d'analyse du rôle de l'enseignant dans le travail mais les raisons des choix de la séquence et son organisation sont très explicites. En revanche les observations rapportées se limitent à la résolution du problème par les élèves. Le professeur n'intervient donc que dans cette phase. Il nous manque donc toute la mise en commun et l'institutionnalisation.

1. QUELQUES PRECISIONS CONCERNANT L'UTILISATION QUE NOUS ALLONS FAIRE DE LA NOTION DE MILIEU ET QUELQUES QUESTIONS.

1.1. Milieux emboités. Analyse ascendante et analyse descendante

La notion de milieu a été introduite par G. Brousseau dans sa modélisation des situations didactiques comme système antagoniste du sujet. Il a développé à l'école d'été de 1986 un modèle de structuration du milieu, qu'il a repris et précisé à l'école d'été de 1989 (RDM 9/3). Ce modèle a été retravaillé et légèrement modifié par C. Margolinas (Débats). Il s'agit là d'une structuration que j'appellerai verticale du milieu qui permet une analyse en termes de situations emboîtées et de milieux emboîtés, où par exemple la situation adidactique correspond à un certain niveau : elle est contenue dans une situation didactique et contient une situation de référence qui contient elle-même une situation objective. C. Margolinas a surtout élargi le modèle dans les niveaux qu'elle appelle "surdidactiques", pour mieux prendre en compte le rôle du maître, introduisant ce qu'elle appelle situation de construction et situation noosphérienne. Elle a aussi introduit une position du maître dans la situation adidactique et changé la numérotation de Brousseau. J'utiliserai cette numérotation qui me paraît plus facile à mémoriser, en gardant la terminologie de Brousseau. En même temps, C. Margolinas propose deux analyses :

- l'analyse ascendante part de la situation objective et aboutit à la situation de projet, elle permet surtout d'appréhender le point de vue de l'élève

- l'analyse descendante part de la situation noosphérienne et aboutit à la situation d'apprentissage adidactique, elle permet surtout d'appréhender le point de vue du professeur.

Dans la première présentation de ce modèle (séminaire de Grenoble, 1993), C. Margolinas constate, sur l'exemple choisi, un certain décalage entre l'analyse descendante et l'analyse ascendante à propos des connaissances relevées à chaque niveau. Nous reviendrons sur ce décalage dans l'exemple choisi. Pour ma part, il me semble que, pour faire l'analyse du rôle du maître préparant son cours, il faut envisager à chaque niveau un autre milieu. Le maître interagit avec deux milieux : celui qui correspond aux situations de niveaux supérieurs jusqu'au niveau noosphérien éventuellement et celui qui correspond aux situations de niveaux inférieurs qui sont anticipées. Nous reviendrons sur ce point à propos de l'exemple choisi.

Les conditions particulières liées au choix des données font que nous pourrons mener une analyse a priori ascendante à peu près complète mais que nous ne pourrons mener l'analyse a posteriori que jusqu'à la situation d'apprentissage adidactique, nous centrant sur le travail des élèves en phase de résolution. Pour l'analyse descendante, nous disposons de beaucoup d'informations sur les intentions de l'enseignant ; la situation noosphérienne est particulièrement développée puisqu'il s'agit d'un DEA. Je montrerai à son propos ce qui m'amène à repenser le milieu du maître.

1.2. Milieu en théorie des situations et milieu dans l'approche anthropologique

Chevallard (1989) définit ainsi le milieu : "Au cours de l'évolution temporelle de l'institution (...) des sous-systèmes du système général des objets institutionnels vont se stabiliser durablement, en ce sens que les rapports institutionnels à ces objets vont, sur une période assez longue, cesser d'évoluer, se révéler 'robustes' face aux perturbations extérieures et se 'naturaliser' en devenant transparents aux acteurs de l'institution. (...) De tels sous-systèmes d'objets vont assumer, pour les acteurs de l'institution, une fonction de milieu, celui-ci apparaissant doué d'une objectivité échappant au contrôle et à l'intentionnalité de l'institution : on pourra dire alors que le milieu est 'a-institutionnel'. Le 'jeu' de l'acteur avec ces objets lui apparaîtra alors comme un jeu à un joueur, un jeu 'contre la nature', dépendant uniquement des propriétés intrinsèques de la 'nature' et de ses propres choix (et non de telle ou telle convention particulière à propos de la nature).

Dans un texte postérieur (Chevallard, 1992, p. 93-94)), il apporte quelques précisions : "Pour qu'un système didactique (SD) fonctionne, il faut que se crée un contrat didactique. Mais, pour qu'un tel contrat se crée, il lui faut un point de départ assuré. (...) pour qu'un SD fonctionne, il faut qu'à chaque instant – par rapport au temps propre du SD comme institution – il existe un ensemble d'objets institutionnels qui, pour les sujets du SD, *aillent de soi.* Des objets O, donc, tels que les rapports institutionnels $R_I(p, O)$ (où $p = e, E$) soient *localement stables*. En d'autres termes, il faut minimalement *qu'il existe un milieu.* (...) Bien entendu le fonctionnement d'un système didactique fait bouger le milieu ... Certains des éléments du milieu vont être déstabilisés et cesseront momentanément d'appartenir au milieu, avant de s'y restabiliser ensuite, dans une organisation économiquement et écologiquemqnt différente. (...) A chaque instant le milieu apparaît subjectivement comme un donné ; mais c'est en vérité un *construit permanent."*

La notion de milieu n'est donc pas liée chez Chevallard à celle de situation. De plus le milieu est composé d'objets institutionnels pour lesquels il existe un rapport stable, notamment des objets de savoir. La théorie des situations a été construite au départ pour analyser des situations de l'école élémentaire, ce qui a eu une influence sur le vocabulaire utilisé pour désigner les différents niveaux de situation et de milieu. Ainsi, dans les situations utilisées à l'école primaire, le milieu de la situation objective est en effet souvent matériel ou presque. Ce n'est plus le cas quand on s'intéresse à des situations s'adressant à des élèves de lycée.

Dans ce cas, le milieu matériel est surtout constitué de savoirs antérieurs qui doivent être aussi des "connaissances disponibles" (Robert) pour fournir des rétroactions suffisantes aux actions du sujet dans la situation de référence de façon à permettre l'apprentissage dans la situation adidactique. Pour jouer le rôle de milieu, ces connaissances disponibles doivent apparaître extérieures à l'élève, c'est pourquoi, au moins pour assurer la dévolution du problème, il ne peut s'agir que de savoirs "naturalisés". Ainsi, le milieu matériel de la situation objective doit contenir les savoirs nécessaires à la compréhension du problème, il est donc contenu dans le milieu au sens de Chevallard. De même les connaissances que l'élève doit mettre en jeu dans la situation de référence pour agir sur le milieu constitué par la situation objective sont nécessairement des connaissances disponibles nécessaires à la dévolution du problème, elles correspondent à des rapports stables à des objets qui doivent faire partie du milieu au sens de Chevallard. C'est la réflexion sur ces actions, au cours de la situation adidactique d'apprentissage, qui va mettre en jeu des connaissances qui, elles, ne sont plus disponibles mais objet de l'apprentissage. Dans le milieu de la théorie des situations, on n'aura qu'une partie des objets de savoir naturalisés, ceux qui sont représentatifs de la connaissance visée, ceux qui vont être susceptibles de fournir des rétroactions aux actions du sujet. Dans le cas d'un problème complexe, pour mieux analyser ce qui se joue pour l'élève, j'éprouve le besoin de découper le problème en plusieurs situations au sens de la théorie des situations, situations qui peuvent être traitées successivement par les élèves. Dans ce cas, les connaissances et résultats issus d'une situation antérieure interviennent dans le milieu des situations suivantes, même si ce ne sont pas des rapports stabilisés à un objet de savoir. C'est ce que je vais développer sur l'exemple choisi.

1.3. Analyse a posteriori. Structuration horizontale du milieu. Milieu potentiel et milieu effectif ou activé.

Pour faciliter l'analyse de ce qui se passe dans des situations assez complexes et mettant en jeu beaucoup de connaissances mathématiques antérieures, pour permettre une analyse a priori différenciée suivant des types d'élèves et pour l'analyse a posteriori, je distingue dans le milieu trois composantes qui peuvent intervenir du milieu matériel au milieu didactique:

- la composante matérielle est constituée de données objectives, matérielles ou non, y compris des instruments,

- la composante cognitive est constituée de savoirs, de connaissances disponibles nécessaires pour mettre en place un mode de résolution. Ce sont forcément des connaissances institutionnalisées.

- la composante sociale est constituée des autres acteurs qui peuvent intervenir dans la résolution : partenaires, autres élèves, professeur. En principe, elle n'intervient qu'à partir du milieu didactique. Une intervention de cette composante peut amener un changement dans le milieu cognitif des niveaux inférieurs donc le passage d'une situation à une autre. En réalité cette troisième composante peut se ramener à la seconde : l'existence d'un partenaire dans une situation pouvant se ramener à des connaissances ou des savoirs.

Ces composantes ne sont pas indépendantes. Une modification de l'une d'entre elles entraîne en général une modification des autres. Par exemple, dans une construction géométrique, si l'on modifie les instruments disponibles, on modifie par là même les connaissances à mettre dans le mileu matériel.

En principe, la composante sociale n'intervient qu'à partir du niveau didactique quand il s'agit du maître. Une intervention du maître peut être interprétée comme un changement dans la composante cognitive du milieu matériel (données objectives indépendantes de l'élève) et va donc changer la situation adidactique.

Bien sûr, il ne faut pas perdre de vue que d'autres connaissances interviennent dans une situation et qui ne font pas partie du milieu matériel : celles qui vont être en jeu dans la situation et éventuellement produites par la situation. Elles pourront éventuellement faire partie de milieux de niveaux supérieurs.

Pour l'analyse a posteriori, il me faut encore distinguer la composante cognitive potentielle et la composante cognitive activée. C'est ce qui me permettra d'expliquer d'une part que les élèves ne sont pas tous dans la même situation adidactique, d'autre part comment un élève peut passer d'une situation adidactique à une autre en cours de résolution d'un problème.

Le milieu cognitif potentiel est constitué des connaissances disponibles (au sens d'Aline Robert) et bien rodées de l'élève : celles qu'il est capable de mobiliser tout seul, des savoirs anciens, naturalisés (Chevallard). Il comprend aussi les conceptions relatives aux objets du milieu matériel. Le milieu cognitif activé est la partie du milieu cognitif potentiel qui est effectivement activée dans la situation adidactique. Ne fait partie de la composante cognitive du milieu matériel et du milieu de référence que le milieu cognitif activé. Ceci explique que des élèves différents puissent être dans des situations différentes à propos du même problème.

La composante matérielle du milieu matériel est fixée et c'est a priori la même pour tous les élèves. Du moins c'est le cas dans la situation qui nous occupe. Ce n'est peut-être pas vrai en général. Je crois que L. Coulange et A. Bessot nous présentent un exemple où il y a des différences dès ce niveau. Le milieu cognitif potentiel est déterminé par les analyses préalables, les informations concernant l'environnement des élèves. On peut prévoir un milieu cognitif potentiel maximal (les savoirs et connaissances utiles pour la résolution qu'on peut au mieux espérer au niveau où on propose la situation) qui vont déterminer les procédures attendues, et des variations suivant les groupes d'élèves, certains savoirs et certaines connaissances n'étant disponibles dans le milieu potentiel que pour une partie des élèves.
Le milieu cognitif d'une situation peut faire intervenir plusieurs cadres et plusieurs registres de représentation dans lesquels s'exprimeront les connaissances relevant de chacun des cadres en jeu et qui permettront les différents traitements que mettra en jeu la résolution.
Une intervention du maître peut ainsi injecter une connaissance dans le milieu objectif et modifier par là même la situation objective et donc la situation d'apprentissage : la connaissance fournie n'est plus objet d'apprentissage dans la situation d'apprentissage. Une intervention d'un autre élève non reprise par le maître ne fait pas forcément passer la connaissance concernée dans le milieu matériel : c'est quelque chose qui demande examen et ne peut être considéré comme une donnée.

2 . LE PROBLEME DE L'ABREUVOIR.

2.1. Informations sur le contexte.

Le problème se trouve en annexe (cf. p.32). Il a été proposé en mai 1996 à des élèves de seconde qui ont traité la partie "fonctions" du programme. Ils ont rencontré des problèmes modélisés par des fonctions, problèmes posés dans des contextes mathématiques ou non, ils ont étudié les fonctions usuelles et leurs variations mais ont fait peu d'exercices sur des études de variations. Ils ont l'habitude de travailler en groupes et de rencontrer des problèmes assez ouverts.
Dans cette séquence les élèves travaillent par groupes de 3 ou 4. Ils doivent rédiger un compte-rendu commun et remettre leurs brouillons (pour les besoins de l'expérimentation). Cette dernière demande est exceptionnelle ainsi que la présence d'un observateur par groupe. Ces deux conditions sont liées à la situation expérimentale.

2.2. Analyse mathématique du problème

Pour être traité, le problème qui est posé ici nécessite de formuler plusieurs questions intermédiaires. Plusieurs voies sont possibles. Nous allons d'abord identifier un certain nombre de problèmes pouvant intervenir dans la résolution du problème Q posé :
Q : graduation de la jauge
Q_0 : calcul du volume total de l'abreuvoir
Q_1 : calcul du volume de l'abreuvoir pour une hauteur donnée

Q'_1 : expression du volume de l'abreuvoir en fonction de la hauteur
Q_2 : calcul de la grande base du trapèze pour une hauteur donnée
Q'_2 : expression de la grande base du trapèze en fonction de la hauteur
Q_3 : calcul de la hauteur pour un volume donné
Q'_3 : expression de la hauteur d'eau en fonction du volume rempli
Les problèmes Q_i et Q'_i se distinguent par les cadres dans lesquels ils se posent et se résolvent: cadre numérique pour les problèmes Q_i pour lesquels nous avons utilisé le mot "calcul", cadre algébrique pour les problèmes Q'_i pour lesquels nous avons utilisé le mot "expression".

Une solution experte consisterait à mobiliser le cadre des fonctions pour déterminer la grande base du trapèze en fonction de la hauteur ($L = 6+0,5h$), puis exprimer le volume d'eau en fonction de la hauteur ($V = 10\ h^2+240\ h$), et enfin chercher la fonction réciproque en résolvant une équation du second degré avec paramètre. Si on ne peut pas résoudre une équation du second degré avec paramètre, on peut résoudre graphiquement ou algébriquement 11 équations du second degré à une inconnue. Dans le premier cas, cela suppose de mobiliser le sous-cadre fonctionnel du cadre algébrique et d'articuler dans ce cadre les registres graphique et algébrique. Dans le second cas, on mobilise le sous-cadre de la résolution des équations et le registre algébrique. Pour l'expression de la grande base en fonction de la hauteur, on peut rester dans le cadre algébrique : reconnaître une fonction linéaire et chercher son expression, ou passer dans le cadre géométrique et utiliser le théorème de Thalès. Dans ce cas, les élèves ne disposant que du théorème de Thalès dans le triangle, ils auront à chercher un triangle convenable. Plusieurs solutions sont possibles.

Ce problème peut aussi être résolu par approximations dans le cadre numérique en s'appuyant sur le fait que le volume d'eau est une fonction croissante de la hauteur, ce qui est une connaissance du milieu matériel. Cela demande autant de résolution que de volumes choisis (donc 11). Il est envisageable de rester entièrement dans le cadre numérique pour un volume fixé, mais si on doit le faire 11 fois de suite, il est fort probable que cela incite l'élève à passer au cadre algébrique.

Une solution incorrecte permet de rester dans le cadre numérique : celle qui consiste à identifier croissance et proportionnalité et à considérer que la hauteur d'eau est proportionnelle au volume : à partir du volume total on détermine ainsi toutes les hauteurs par une technique de quatrième proportionnelle.

3 . ANALYSE A PRIORI ASCENDANTE OU ANALYSE DU TRAVAIL DE L'ELEVE.

Nous allons maintenant faire l'analyse a priori du problème Q posé en identifiant différents chemins que peuvent prendre les élèves et en faisant l'analyse a priori de toutes les situations rencontrées. En même temps nous aborderons le rôle du maître pendant la phase de recherche des élèves.

3.1. Le problème initial Q : fabriquer une jauge

3. 1.1. Situation objective. Niveau -3.
- Milieu matériel :

. composante matérielle : abreuvoir évoqué, jauge évoquée, abreuvoir qui se remplit (évoqué), quantité d'eau. C'est le même pour tout le monde

. composante cognitive : "La quantité d'eau dans l'abreuvoir augmente avec la hauteur. Une jauge est graduée, il faut définir les graduations". Il faut ajouter les connaissances permettant de reconnaître un prisme, un trapèze. Dans la mesure où les mots sont écrits dans le texte et où les dessins sont fournis, on peut mettre ces connaissances dans le milieu matériel. Il faut ajouter les formules permettant de calculer l'aire d'un trapèze et le volume d'un prisme, si elles ont été rappelées par le professeur ou fournies dès que nécessaires.

- E-3 imagine l'abreuvoir qui se remplit et constate que le volume d'eau augmente en même temps que la hauteur d'eau jusqu'à une valeur maximale correspondant à l'abreuvoir plein. Il imagine une jauge, c'est-à-dire une graduation.
Ainsi décrite, on peut penser que la situation objective est la même pour tous les élèves. Il regarde les dessins fournis, reconnaît le trapèze et le prisme comme des modèles de l'abreuvoir. On pourrait déjà faire diverger à ce niveau entre ceux pour qui graduation est synonyme de graduation régulière et les autres.
A ce niveau, l'élève ne peut pas répondre au problème posé. Il va devoir prendre des décisions d'action qui vont être des calculs de volumes ou de hauteurs.

3.1.2. Milieu potentiel pour les situations de référence : connaissances disponibles pour l'action sur la situation objective.

Pour calculer des volumes à l'aide des formules, il faut une articulation dans le cadre géométrique du registre des figures, du langage naturel et du registre des formules (il faut par exemple savoir reconnaître que ce qui joue le rôle de la hauteur du prisme c'est la longueur de l'abreuvoir), connaître les unités légales de longueur, aire et volume, les conversions de ces unités, au moins entre m et dm, entre litres et dm^3.
Il se peut que certaines de ces connaissances ne soient pas disponibles pour tous les élèves. On peut attendre des difficultés au niveau de l'articulation entre les figures, le langage et les formules (en particulier à propos des bases et des hauteurs qui prennent des sens différents pour l'abreuvoir, pour le prisme et pour le trapèze).

Il faudrait aussi mettre dans le milieu cognitif potentiel des connaissances sur la proportionnalité, les techniques de calcul des quatrièmes proportionnelles notamment, les fonctions linéaires ou affines, des connaissances de calcul algébrique, notamment concernant la substitution, le tracé point par point d'une fonction à partir de son expression algébrique, la résolution graphique d'équations du type $f(x) = k$, et aussi la mise sous forme canonique des équations du second degré. Ces connaissances font partie du milieu cognitif potentiel mais ne peuvent être supposées activées pour tous les élèves. Leur présence effective ou non va amener à des situations différentes. Nous pouvons prévoir qu'il y aura plusieurs situations possibles à partir du niveau de la situation de référence.

En revanche, nous ne pouvons pas mettre dans le milieu cognitif potentiel de connaissances concernant la fonction comme objet, comme la recherche de la réciproque d'une fonction bijective qui permettrait d'aboutir à la solution experte. Le cadre fonctionnel est absent des savoirs des élèves à ce niveau.

3.1.3. Situations de référence possibles.

La traduction mathématique du problème revient au calcul de la hauteur d'eau pour un volume donné (Q_3). La situation de référence la plus accessible est celle du volume de l'abreuvoir pour une hauteur donnée (Q_1). Le seul calcul pour lequel l'élève dispose de toutes les données est celui du volume total de l'abreuvoir (Q_0). On peut l'attendre même s'il n'apporte pas clairement une avancée vers la solution parce que cela fournit un moyen de validation par la suite. En réfléchissant sur les actions possibles, sauf s'il utilise la proportionnalité, l'élève s'aperçoit qu'on ne peut pas répondre directement au problème, rien ne permettant de trouver directement la hauteur d'eau pour un volume donné (Q_3). Il va donc se poser une nouvelle question, identifier un nouveau problème qui peut être Q'_3 ou Q'_1. Il peut aussi mettre en œuvre Q_1 pour commencer une procédure d'approximations dans le cadre numérique. La répétition de Q_1 devrait amener à soulever les problèmes Q'_1 et Q'_3. Que l'on parte de Q_1 ou de Q_3, je situe l'identification des nouveaux problèmes au niveau de l'apprentissage par rapport au problème posé (réflexion sur l'action). En revanche si l'élève applique la proportionnalité, il calcule le volume total (niveau -2) puis applique une technique de calcul de 4ème proportionnelle (niveau -2) ; il n'y a pas de situation d'apprentissage : l'élève met en jeu deux actions qui lui permettront de donner une réponse. Il va passer directement en S_0 sans se mettre en position -1 sauf s'il décide de vérifier la réponse en calculant le volume correspondant à la hauteur trouvée. Le milieu ne peut pas apporter de feed-back puisqu'aucune vérification n'est demandée, ni le calcul pour des valeurs aisément vérifiables comme pour la hauteur moitié. Une intervention du maître est indispensable dans ce cas. Le calcul du volume pour une hauteur donnée (de niveau -2) pourrait servir de feed back mais ce n'est pas automatique.

Nous allons maintenant examiner les problèmes Q_0, Q_1, Q_3 et Q'_3 qui sont les premières traductions mathématiques du problème qu'on peut attendre.

3.2. Problème Q_0 : calcul du volume total.

- La situation objective (niveau -3) est la même que précédemment sauf qu'on ne considère que l'abreuvoir plein et non en train de se remplir.

- La situation de référence (niveau -2) consiste à calculer le volume en appliquant la formule. Les connaissances à mobiliser dans le milieu potentiel concernent surtout l'articulation entre langage, dessin et formule pour reconnaître les éléments pertinents : la base du prisme est le trapèze qui est une face de l'abreuvoir, sa hauteur est la longueur de l'abreuvoir, la hauteur du trapèze est en revanche la hauteur de l'abreuvoir. Les autres connaissances concernent les unités légales et les conversions.

Cette situation est entièrement au niveau de l'action (-2). Il n'y a pas de situation d'apprentissage. La situation objective peut amener un feed-back en termes d'ordres de grandeur et permettre éventuellement de déceler un défaut dans les conversions d'unité. Cependant, dans la mesure où l'abreuvoir n'est qu'évoqué, la validation complète ne peut venir que du maître ou d'un autre élève, au niveau didactique (0).

3.3. Problème Q_1 : calcul du volume pour une hauteur donnée

Le milieu matériel est le même ainsi que la situation objective. La situation de référence (niveau -2) est celle d'un calcul de volume. Elle bloque puisqu'on ne connaît pas la grande base du trapèze quand la hauteur n'est pas maximum. La réflexion sur la possibilité de cette action amène à identifier le problème Q_2 de calcul de la grande base du trapèze pour cette hauteur. Nous plaçons l'identification de ce problème au niveau -1. En revanche il se peut que l'élève ne se rende pas compte du blocage de la situation d'action et considère que la grande base du trapèze vaut 8. Dans ce cas, il obtient les mêmes résultats qu'avec la proportionnalité et la situation objective ne lui apporte aucun feed-back. Là aussi une intervention du maître est nécessaire.

3.4. Problème Q_3 : calcul de la hauteur pour un volume donné

Le milieu matériel et la situation objective sont inchangés.

La situation de référence correspondante qui serait la résolution d'une équation à une inconnue bloque parce qu'on ne connaît pas la grande base du trapèze. La réflexion sur l'impossibilité de cette action amène à identifier le problème Q_2 ou plutôt Q'_2 puisque la hauteur est inconnue : exprimer la grande base en fonction de la hauteur ou à passer à la résolution des systèmes de deux équations à deux inconnues et dans ce cas à chercher une autre équation (SE). Ces nouvelles questions peuvent être considérées comme de niveau -1 puisqu'elles sont formulées à partir d'une réflexion sur l'action envisagée. Dans le cas où l'élève ne se rend pas compte du blocage et prend 8 comme grande base, nous sommes dans le même cas que ci-dessus : une intervention du maître est nécessaire.

Nous avons ici examiné le problème Q_3 dans le cas où il est posé en premier. Il n'en est pas de même si l'élève le considère à un moment où il a déjà traité certains des autres problèmes. Nous y reviendrons.

3.5. Problème Q_2 : calcul de la grande base pour une hauteur donnée

La situation objective est une partie de la situation objective initiale : celle qui concerne le trapèze. Au niveau de l'action (-2), l'élève peut soit utiliser un dessin à l'échelle et mesurer soit utiliser la proportionnalité directement (technique de calcul de quatrième proportionnelle) ou via le théorème de Thalès, ce qui demande d'identifier un triangle où on peut l'appliquer (situation que nous pouvons placer au niveau -1 de réflexion sur l'action). Dans le cas où il fait un dessin à l'échelle, il reste au niveau de l'action.

Si l'élève a traité le problème Q_2 parce qu'il l'a rencontré à partir de Q_1 il pourra continuer Q_1 et la répéter plusieurs fois sans que ce soit trop coûteux. Il n'est pas obligé de passer au cadre algébrique puisqu'un seul dessin à l'échelle permet de mesurer toutes les grandes bases possibles. La remise en cause de cette procédure ne pourrait venir que d'un souci de précision. Dans la mesure où il faut réaliser une jauge à l'échelle 1/2 donc avec une précision limitée, il est possible que les élèves considèrent que la précision obtenue à partir de leur dessin est suffisante.

3.6. Problème Q'_2 : calcul de la grande base en fonction de la hauteur

Le milieu matériel est le même que pour Q_2. Les connaissances à mettre en œuvre pour l'action sont presque les mêmes aussi, sauf qu'il faut ajouter le calcul algébrique et que l'utilisation des techniques de quatrième proportionnelle ou du théorème de Thalès doivent se faire avec une variable. Le dessin à l'échelle ne permet plus de résoudre.
L'élève peut se placer dans le cadre de l'étude des fonctions affines étudiées en 3ème et dans le contrat de l'expression d'une variable en fonction d'une autre, qui a été réactivé tout au long de l'année de seconde. Pour cela il peut chercher directement une fonction linéaire à partir des valeurs numériques en faisant l'hypothèse d'une variation proportionnelle ou chercher à appliquer le théorème de Thalès. Dans tous les cas, il utilise ensuite du calcul algébrique pour exprimer L en fonction de h.

En principe la situation de référence permet tout de suite de donner une réponse, sans passer par le niveau -1 sauf dans le cas de l'utilisation du théorème de Thalès où se pose le problème de la recherche d'un triangle convenable. Nous laissons au lecteur l'étude de cette situation qui amènerait encore à identifier des connaissances concernant l'articulation du registre des figures et du registre de la langue naturelle.

3.7. Problème Q_3-SE: recherche et résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

La situation objective est celle du problème initial. Pour l'action, l'élève se place dans le cadre de la résolution des systèmes, en faisant appel au contrat de la résolution des systèmes linéaires (qu'il faut prolonger ici) et cherche une deuxième équation, par exemple volume plein + volume vide = volume total (comme le fera un des groupes), ou identifie le problème Q'_2 et cherche à exprimer une inconnue en fonction de l'autre.
La résolution du système amène à la résolution d'une équation du second degré à une inconnue, ce que les élèves peuvent faire par la mise sous forme canonique. Les connaissances nécessaires ne peuvent pas être supposées stables chez tous les élèves de ce niveau. Il peut se produire un blocage et dans ce cas bifurcation vers Q'_1 et résolution graphique ou résolution numérique par approximations puisque Q_1 peut maintenant être résolu de nombreuses fois de façon économique : on peut même programmer la calculatrice. Cette bifurcation se situe au niveau -1.

Dans le cas où la résolution des équations du second degré par mise sous forme canonique est disponible, la résolution d'une telle équation se situe au niveau -2 mais, pour résoudre le problème Q, il faudra reproduire 11 fois cette action, ce qui devrait amener une réflexion pour trouver une procédure économique : repérer ce qui change et ce qui ne change pas quand on passe d'une équation à une autre, et peut-être passer à Q'_3. L'élève peut identifier les invariants dans sa résolution et proposer une formule générale donnant h en fonction de V, ou au moins pour des volumes multiples de 100.

3.8. Problème Q'_1 : calcul du volume en fonction de la hauteur

L'élève se place dans le cadre algébrique et veut calculer le volume en fonction de la hauteur, ce qui l'amène à calculer l'aire du trapèze. Là un autre problème se pose : on ne connaît pas la grande base. C'est l'identification du problème Q'_2. Après résolution de ce problème, l'élève peut rester au niveau de la situation de référence et utiliser ses connaissances algébriques disponibles pour substituer à L puis à B sa valeur en fonction de h, pour exprimer V.

3.9. Retour au problème Q_3

Supposons qu'on ait obtenu une expression de V en fonction de h. Le retour au problème de départ amène à déterminer la hauteur pour un volume donné (Q_3). L'expression de la fonction inverse n'étant pas dans le milieu potentiel, on se ramène comme ci-dessus à la

résolution d'une équation du second degré (ou plutôt de 11 équations de ce type). Pour ce problème, on a alors 3 situations de référence possibles suivant que les connaissances correspondantes peuvent ou non être convoquées et donc figurent ou non dans le milieu cognitif activé :
- résolution algébrique par mise sous forme canonique
- résolution numérique par approximations
- tracé du graphe de la fonction et recherche graphique de 11 antécédents.

Il resterait à analyser le problème de résolution graphique lui-même, ce que nous laissons à la charge du lecteur.

3. 10. Bilan sur le problème initial

Nous allons ici reprendre les quatre grandes voies de résolution possibles en indiquant les sous-problèmes identifiés et les cadres mobilisés (milieu activé) dans le milieu potentiel.

voie 1	voie 2	voie 3	voie 4
cadre numérique	cadre numérique	cadre algébrique résolution d'équations	cadre algébrique fonctions
Problème Q3 niveau -2 Calcul du volume total (Q0) et proportionnalité Pas de niveau -1 réponse directe Nécessité d'une intervention de l'enseignant pour poser Q1 et amener à l'identification de Q2	Problème Q1 niveau -2 : action 'calcul du volume' impossible (si calcul avec L = 8, intervention de l'enseignant nécessaire) niveau -1 : identification de Q2 niveau -2 pour Q2 : voie 2.1 dessin à l'échelle voie 2.2 proportionnalité itération du problème pour une procédure d'approximations : * possible en restant au niveau -2 dans la voie 2.1 * débouche sur Q'2 dans la voie 2.2. (voir voie 4)	Problème Q3 niveau -2 résolution d'une équation pour chercher h niveau -1 : il y a une autre inconnue voie 3.1. identification de Q'2 (voir voie 4) voie 3.2. recherche d'une autre équation niveau -2 : résolution du système par substitution et résolution de l'équation du second degré par mise sous forme canonique répétition du problème niveau -1 : recherche d'une économie, recherche des invariants de la résolution de façon à ne changer que ce qui est nécessaire	Problème Q'1 niveau -2 : reconnaissance de la variable h et de la fonction V mais blocage : on a deux inconnues niveau -1 : identification de Q'2 niveau -2 voie 4a.1 reconnaissance d'une fonction linéaire ou d'une fonction affine voie 4a.2 appel au théorème de Thalès niveau -1 : recherche d'un triangle pertinent puis retour à Q'1 : niveau -2 : substitution retour à Q3 voie 4b.1 : résolution numérique niveau -2 : Q1 niveau -1 : utilisation de la variation pour choix des valeurs voie 4b.2 : résolution algébrique de 11 équations : voir voie 3 voie 4b.3 : résolution graphique niveau -1 : choix de l'échelle niveau -2 : tracé du graphique et lecture

Ici une partie de l'apprentissage consiste dans tous les cas à identifier les problèmes successifs pour mettre en place la démarche de résolution. Dans chacune de ces situations de niveau -1, situations d'apprentissage, on doit pouvoir identifier la connaissance nouvelle qu'on apprend, qui est ici le plus souvent une connaissance de mise en relation de problèmes et de techniques. On pourrait qualifier ces connaissances de métamathématiques parce qu'elle portent sur des objets que Chevallard a qualifiés de para voire proto mathématiques. L'analyse que nous avons faîte en découpant le problème en sous-problèmes considérés chacun comme une situation didactique conduit à introduire une certaine temporalité. On peut aussi considérer l'ensemble du problème comme une situation didactique. Dans ce cas, on a pour l'élève des aller-retour entre les niveaux -2 et -1 : l'élève met en service des savoirs déjà familiers.

La réflexion sur cette action et sur les rétroactions du milieu l'amène éventuellement à en convoquer d'autres qui vont le ramener un moment au niveau de l'action avant d'accéder à une nouvelle réflexion. A chaque instant l'élève en situation d'apprentissage peut se reporter à des niveaux inférieurs pour imaginer des actions et les rétroactions du milieu qu'elles provoqueraient. Les niveaux de milieu emboîtés ne sont donc pas des niveaux successifs.

Les interventions de l'enseignant nécessitées par l'insuffisance du milieu en cas d'utilisation de la proportionnalité nous paraissent en fait des actions de dévolution : le but n'est pas de travailler la proportionnalité mais la notion de fonction, l'enseignant doit donc intervenir pour que les élèves voient la nécessité de se placer dans le cadre algébrique. L'insuffisance du milieu pour rejeter la proportionnalité peut se justifier par le fait que ce n'est plus un enjeu d'enseignement. L'enseignant peut se réserver la possibilité de compléter le milieu pour les groupes d'élèves qui en auraient besoin.

L'analyse a priori ascendante devrait se poursuivre par l'analyse du niveau didactique : ce qu'il y a à retenir de cette situation et la gestion que peut en faire le maître. Nous n'aborderons pas ce niveau ici. Il le sera dans l'analyse descendante.

4 . ANALYSE A PRIORI DESCENDANTE OU ANALYSE DU ROLE DU PROFESSEUR.

Elle correspond à l'analyse du travail du professeur avant la séquence d'enseignement. Pour l'analyse dans ce sens, j'ai quelques difficultés à emboîter les milieux à la manière de C. Margolinas, et à voir Sn comme Mn+1. Il me semble que c'est insuffisant et qu'à chaque niveau le professeur interagit avec deux milieux : le milieu M'n = Sn-1 en effet qui correspond à la projection que peut faire le professeur de la situation en classe avec ses élèves et comprend d'ailleurs tous les niveaux inférieurs dans lesquels l'enseignant peut aussi se projeter, mais aussi un milieu M"n issu de Sn+1. Le professeur se projette dans l'action avec les élèves (milieu M'_n, une situation englobant tous les niveaux inférieurs : les couches de "l'oignon" sont translucides pour le professeur, comme le faisaient déjà remarquer C. Margolinas et D.Grenier) mais aussi se reporte à son projet d'enseignement et à ses expériences noosphériennes (milieu M''_n). Nous allons en discuter sur l'exemple.

Ici, nous sommes dans un cas très privilégié pour cette étude : puisqu'il s'agit d'un mémoire de DEA, les études préalables et les références sont nombreuses et très explicites, ce qui fait que la situation noosphérienne est très développée. De plus, nous sommes en situation d'analyse a priori : les niveaux supérieurs du milieu vont intervenir de façon plus explicite que les niveaux inférieurs qui seraient beaucoup plus présents dans une analyse a posteriori.

4.1. S3, situation noosphérienne

Le milieu M''_3 est constitué de tous les travaux didactiques auxquels l'auteur se réfère pour analyser l'enseignement des fonctions en seconde (Douady : DOO, Sfard : procedural/ structural, Dubinsky : processus/ objet, Chevallard : modélisation, Duval : registres de représentation sémiotique) ainsi que des programmes officiels et des manuels qu'il a analysés. La situation S3 consiste en l'analyse de ces divers documents pour en tirer des choix sur l'ensemble de son enseignement et des principes concernant l'enseignement des fonctions et la situation qui nous intéresse, c'est-à-dire ce qui constituera le milieu M''_2 de la situation de construction, en l'occurence :

- ce qu'il appelle les différents modes de pensée qui interviennent , qui sont en fait les cadres de résolution possibles avec les registres associés et leur articulation : mode de pensée arithmétique, mode de pensée algébrique, mode de pensée fonctionnel.
- ce qu'il appelle un problème fonctionnel, c'est-à-dire un problème posé dans un autre cadre que le cadre fonctionnel (aucune fonction n'est mentionnée), mais tel qu'une modélisation du problème conduit à introduire une fonction dont l'étude des propriétés permet de résoudre le problème.
- l'idée de faire intervenir la fonction comme outil de résolution de problèmes, comme processus, à travers différents registres de représentation qu'il s'agit d'articuler pour contribuer à faire émerger l'objet fonction.

- des programmes, il retient l'insistance sur l'apprentissage par résolution de problèmes, l'étude de situations complexes qui alimente le travail de recherche individuel ou en équipe, le fait que de nombreux travaux doivent faire intervenir simultanément diverses parties du programme, qu'il faut étudier des situations issues d'autres disciplines et consolider la pratique conjointe du calcul numérique et du calcul littéral en relation étroite avec l'étude des fonctions, exploiter des tracés graphiques...
Le milieu M''_2 est le produit de la situation S_3 et en garde la trace, c'est en cela qu'il la contient.
Mais dans la situation S_3, le professeur interagit aussi avec ce qu'il sait de sa propre classe et de la possibilité de faire tel ou tel choix sur la présentation des fonctions, c'est-à-dire avec la projection qu'il fait d'une telle réalisation dans sa classe, c'est-à-dire les situations S_2 possibles. Il a donc une position réflexive par rapport à toutes les S_2 possibles.

4.2 S2, situation de construction

Les conclusions de la situation noosphérienne vont servir de milieu à la situation de construction où P_2 va essayer de faire intervenir la fonction comme outil dans une suite de situations de modélisation et à travers différents registres de représentation. Il essaie donc de trouver des problèmes qui répondent à toutes les contraintes qu'il a définies dans la situation noosphérienne et qu'il pourra effectivement réaliser (projection en S_1 et niveaux inférieurs). Pour cela il consulte les manuels qu'il a analysés, choisit plusieurs problèmes dont celui du manuel Belin (voir annexe), dont il modifie éventuellement les textes en fonction de son milieu M_2 (M''_2 et M'_2 correspondant à la projection de P_2 vers les niveaux adidactiques). Ces choix vont constituer le milieu M''_1 de la situation de projet. Ici P_2 est réflexif d'une part par rapport à S_3 et aux choix qu'il y a faits et d'autre part par rapport à toutes les S_1 restant possibles avec ces choix.

4.3 S1, situation de projet

C'est dans la situation de projet qu'apparaît l'élève. En effet il ne connaîtra rien de tout le travail précédent du professeur et ne verra que le texte produit dans la situation précédente. En réalité, pour le professeur, l'élève est déjà présent dans la situation précédente à travers les conditions définies dans le milieu M_2 : hypothèses sur l'apprentissage (plutôt M''_2) et sur les connaissances disponibles des élèves (plutôt M'_2).

Dans la situation de projet S_1, P_1 choisit un problème, en écrit le texte et organise les interactions que les élèves auront avec ce texte. Il produit le texte du problème que nous avons analysé dans l'analyse ascendante. Il organise le travail en groupes à partir de la réalité concrète de sa classe, prévoit les différentes stratégies que peuvent utiliser les élèves, les erreurs qu'ils peuvent commettre et les difficultés qu'ils peuvent rencontrer, et les aides qu'il apportera éventuellement pendant la résolution sans nuire à l'apprentissage. Il détermine ce que seront les rôles de E_0 et P_0 : ce que E_0 va apprendre et ce que P_0 va institutionnaliser, au niveau du problème proprement dit et à un niveau plus général qui serait celui de l'élève E_1, réflexif par rapport à la situation S_0 : ici l'élève doit apprendre qu'on peut utiliser les fonctions avec leurs différents registres, notamment le graphique, comme outils pour modéliser des situations où on peut repérer des variations liées de deux quantités. Ici, il s'agira de voir que les variations du volume et de la hauteur d'eau sont liées de façon biunivoque et qu'on peut déterminer l'une à partir de l'autre. On peut représenter graphiquement la relation la plus facile à exprimer algébriquement et tirer du graphique des informations sur l'autre variation.

En fait ce type de connaissance, pour qu'il devienne un savoir de l'élève, demandera à être institutionnalisé à partir de plusieurs situations, c'est pourquoi dans les situations de rappel du 2ème type (Perrin-Glorian 1993), je disais qu'il faudrait imaginer un milieu qui contienne plusieurs situations adidactiques, en fait dans ce milieu on aura les connaissances produites dans plusieurs situations adidactiques, déjà institutionnalisées au niveau didactique correspondant et reprises avec les situations adidactiques qu'elles contiennent pour une institutionnalisation de niveau supérieur.
Le produit de S_1 est donc le milieu M''_0 du professeur dans la situation didactique S_0 : la situation prévue, en fait contient le niveau S_0 et le niveau S_{-1} : le professeur doit prévoir aussi

son rôle au moment de la résolution : ses interventions de niveau didactique mais aussi son rôle d'observateur pour jouer le rôle P_0 après la résolution.

On voit que pour le professeur, la position P_1 est vraiment cruciale puisqu'elle contient à la fois les niveaux inférieurs et les niveaux supérieurs : c'est ici que l'analyse ascendante et l'analyse descendante se rejoignent pour lui. En analyse a priori les niveaux inférieurs sont projetés, les supérieurs réalisés. En analyse a posteriori, les niveaux inférieurs sont réalisés, les niveaux supérieurs peuvent correspondre à une projection dans le futur : que va-t-il y modifier compte-tenu de ce qui s'est passé ?

4.4. S_0, situation didactique

Dans la situation S_0, P_0 gère la situation didactique, c'est-à-dire fait la dévolution du problème et institutionnalise les connaissances nouvelles. Il est attentif à ce qu'il a déterminé dans l'analyse a priori mais au moment de la réalisation, il devra aussi prendre en compte ce qu'auront fait les élèves dans la résolution, ce qui suppose, comme l'avait remarqué C. Margolinas qu'il soit présent comme observateur dans la situation d'apprentissage en position P_{-1}. Le milieu du professeur pour la situation didactique se dédouble de façon plus manifeste: il est constitué du milieu M''_0 déterminé par l'analyse descendante, c'est-à-dire issu de son projet a priori mais aussi du milieu ascendant M'_0, c'est-à-dire la situation d'apprentissage, non pas projetée mais vécue cette fois, qui est en revanche le seul milieu présent pour l'élève. Pour l'élève, il y a dans la situation didactique un autre élément dans le milieu, c'est le professeur lui-même et c'est à travers lui que l'élève a un accès aux constituants de l'analyse descendante.

4.5 S-1, situation d'apprentissage

Dans la situation d'apprentissage, le professeur a un rôle d'observateur. Là encore il a un double milieu. Au niveau P_1, il a prévu les situations de niveau négatif pour l'élève : il dispose de sa propre analyse a priori déterminée à travers l'analyse descendante, l'un des milieux est donc cette analyse a priori et ce qu'il projette au niveau didactique. L'autre milieu est constitué des situations S_{-2} qu'il identifie chez les élèves. Il pourra intervenir pour modifier le milieu des élèves et donc la situation dans laquelle ils se trouvent s'il considère qu'elle ne permettra aucun des apprentissages visés. Il se replace alors en position S_0 pour un travail de dévolution. Mais il observe aussi les situations S_{-1} et donc S_{-2} que rencontrent les élèves et intervient éventuellement pour constituer son deuxième milieu quand il sera à nouveau en position S_0 après la résolution, pour l'institutionnalisation.

5 . ANALYSE A PRIORI ASCENDANTE DU PROBLEME DU MANUEL.

Nous laissons à titre d'exercice l'analyse a priori ascendante du problème du manuel. Du fait de la présence de toutes les questions intermédiaires nécessaires, les élèves vont pouvoir se contenter de rester le plus souvent au niveau de l'action. Le seul endroit problématique concerne la construction (choix de l'échelle notamment) et l'utilisation du graphique (question c_α notamment). Cela est bien en accord avec les objectifs du programme d'utiliser les représentations graphiques de fonctions pour résoudre des problèmes et notamment des problèmes issus des autres disciplines.

6 . ANALYSE A POSTERIORI DU TRAVAIL DU GROUPE 1.

Il serait trop long de donner ici tous les extraits des travaux des élèves qui ont alimenté le travail du groupe. Nous nous contenterons d'esquisser les étapes du travail du groupe et de les relier à l'analyse a priori en la complétant éventuellement. Nous donnons dans l'annexe leur production finale.

Le groupe 1 est constitué de 3 filles et semble assez homogène : tous les élèves participent et il ne semble pas y avoir de leader.

Les élèves calculent d'abord le volume total de l'abreuvoir, ce qui prend une demi-heure. Les discussions sont motivées par la difficulté à articuler les trois registres : celui du langage naturel (base, hauteur, prisme, trapèze), celui des formules et celui des figures. La base de l'abreuvoir est un rectangle représenté par un parallélogramme alors que la base du prisme est un trapèze. De plus la hauteur de l'abreuvoir est celle du trapèze alors que la hauteur du prisme est la longueur de l'abreuvoir, c'est-à-dire la longueur de la base de l'abreuvoir. Le problème se règle par discussion entre les élèves : ici le travail en groupes enrichit le milieu et permet les rétroactions nécessaires, ce qu'un travail individuel n'aurait peut-être pas permis. Un autre problème se pose au niveau des conversions des mètres en décimètres, réglé par des considérations d'ordre de grandeur. Ici le milieu matériel semble jouer le rôle attendu.

Pour résoudre le problème posé, les élèves se placent dans le cadre numérique et divisent le volume total par 12 (nombre d'intervalles de la graduation). Elles trouvent 0,33. Le maître leur demande de vérifier que ça fait 100 l. Elles gardent 8 comme grande base mais comme le volume total est 1120 l et non 1200 l, elles ne trouvent pas 100 l, rejettent 0,33 et font un produit en croix ce qui leur donne 0,357. Le professeur intervient pour demander de vérifier si ça fait 100 l : elles refont le produit en croix, nouvelle intervention du professeur qui demande une vérification par une autre méthode. Elles font le calcul avec 8 pour grande base. Il faut une nouvelle intervention du professeur pour leur faire remarquer que la grande base n'est pas toujours 8. Elle échouent dans le calcul de la grande base et réalisent un dessin à l'échelle pour faire leur vérification et rejeter le modèle proportionnel. Ce faisant, elles ont identifié le problème Q'_2 et c'est à la résolution de ce problème qu'elles consacreront le reste de la séance. En fait elles restent dans le cadre numérique, reconnaissent la progression linéaire ("sur 4, ça va augmenter de 2", puis "ça augmente de 0,5 tous les cm" et "il y a une proportion") et c'est la réponse qu'elles produiront (voir annexe).

Nous voyons que ce groupe a eu un apprentissage sur la proportionnalité. Comme le milieu n'était pas organisé pour cela, l'intervention du maître a été nécessaire à plusieurs reprises. Ils ont appris à valider ou invalider des relations de proportionnalité. A aucun moment les élèves de ce groupe ne travaillent vraiment dans le cadre algébrique même s'ils utilisent x et y dans leur rédaction finale. Ils ont identifié deux variables dépendantes mais le traitement de cette dépendance se fait au niveau numérique. On n'arrive pas à l'expression générale de y en fonction de x. Le milieu activé est celui du calcul numérique avec les techniques de calcul d'une quatrième proportionnelle et ce qui concerne les mesures et les calculs de volume.

7 . ANALYSE A POSTERIORI DU TRAVAIL DE LUDOVIC DANS LE GROUPE 4.

Le groupe 4 est composé de deux garçons et deux filles. Ludovic joue un rôle de leader. Dans un premier temps les filles ont calculé le volume total et les garçons cherchent une équation permettant de trouver h connaissant V. Ludovic détecte l'erreur de conversion des filles par un argument d'ordre de grandeur. Il expose ensuite le problème algébrique : "il y a deux inconnues" (la hauteur d'eau et la grande base du trapèze) "et même trois avec le volume!". La connaissance du volume total leur permet de trouver une deuxième relation : "volume plein + volume vide = volume total". Ludovic expose à ses partenaires admiratifs comment il a calculé le volume plein avec x et h puis le volume vide avec x et 4 - h et qu'il n'y a plus qu'à utiliser la relation précédente pour trouver la deuxième équation qui se ramène en fait à exprimer x en fonction de h (voir production finale du groupe en annexe). La substitution ne pose pas de problème et les élèves se ramènent à la résolution d'une équation du second degré, ce qu'ils font par mise sous forme canonique. Le brouillon de Ludovic (voir annexe) permet de se rendre compte de l'apprentissage qui se fait à propos de la résolution des équations du second degré : la résolution détaillée de la première équation en 12 lignes est d'abord condensée en 4 lignes avant d'être reprise pour la deuxième valeur du volume (200). A partir de la troisième valeur du volume, Ludovic écrit directement la réponse en changeant ce qui doit l'être dans la résolution précédente. La production finale du groupe comprend le dessin de la jauge à l'échelle demandée.

Les autres élèves interagissent avec Ludovic et suivent ce qu'il fait mais Ludovic mène clairement l'ensemble du groupe, c'est pourquoi nous référons l'analyse a posteriori à son travail. Il se place dans le cadre de la résolution des équations, ce que nous avons appelé la voie 3 dans l'analyse a priori. Les connaissances qu'il a dans ce cadre constituent bien un milieu pour sa résolution du problème et il apprend sur la résolution des équations du second degré. Il n'active pas le sous-cadre de l'expression algébrique de fonctions pour exprimer une variation même s'il dit "il faut que je trouve un rapport avec cette longueur là et cette hauteur là" quand il constate qu'il a deux inconnues. C'est bien une connaissance du sous-cadre de la résolution des équations qui est activée : si j'ai deux inconnues, il me faut deux équations. Ce n'est que tout à la fin, en entendant parler de graphique à une table voisine (activation par une intervention extérieure d'une partie du milieu potentiel et donc modification du milieu de référence) qu'il s'aperçoit qu'il aurait pu très facilement exprimer x en fonction de h. D'ailleurs l'usage du x pour désigner la longueur lui fait commettre une erreur et il corrige en renommant ses inconnues : x pour la hauteur et y pour la grande base du trapèze. On voit là que c'est un certain usage des fonctions, avec certaines notations qui fait partie du milieu (des pratiques autour des fonctions). Le cadre fonctionnel pour Ludovic est organisé autour de pratiques et d'écritures permettant de mettre en œuvre ces pratiques à propos d'objets institutionnels pour résoudre des problèmes où ils interviennent de façon pertinente.

CONCLUSION

Avant de conclure, donnons un aperçu rapide du travail des deux autres groupes. Le groupe 2 commence par utiliser le produit en croix mais ce calcul est rejeté par les élèves eux-mêmes qui pensent que la graduation ne peut pas être régulière à cause de la forme de l'abreuvoir. Le professeur les aide à identifier la variable grande base pour sortir de l'impasse. Il calculent alors le volume pour les 4 valeurs entières de la hauteur en déterminant la grande base par Thalès. Ils restent dans le cadre numérique (ébauche de voie 2). A la fin de la séance quelques-uns des élèves du groupe commencent une démarche algébrique qu'ils n'ont pas le temps de finir. Le groupe 3 calcule le volume total et se rend compte très vite que la grande base y varie en fonction de la hauteur x et qu'ils ont donc deux inconnues. Pour n'avoir qu'une inconnue, ils cherchent à exprimer la grande base en fonction de la hauteur. Ils reconnaissent une fonction affine "c'est pas ça qui est proportionnel, c'est l'augmentation qui est proportionnelle" et expriment le volume en fonction de la hauteur. Ils veulent alors résoudre l'équation du second degré mais bloquent sur la mise sous forme canonique. L'enseignant les oriente vers la représentation graphique de la fonction et la résolution graphique du problème.

L'analyse a posteriori que nous avons menée n'est qu'ébauchée et il y manque ce qui concerne le rôle de l'enseignant. Nous manquons de temps et de place pour la compléter. L'étude de cet exemple nous a amenée à poser quelques questions et à suggérer quelques précisions à propos de l'utilisation de la notion de milieu et de sa structuration dans l'analyse des situations didactiques. Le lecteur comprendra que les propositions de la première partie, illustrées sur l'exemple, sont soumises au débat dans la communauté des chercheurs et ne sont donc pas à prendre comme des vérités. Le but de cet exposé est de susciter la réflexion en montrant comment on peut utiliser et interroger tout à la fois un cadre théorique.

REFERENCES

BROUSSEAU Guy, 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 7 n°2 pp. 33-115, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU Guy, 1990, Le contrat didactique: le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n°3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

BROUSSEAU Guy, CENTENO Julia, 1991, Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 11 n°2.3 pp. 167-210, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

CHEVALLARD Yves, 1989, Le concept de rapport au savoir, *Séminaire Didatech* 1988-1989

CHEVALLARD Yves, 1992, Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 12 n°1 pp. 73-111, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

GRENIER Denise, 1998, Milieu et contrat dans l'étude de l'enseignant et des interactions didactiques, *Actes des deuxièmes journées de La Fouly,* Interactions didactiques, Genève.

MARGOLINAS Claire, 1994, Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire Didatech* n°158, année 1993-1994, p.27-83

MARGOLINAS Claire, 1995, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, in MARGOLINAS Claire, *Les débats de didactique des mathématiques,* annales 1993-1994, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

PERRIN-GLORIAN Marie-Jeanne, 1993, Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes "faibles", *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 13 n°1.2 pp. 5-118, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

PIHOUE Didier, 1996, *L'entrée dans le mode de pensée fonctionnel en classe de seconde,* mémoire de DEA, équipe DIDIREM, IREM de Paris 7.

ROBERT Aline, 1998, Outils d'analyse des contenus mathématiques enseignés au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 18.2, p.139-189.

ANNEXES

Le problème de l'abreuvoir

Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.

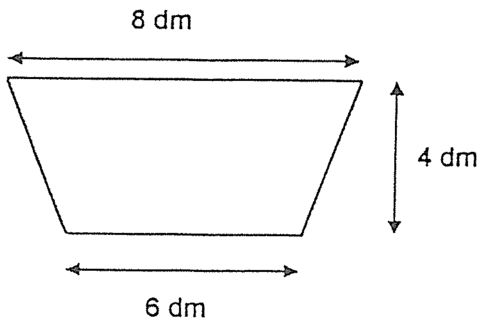
Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.

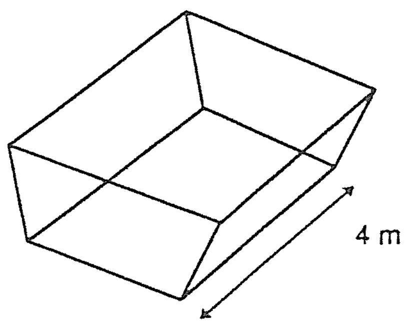
On se propose de la graduer, c'est à dire de préciser le niveau de liquide correspondant à 100, 200, 300, ...etc litres (par exemple).

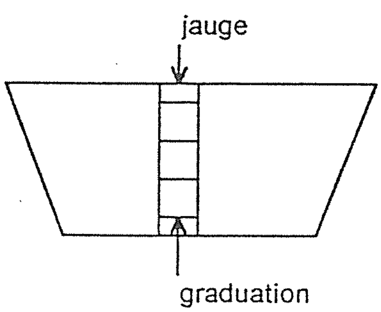
QUESTION :

Etablir à l'échelle ½ la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

SCHEMAS :







problème de l'abreuvoir

Construction de la situation

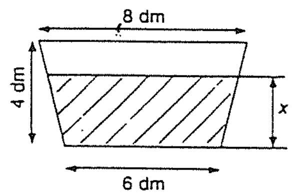
Cette situation fonctionnelle provient du manuel « Math 2de » de l'éditeur Belin. Elle y figure, au numéro 46 de la page 203, sous la rubrique problèmes du chapitre intitulé : « Fonctions carré et cube. Variations et parité ». Nous en avons modifié la formulation. Les phrases de notre énoncé sont toutes extraites du texte original et les schémas que nous insérons sont inspirés de ceux du livre de seconde. La mention « par exemple », qui clôt la graduation de notre énoncé, a été ajoutée par nos soins pour suggérer la recherche d'une solution générale au problème.

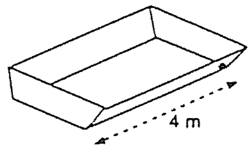
Sous la forme que nous proposons, il s'agit d'une situation fonctionnelle telle que nous l'avons définie lors de l'analyse des principaux manuels en usage dans les classes de seconde des lycées. Elle comporte des variations, deux variables principales prégnantes et il s'agit d'un problème, a priori, non fonctionnel. Elle répond à des conditions favorisant la dialectique outil / objet : l'énoncé a du sens pour les élèves, il fait référence à une réalité palpable car on peut imaginer une baignoire à la place de l'abreuvoir ; il n'y a pas de référence à une fonction dans l'énoncé et les élèves peuvent entrer dans le problème sans son intermédiaire ; l'introduction d'une fonction est un outil adapté à la résolution du problème. Enfin, l'énoncé est ouvert au sens qui nous intéresse, c'est-à-dire celui de la modélisation d'une situation par une fonction.

Nos objectifs sont d'observer les comportements des élèves en autonomie face à un problème « ouvert » et comportant des variations, puis de les décrire en termes de mode de pensée. Nous pensons parvenir ainsi à mieux les comprendre et à isoler des phases de transition avec des changements de cadres et de registres associés.

Problème du manuel Belin "Math 2de"

46. a. Un abreuvoir a la forme d'un prisme droit de longueur 4 m dont les extrémités intérieures sont deux trapèzes isocèles isométriques de petite base 6 dm, de grande base 8 dm et de hauteur 4 dm.
On désigne par x la hauteur de l'eau dans l'abreuvoir.
x varie de 0 à 4 ; 4 dm étant la hauteur de l'abreuvoir.

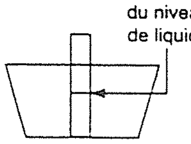




α. En utilisant la propriété de Thalès, calculer en fonction de x l'aire hachurée.

β. Si x est la hauteur, exprimée en décimètres, de l'eau dans l'abreuvoir, calculer le volume d'eau exprimé en litres, noté $v(x)$. Vérifier que l'on obtient $v(x) = 240x + 10x^2$.

b. Une jauge est placée verticalement contre l'un des trapèzes.
On se propose de la graduer, c'est-à-dire, de préciser les niveaux de liquide correspondant à 100, 200, 300, ... litres.



Pour graduer la jauge de l'abreuvoir, on veut tracer la représentation graphique de la fonction v définie sur [0 ; 4] par $v(x) = 240x + 10x^2$.

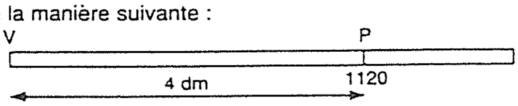
α. Programmer la calculatrice et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
$v(x)$	0								1120

Représenter les points de coordonnées (x ; $v(x)$) dans un repère orthogonal convenablement choisi.
Relier les points obtenus par une courbe régulière (on affinera éventuellement le tracé en calculant des valeurs intermédiaires).
On a ainsi représenté la fonction v sur l'intervalle [0 ; 4].

β. Utiliser la courbe pour lire des valeurs approchées du nombre x correspondant aux valeurs suivantes de $v(x)$: 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1 000, 1 100.
Établir à l'échelle 1/2, la graduation à tracer sur la jauge de l'abreuvoir.

c. Un utilisateur, peu mathématicien, a constitué la jauge de la manière suivante :



puis il a gradué régulièrement le segment [VP].

α. Quel est le nombre $w(x)$ marqué à la distance x (en dm) du point V ?
Représenter, sur le graphique de la question **b.** de l'activité, la fonction $x \mapsto w(x)$.
Prouver que l'erreur $e(x) = w(x) - v(x)$ commise pour chaque valeur de x est $e(x) = 10x(4 - x)$.
Indiquer comment il est possible de la lire graphiquement.

β. Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto e(x)$ sur le même graphique que celui utilisé pour les fonctions v et w. Lire graphiquement la valeur de x pour laquelle l'erreur est maximale. Justifier ensuite par le calcul le résultat obtenu graphiquement.

PRODUCTION DU GROUPE 1

Le problème de l'abreuvoir.

$$\text{Aire trapèze} = \frac{B+b}{2} \times h$$

$$= \frac{8+6}{2} \times 4$$

$$= 7 \times 4$$

$$= 28 \text{ dm}^2$$

$$V = B \times h$$

$$= 28 \times 40$$

$$= 1120 \text{ dm}^3$$

$1 \ell = 1 \text{ dm}^3$ donc $1120 \text{ dm}^3 = 1120 \ell$.

$0 < x < 4$ et $6 < y < 8$

Pour $x = 1$ $y = 6{,}5$

Soit x la hauteur recherchée et y la base variant en fonction de la hauteur

Pour $x = 2$ $y = 6{,}5 + 0{,}5 = 7$

Pour $x = 3$ $y = 7 + 0{,}5 = 7{,}5$

$240\,h + 10\,h^2 = 100$

$240\,h + 10\,h^2 - 100 = 0$

$10h^2 + 240\,h - 100 = 0$

$10\,(h^2 + 24\,h - 10) = 0$

$10\,(h^2 + 12 \times 2 \times h - 10) = 0$

$10\,(h^2 + 24h + 12^2 - 154) = 0$

$10\,(h + 12)^2 - 1540 = 0$

$10\,(h + 12)^2 = 1540$

$(h + 12)^2 = 154$

$h + 12 = \sqrt{154}$

$h = \sqrt{154} + 12$

$h = 12\sqrt{10} - 12$

$\cancel{240\,h + 10\,h^2 = 100}$

$\cancel{24h + h^2} = 10$

$\cancel{h^2 + 24h - 10 = 0}$

$\cancel{(h + 12)^2 - 154 = 0}$

$\cancel{(h + 12)^2 = 154}$

$\cancel{h + 12 = \sqrt{154}}$

$\cancel{h = 12\sqrt{10}}$

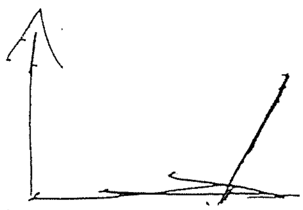
$240\,h + 10\,h^2 = 100$

$h^2 + 24\,h = 10$

$(h + 12)^2 - 144 = 10$

$h = \sqrt{154} - 12$

$\cancel{h = \sqrt{154} + 12}$

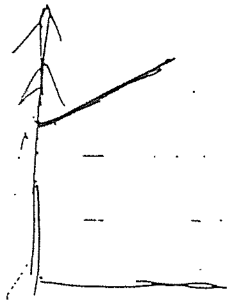


$240\,h + 10\,h^2 = 200$

$h^2 + 24\,h = 20$

$(h + 12)^2 - 144 = 20$

$h = \sqrt{164} - 12$

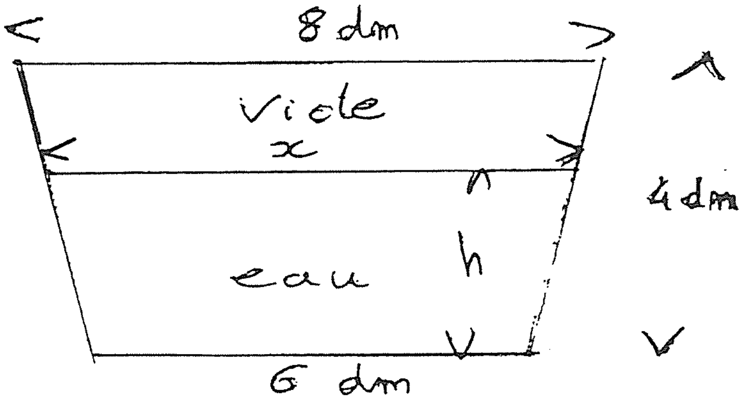


	200	
$h = \sqrt{174} - 12$	300	11,9
$h = \sqrt{184} - 12$	400	15,65
$\sqrt{194} - 12$	500	19,28
$\sqrt{204} - 12$	600	22,83
$\sqrt{214} - 12$	700	26,29
$\sqrt{224} - 12$	800	29,67
$\sqrt{234} - 12$	900	32,97
	1000	36,2

$y = \frac{1x}{2} + 6$

$x = \frac{1h}{2} + 6$

PRODUCTION DU GROUPE 4



(Tous les volumes sont en dm^3)

$$V_{eau} = \left(xh - \frac{(x-6)\cdot h}{2}\right) \times 40$$

$$V_{eau} = \left(xh - \frac{xh - 6h}{2}\right) \times 40$$

$$V_{eau} = \left(\frac{xh}{2} + 3h\right) \times 40$$

$$V_{eau} = h\,(20x + 120)$$

$$V_{vide} = \left(8\,(4-h) - \frac{(8-x)(4-h)}{2}\right) \times 40$$

$$V_{vide} = \left(32 - 8h - \frac{32 - 8h - 4x + xh}{2}\right) \times 40$$

$$V_{vide} = \left(16 - 4h + 2x - \frac{xh}{2}\right) \times 40$$

$$V_{vide} = 640 - 160h + 80x - 20xh$$

$$V_{eau} + V_{vide} = V_{total}$$

$$h\,(20x + 120) + (640 - 160h + 80x - 20xh) = V_{total}$$

$$20xh + 120h + 640 - 160h + 80x - 20xh = 1120$$

$$-40h + 640 + 80x = 1120$$

$$80x = 1120 - 640 + 40h$$

(SUITE)

$$x = 14 - 8 + \frac{h}{2}$$

$$x = 6 + \frac{h}{2}$$

$$V_{eau} = h \times (20x + 120)$$

je remplace x par $6 + \frac{h}{2}$

$$V_{eau} = h \times \left(20\left(6 + \frac{h}{2}\right) + 120\right)$$

$$V_{eau} = h \times (120 + 10h + 120)$$

$$V_{eau} = 240h + 10h^2$$

Je détermine la hauteur h pour $V_{eau} = 200$ l

$$240h + 10h^2 = 100$$

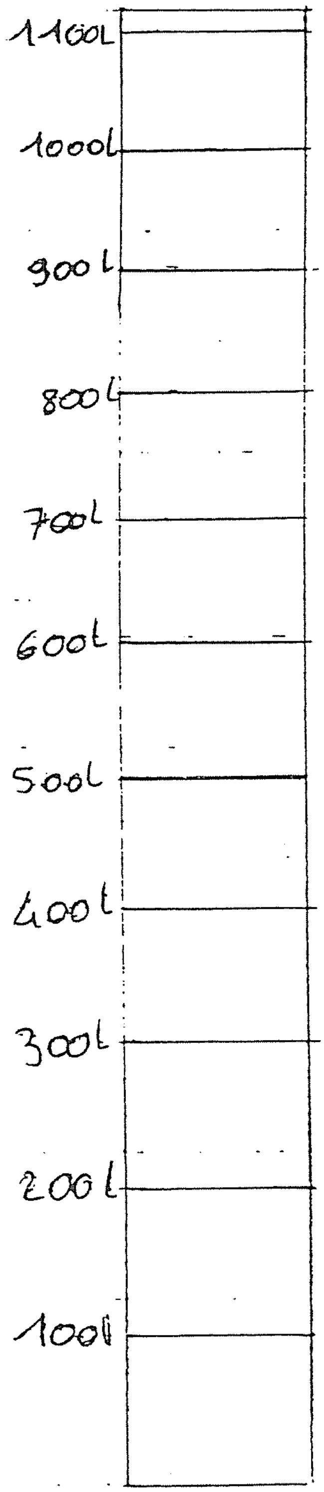
$$h^2 + 24h = 10$$

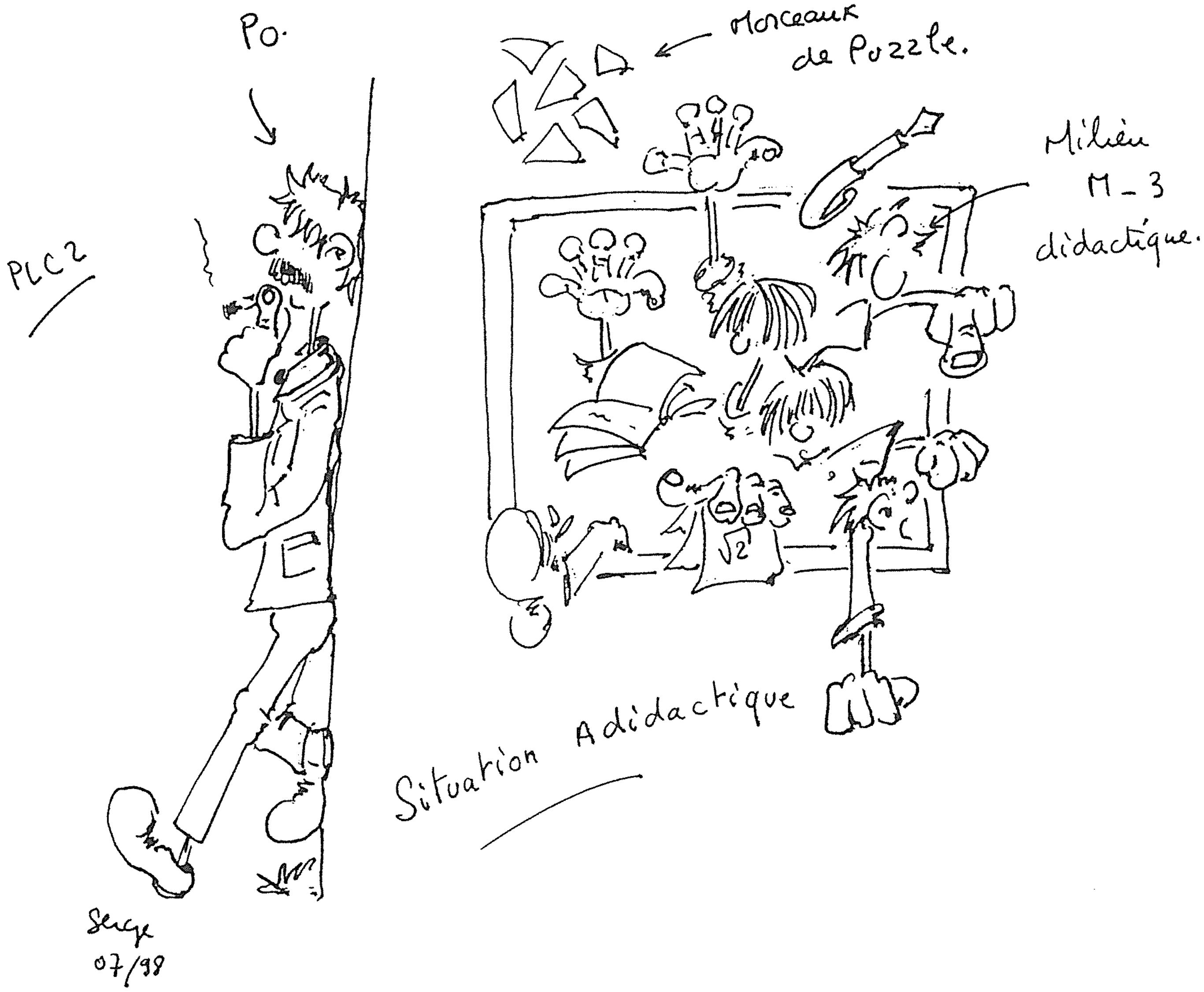
$$(h+12)^2 - 144 = 10$$

$$(h+12)^2 = 154$$

$$h + 12 = \sqrt{154}$$

$$h = \sqrt{154} - 12$$



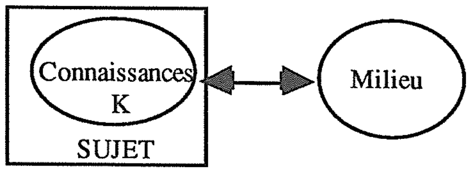

Po.
Morceaux de Puzzle.
Milieu M_3 didactique.
PLC2
√2
Situation Adidactique
Serge 07/98

STRUCTURATION DU MILIEU ET MODELE LOCAL A PRIORI

Lalina Coulange & Annie Bessot

Laboratoire Leibniz
Université Joseph Fourier, Grenoble I

Le travail présenté s'inscrit dans une recherche plus large, celle de Coulange[1] sur l'enseignement des systèmes linéaires dans le Secondaire. Notre projet est ici de montrer l'intérêt de la notion théorique de milieu (Brousseau, 1986, 1990) pour conduire une analyse des pratiques des enseignants dans une situation didactique, analyse indissociable de celle des élèves (cf. le compte-rendu qui suit du travail dirigé, p.53).
Nous renvoyons le lecteur au cours de Margolinas dans les mêmes actes pour la présentation de la notion de milieu et de sa structuration en situations emboîtées. Un modèle général de situation dans la théorie des situations peut être schématisé comme suit, le sujet pouvant être aussi bien un élève qu'un enseignant :



Rappelons seulement que Margolinas différencie les niveaux de situations emboîtées (et éventuellement des situations de même niveau) par les connaissances[2] permettant une interaction avec le milieu (situation d'un niveau inférieur).
Cette structuration permet :
- de décrire différentes positions pour un même élève (niveaux : -3, -2, -1, 0 et 1 du schéma donné par Margolinas) suivant une temporalité didactique
- de déterminer la possibilité de différentes situations pour les élèves (dans une même situation didactique).
Les niveaux (-1, 0, 1, 2, 3) des situations emboîtées, décrivent de façon symétrique les positions de l'enseignant[3].

Une observation

Le 6 mars 1998, nous nous sommes entretenues avec un enseignant de Troisième sur son projet d'enseignement puis les 20 et 25 mars 1998, nous avons observé dans sa classe de manière « naturaliste »[4] la réalisation des deux premières séances de ce projet. Le texte de l'entretien, les protocoles[5] issus des observations, l'analyse préalable des séances écrites par l'enseignant et les documents distribués aux élèves forment un corpus sur lequel s'appuie notre travail de recherche. L'objectif des séances observées est double : introduire les systèmes linéaires et enseigner la méthode de résolution dite « par substitution ».

---

1 thèse en cours, dans l'équipe de DDM du laboratoire Leibniz (co-direction de A. Bessot et J-L Dorier)

2 Dans le schéma de structuration du milieu, l'élève est modélisé par ces connaissances.

3 On peut envisager dans l'analyse différentes positions pour un même enseignant selon une temporalité plus complexe que la temporalité des positions de l'élève (voir Margolinas 1998).

4 Nous ne sommes pas intervenues ni dans la conception ni dans la gestion de ces deux séances laissées à l'entière responsabilité de l'enseignant.

5 « Le protocole est le document qui restitue la chronique du discours de la classe, il intègre certaines notes recueillies par l'observateur sur ce qu'il juge important de relever. Ce travail de recomposition est sous-tendu par des choix méthodologiques et la problématique de la recherche. » (Comiti et al. 1995, p.99)

Analyse ascendante de la situation « Bouteille et bouchon »

Lors de la première séance observée, l'enseignant a commencé par poser à l'ensemble de ses élèves de Troisième le problème « Bouteille et bouchon ». Nous présentons ce problème tel qu'il a été énoncé par l'enseignant dans sa classe, en distinguant les consignes orales de celles écrites au tableau par l'italique[6] :

(a) C'est un problème simple.
(b) Vous avez une bouteille et son bouchon.
(c) Si je pèse ma bouteille et son bouchon
(d) la bouteille plus le bouchon, elle fait cent dix grammes
(e) *110 g*
(f) Je vous dis que la bouteille pèse cent grammes de plus que le bouchon.
(g) *la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon*
(h) Combien pèse le bouchon
(i) *Combien pèse le bouchon*
(j) bouteille et son bouchon, la bouteille bouchée, c'est cent dix grammes
(k) *bouteille et bouchon 110g*

L'analyse ascendante[7] va nous permettre de produire un *modèle a priori* local des situations et des positions possibles pour un élève de troisième à qui est proposé ce problème particulier.

1 - Le point de vue de l'élève

a. Trois milieux matériels

La position du sujet « objectif » E-3 est « très loin » de celle de l'élève E0 en situation didactique : E-3 interagit sans initiative et de façon *non finalisée* [8] avec le milieu « matériel » M-3. Le travail de résolution de problème est projeté dans l'avenir.
Le milieu matériel doit contenir des « objets », présents ou évoqués, suffisants pour la *compréhension* du problème. Ces objets sont des connaissances « naturalisés »[9] (et donc transparentes), et culturellement repérées.

Ici nous pouvons envisager trois milieux matériels M-3. Nous montrerons plus loin que les connaissances du sujet objectif E-3 *intervenant dans l'interaction avec M-3* sont différentes dans chacune des situations S-3 ainsi déterminées.

• Un milieu « minimum » possible contient des nombres et des objets sans relations entre eux. Nous le décrivons comme une liste de deux entiers (100 et 110 donnés par la numération écrite) ou éventuellement de trois entiers (cent, cent-dix et dix donnés par la numération orale) et d'une liste distincte de trois objets évoqués (Bouteille, bouchon et Bouteille bouchée) :

Milieu M-3 (C)

Bouteille (évoquée) Bouchon (évoqué) Bouteille bouchée / Bouteille et bouchon (évoquée)	[numération écrite] 100 110	[numération orale] Cent Cent dix dix

• Les connaissances culturelles de la pesée peuvent déterminer deux autres milieux matériels : ces connaissances mettent en relation nombres et objets par une opération de mesure.

---

6 consignes écrites

7 Dans l'analyse ascendante, on commence par décrire la situation la plus « intérieure » de l'emboîtement (S-3) pour remonter vers des situations de plus en plus extérieures, la situation de niveau n devenant le milieu de la situation de niveau n+1 (Sn = Mn+1).

8 E-3 ne cherche pas encore à résoudre le problème posée ou même à répondre à une question de l'énoncé.

9 Ce sont des objets avec lesquels l'élève entretient un rapport de connaissance stable.

Dans le deuxième milieu matériel considéré, on attribue aux entiers et aux objets évoqués dans la consigne *une nature différente* : la mise en relation correspond à la métaphore de la pesée par affichage (balance à affichage numérique).

Milieu M-3 (A)

Bouteille (évoquée) Bouchon (évoqué) Bouteille bouchée / Bouteille et bouchon (évoquée)	Nombres entiers de grammes [numération orale] Cent Cent dix ou [numération écrite] 100 110	Balance à affichage (ou fonction-mesure entre un ensemble d'objets et un ensemble d'entiers)

Un troisième milieu matériel met en relation les nombres et les objets évoqués dans la consigne en leur attribuant une *même nature*, les nombres étant considérés comme des objets « marqués » : cette mise en relation est interprétable par la métaphore de la pesée par équilibre (balance à plateaux).

Milieu M-3 (B)

Bouteille (évoquée) Bouchon (évoqué) Bouteille bouchée (évoquée) / Bouteille et bouchon (évoqués)	Objets marqués: [numération orale] Cent Cent dix ou [numération écrite] 100 110	Balance à plateaux (ou relation binaire "équilibre" entre des objets marqués et des objets non marqués)

De ces trois milieux matériels M-3 (A), M-3 (B), M-3 (C) possibles découlent trois emboitements de situations possibles.

b. Les emboîtements des situations C

i. La situation objective S-3 (C)

Avec ses connaissances de la vie courante (sur l'ordre), l'élève objectif E-3 imagine un ordre « petit, moyen, grand » sur les trois objets bouchon, Bouteille et Bouteille bouchée. Indépendamment, avec ses connaissances sur les entiers, il envisage soit un ordre « petit, moyen, grand » sur les trois entiers de la numération orale soit l'ordre « petit, grand » sur les deux entiers de la numération écrite « 100, 110 ».

ii. La situation d'action S-2(C)

Pour simplifier, nous considérons comme milieu objectif M-2(C) le résultat des interactions entre E-3 et M-3 (dans la situation S-3(C)), c'est à dire deux collections *distinctes* de nombres et d'objets, ordonnés selon l'ordre « petit, moyen, grand » ou « petit, grand»
Le sujet agissant E-2 réfléchit aux actions de l'acteur objectif. Ses interactions avec M-2(C) sont *finalisées* par la recherche de la solution du problème posé : le poids du bouchon. Les connaissances mises en jeu restent très élémentaires. E-2 cherche à mettre en relation objets et nombres par l'ordre « petit, moyen, grand » : il cherche le plus petit entier, parmi trois entiers, à attribuer au plus petit objet « bouchon ». Soit il a déjà ce nombre « dix » par la numération orale ; soit il l'obtient[10] par ses connaissances sur les opérations en effectuant une soustraction sur les deux entiers en présence : « 110-100 = 10 ». L'attribution possible par la même règle du plus grand entier 110 (cent dix) au plus grand objet « Bouteille bouchée » est conforme à la consigne, et donc peut valider le résultat 10.
On obtient en S-2(C) un résultat « 10 (ou dix) » qui peut donner lieu dans la classe à une réponse quasi-immédiate en situation didactique S0, sans passage par la situation d'apprentissage (niveau S -1).

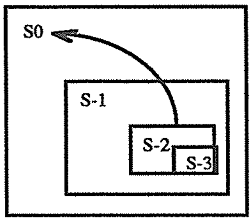
---

[10] « 100 », le plus petit de 100 et 110, ne peut être ce nombre, *« un bouchon étant beaucoup plus léger qu'une bouteille »* (connaissance de la vie courante) !

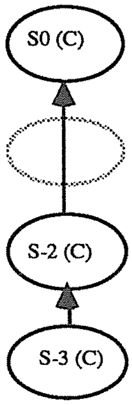
iii. La situation didactique S0(C)

Le niveau S0 est en effet le niveau où l'élève rend publique (soit uniquement à l'enseignant soit à toute la classe) sa réponse au problème posé.
Ici, l'élève E0 répond oralement « dix » ou écrit publiquement « poids du bouchon = 10 » en justifiant éventuellement cette réponse sous l'effet d'une connaissance du contrat didactique spécifique à la résolution de problème « *On écrit les opérations numériques qui ont permis d'obtenir la solution* » par l'opération « 110-100 = 10 ».

En résumé, représentons la famille de situations emboîtées C, par un schéma mettant en évidence le saut de S-2 à S0 et la structure dite « en oignon » des situations :



On peut également faire le schéma suivant[11] qu'on réutilisera pour les familles de situations A et B afin de représenter les bifurcations possibles dans le passage des niveaux n à n+1 :



c. Les emboîtements des situations A

i. La situation objective S-3(A)

E-objectif interagit avec M-3(A) sans finalité avec des connaissances élémentaires sur les poids (vie courante), sur l'ordre des nombres et sur la *mesure des poids « par affichage »*. Il imagine les affichages inconnus de la bouteille et du bouchon, l'affichage connu (110) de la bouteille bouchée et par l'intermédiaire de ces connaissances de la vie courante un ordre sur ces trois affichages.

ii. La situation d'action S-2(A)

On peut considérer le résultat des interactions de E-3 avec M-3(A) comme milieu objectif pour S-2(A) :

M-2(A)

affichage de Bb[12] : 110
affichage de B : ?
affichage de b: ?
affichage de Bb > *affichage de B* > *affichage de b*

[11] Les flèches du schéma représentent l'inclusion.

[12] On pourra noter par la suite l'objet « Bouteille bouchée » par Bb, l'objet « Bouteille » par B, et l'objet

E-2 agissant a des interactions avec ce milieu finalisées par la recherche de l'affichage du bouchon. Pour trouver le poids du bouchon, E-2 met en relation des opérations sur les objets avec des opérations sur les nombres affichés. Cela lui permet d'interpréter la phrase (g) « la bouteille pèse 100 grammes de plus que le bouchon »[13] de la consigne. Cette stratégie de base lui permet d'envisager les affichages possibles, mais se trouve *bloquée pour produire l'affichage du bouchon.*

iii. Les situations d'apprentissage S-1(A-arithm) et S-1(A-alg)

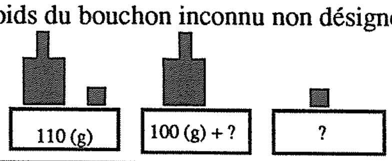
P

Des connaissances de nature mathématique différente peuvent permettre à E-1 apprenant de dépasser le blocage de sa stratégie de base *par réflexivité* sur les interactions de la situation précédente S-2 (A).
Le milieu d'action M-1 est le résultat des interactions du niveau -2 :

Milieu M-1 (A)

« ? » désigne l'affichage poids du bouchon inconnu non désigné par E-2.

Affichages "possibles" :



Pour la production d'un réponse au problème posé, deux types de connaissances mathématiques, arithmétiques ou algébriques, sont possibles : ceci sera représenté dans le modèle local par une *bifurcation* conduisant du niveau S-2(A) à deux situations possibles : S-1(A-arithm) et S-1(A-alg).

- *La situation d'apprentissage S-1(A-alg)*

Avec une connaissance du *contrat didactique* propre à l'algèbre (*on peut désigner les nombres inconnues par des lettres*) et spécifique à la classe de *quatrième*[14] (*on cherche à se ramener à une seule inconnue*), E-1 en position d'apprenant désigne l'affichage inconnu du bouchon par la lettre x. Puis par l'intermédiaire d'un raisonnement substitutif (non élémentaire) et de connaissances liées à la mise en équation et aux signes algébriques, il écrit l'équation à une inconnue : $x + (x+100) = 110$[15]. Il résout ensuite cette équation en mettant en jeu les règles d'algèbre élémentaire et trouve : $x = 5$.

- *La situation d'apprentissage S-1(A-arithm)*

E-1 en position d'apprenant peut mettre en œuvre une connaissance de type arithmétique (*On peut faire des essais et vérifier avec les données de l'énoncé).* Il s'engage alors dans une procédure de suppositions et de vérifications. E-2 commence par essayer un premier entier, sans doute 10 (obtenu par la numération orale « dix », ou par l'opération « 110-100 »). Puis il vérifie par exemple comme suit :

« bouchon » par b afin d'alléger le texte.

[13] Il utilise pour l'interprétation de cette partie de la consigne, soit une connaissance de type arithmétique qui lui donne immédiatement « affichage de B = 100 + affichage de b » ou retrouve cette égalité par l'intermédiaire de l'information « affichage de B > affichage de b » du milieu M-2(A) associée au nombre 100 cité.

[14] En troisième, l'apprentissage des systèmes linéaires rompt cette règle du contrat. Si on avait analysé la même situation d'enseignement en classe de seconde ou en fin de troisième, on aurait eu à envisager une autre situation de niveau -1 S-1(A-alg bis) où E-1 aurait désigné l'affichage de b par x, l'affichage de B par y et où la mise en équation aurait abouti à l'écriture d'un système linéaire.

[15] On peut aussi envisager que E-1 écrive l'équation $100 + x = 110 - x$. Mais cela semble moins probable. car dans cette deuxième équation, l'égalité n'a pas le sens d'effectuation qui est la signification la plus courante en arithmétique et qui pose moins de difficulté à des élèves de ce niveau.

Vérification 1. B pèse 100 de plus que b ; b pèse 10, donc l'affichage de B : 10+100 = 110. C'est le poids de la bouteille bouchée *contradiction*
Vérification 2. Bb affiche 110 donc l'affichage de B : 110-10 = 100. B fait donc 90 de plus que b *contradiction*
Vérification 3. B pèse 100 de plus que b ; b pèse 10 donc l'affichage de B : 10+100 = 110 donc Bb pèse 110 + 10 = 120 *contradiction*

Il fait ensuite de nouveaux essais en utilisant éventuellement des connaissances sur l'ordre des entiers.

iv. Les situations didactiques S0(A-alg) et S0(A-arithm)

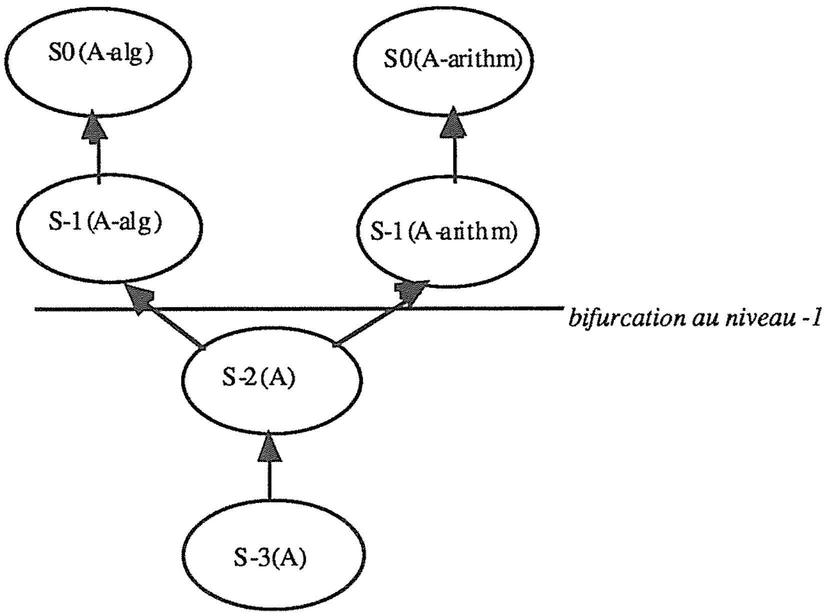
• *La situation didactique S0(A-alg)*

E0 en position d'élève réfléchit à S-1(A-alg) à l'aide de connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction d'une solution d'un problème de type algébrique. Il écrit publiquement ce que désigne l'inconnue x (le poids du bouchon), l'équation obtenue et la suite d'opérations l'amenant au résultat x = 5.

• *La situation didactique S0(A-arithm)*

E0 en position d'élève rend public son résultat « le bouchon pèse 5g » en l'associant éventuellement à l'opération de sa dernière vérification, avec des connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction de la solution d'un problème (*On écrit les opérations numériques qui ont permis d'obtenir la solution).*

Pour résumer, représentons la famille de situations A par un schéma mettant en évidence la bifurcation possible au niveau -1 :



d. Les emboîtements des situations B

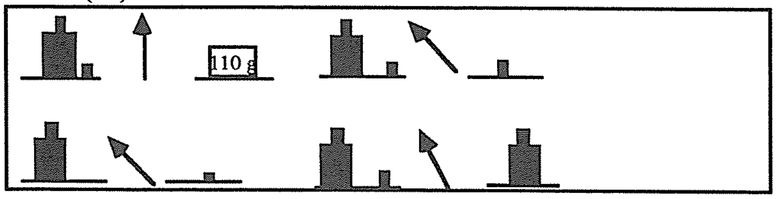
i. La situation objective S-3(B)

E-objectif interagit sans finalité avec le milieu matériel M-3(B) avec des connaissances élémentaires liées à la vie courante sur les poids, à l'ordre sur les nombres et aux « équilibres ». Il imagine des équilibres et des déséquilibres entre objets et « objets marqués » sans envisager d'opérations entre ces objets.

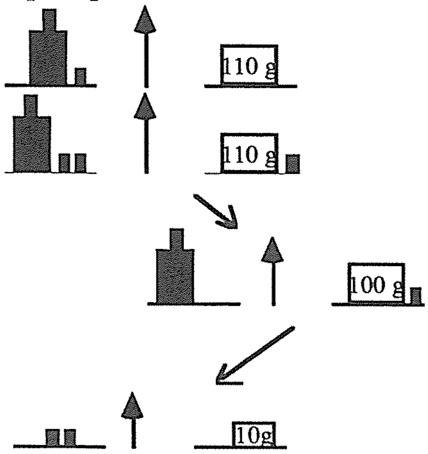
ii. La situation d'action S-2(B)

On peut considérer le résultat des interactions de E-3 avec M-3(B) comme milieu objectif pour S-2(B) :

M-2(B)



E-agissant a des actions sur ce milieu, finalisées par la recherche de l'objet marqué en équilibre avec le bouchon. Avec des connaissances sur les nombres « objets marqués » et sur les équilibres (transferts d'objets qui conservent l'équilibre), E-2 effectue des équilibres possibles entre les objets évoqués (marqués ou non) en les contrôlant par des opérations sur les entiers.
Il peut produire ainsi une suite d'équilibres, organisée comme suit :

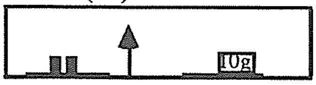


E-agissant peut arriver ainsi au dernier équilibre : « deux bouchons pèsent 10 grammes ».
Sa stratégie de base est alors bloquée : il ne peut, avec ses connaissances d'action sur les objets en équilibre, trouver un équilibre entre *un bouchon et un objet marqué.*

iii. La situation d'apprentissage S-1(B)

On peut considérer comme milieu d'action M-1(B) l'équilibre avec les deux bouchons résultant de la suite d'équilibres effectuée mentalement par E-2.

M-1(B)



E-apprenant interagit avec ce milieu, de manière réflexive par rapport à ses actions du niveau précédent. Il met en jeu une nouvelle connaissance liée à la linéarité de la mesure. A partir de l'équilibre « deux bouchons pèsent 10 grammes », il peut déduire *par linéarité* « un bouchon pèse 5 grammes ».

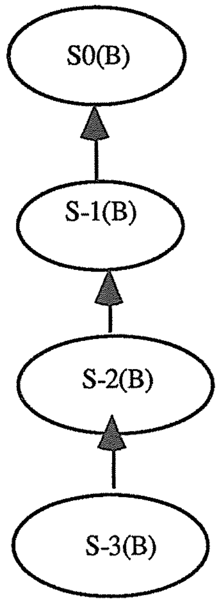
iv. La situation didactique S0(B)

E0, en position d'élève, rend public le résultat « deux bouchons pèsent dix grammes »[16] , puis

[16] Il ne rend pas public le raisonnement difficilement communicable (sans l'appui de dessins) qui lui a permis d'obtenir ce résultat. Il peut tenter de le verbaliser à la demande de P0.

avec ses connaissances du contrat didactique spécifique à la rédaction de la solution d'un problème (*On écrit les opérations numériques permettant d'obtenir la solution)* écrit l'opération 10 : 2 = 5 qui lui permet d'obtenir le résultat « Un bouchon pèse 5 grammes ». Ce raisonnement « par succession d'équilibres » pourrait être caractérisé comme « préalgébrique ». Nous le considérons comme de nature arithmétique : en effet, l'absence de désignation par des lettres rend difficile, voire impossible, l'*écriture* de la succession des équilibres, écriture permettant l'accès au travail algébrique.

On représente l'emboîtement des situations B par le schéma ci-après :



Vous trouverez en annexe 1 (p. 48) un unique schéma synthétisant les trois emboîtements des situations A, B et C, et en annexe 2 (p.49, p. 50, p. 51) trois schémas plus détaillés.

Nous évoquons rapidement le point de vue du professeur résultant de l'analyse ascendante (niveaux -1 et 0).

2 - Le point de vue de l'enseignant

a. L'enseignant en position P-1

P-observateur observe E-1 en situation d'apprentissage. Il n'intervient pas sur les connaissances mises en jeu par l'élève à ce niveau (il peut éventuellement intervenir sur celles des niveaux précédents s'il voit que la situation d'enseignement se déroule de façon insatisfaisante) mais doit être susceptible de les identifier pour préparer ses interventions en P0.
Ici, P-1 observe la présence de différentes solutions arithmétiques et algébriques : les interprétations de ces procédures vont dépendre des anticipations qu'il a pu faire en position P1 et des interventions « observables » d'élèves.

b. L'enseignant en position P0

P0, en position de professeur utilise les observations (faites en position P-1), des solutions arithmétiques et algébriques qu'il a pu identifier. Il interagit avec ce milieu S-1 pour intervenir publiquement quand cela lui semble pertinent relativement à son projet d'enseignement : *il évalue et institutionnalise les procédures apparues pendant une phase de bilan du travail des élèves.*

3 - Conclusion

Le modèle que nous venons de présenter constitue un outil pour analyser les interactions dans la classe observée[17] au cours de la résolution du problème « Bouchon et bouteille ». Il nous permet déjà de prévoir quelques particularités de cette situation d'enseignement :

• Nous avons déterminé la coexistence éventuelle de trois types de situations (A, B et C) dès le niveau matériel. Des élèves peuvent se trouver dans des situations différentes dès leur première entrée dans le problème.

• Plusieurs types de stratégies arithmétiques et algébriques (correspondant aux différents emboîtements décrits par notre modèle) peuvent être mis en œuvre dans la classe.
Un même résultat exact (la réponse 5) peut ainsi avoir des significations différentes[18] (solution algébrique ou arithmétique) qui correspondant à des apprentissages différents de la part des élèves.
Le résultat 10 est obtenu par des élèves qui restent à un niveau d'interprétation du problème très élémentaire (élève en situation C).

• Les connaissances mises en jeu pour la résolution du problème peuvent être d'origines diverses. Nous avons pris en compte pour construire notre modèle des connaissances algébrique, arithmétique, "de la vie courante", correspondant à des éléments pérennes du contrat didactique propre à l'algèbre ou à l'écriture de la solution d'un problème...

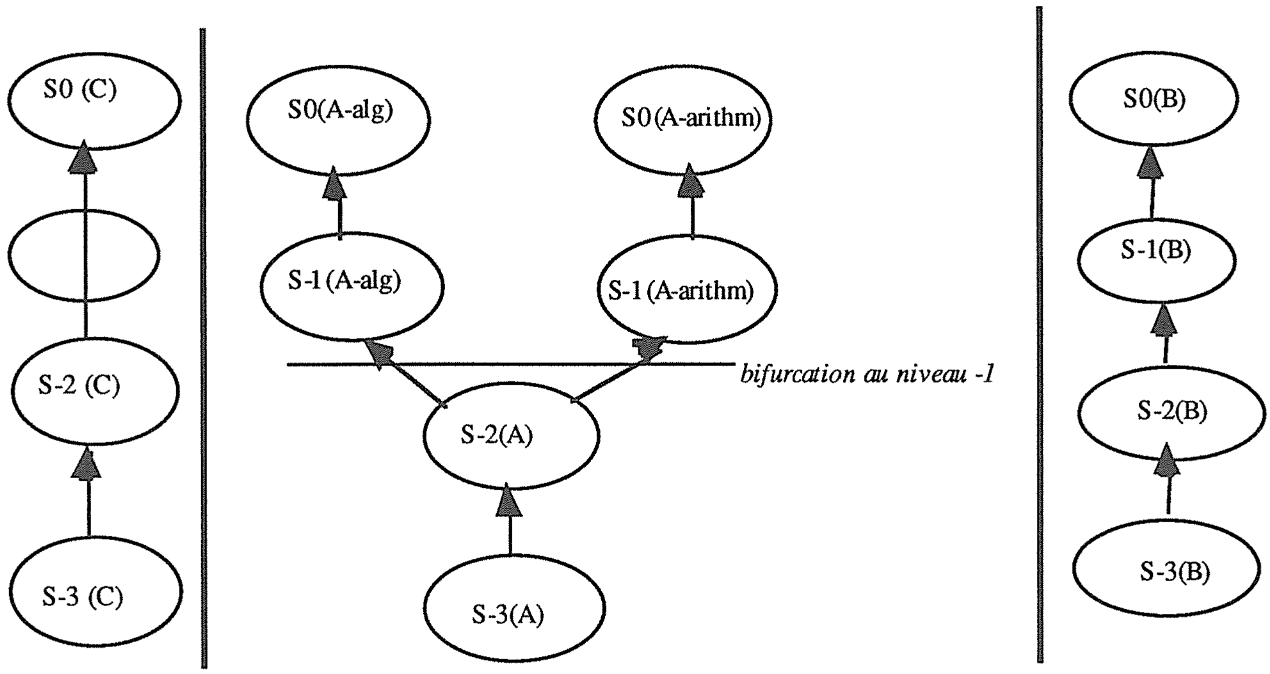
---

[17] Soulignons que ce modèle est local. Pour le construire, nous avons pris en compte la manière dont la consigne du problème a été posé dans la classe observée

[18] que grâce à notre analyse a priori, nous serons à même d'identifier.

ANNEXE 1

SCHEMA GLOBAL DES DIFFERENTES SITUATIONS A, B ET C ET DE LEURS EMBOITEMENTS



Dans ce schéma les *flèches* indiquent l'inclusion de chaque situation comme *milieu* d'une situation de niveau supérieur

ANNEXE 2

Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (1)

S-0 Réponse 10	**S-0 (A-alg)** E0 écrit : x désigne le poids du bouchon • x+(x+100)=110 … x = 5 • 100 + x = 110 - x … x = 5	**S-0 (A-arithm)** E0 écrit le poids du bouchon est 5 parce que 105+5 = 110 (d) et 100+5=105 [ou 105-5=100] (f)	**S-0 (B-arithm)** E0 écrit : deux bouchons pèsent 10 g *10÷2 = 5 (1)* 105+5 = 110 (d) et 100+5=105 [ou 105-5=100] (f) (E0 ne peut pas justifier l'opération (1) par une opération sur les données du problème)	**S 0** didactique
	S-1 (A-alg) E-1 *désigne* par x le poids du bouchon et écrit une équation à une inconnue. • (100 + x) + x = 110 (désignations de Bb) • 100 + x = 110 - x (désignations de B)	**S-1 (A-arithm)** E-1 *essaie 10* et obtient le poids de la bouteille puis E-1 valide en posant des opérations	**S-1 (B-arithm)** E-1 formule l'équilibre "Deux bouchons pèsent 10 g" et trouve 1e bouchon pèse 5g	**S - 1** apprentissage
Résultat : 10 **S-2 (C)** E-2 attribue à chaque objet un nombre selon l'ordre "Grand, moyen petit"	**S-2 (A)** E-2 met en relation des opérations sur les objets et des affichages. *Blocage de la procédure de base*		**S-2 (B)** E-2 produit des équilibres possibles entre les objets en présence (marqués ou non) en envisageant des opérations sur ces objets. *Blocage de la procédure de base*	**S - 2** action
S-3 (C) E-3 imagine l'ordre "grand, moyen petit" sur les 3 objets et sur les 3 entiers cent dix, cent et dix *[ou "grand", "moyen" sur 100 et 110]*	**S-3 (A)** E-3 imagine l'affichage du poids du bouchon et de la bouteille bouchée		**S-3 (B)** E-3 imagine les équilibres entre les objets présents (marqués ou non)	**S - 3** objective

Dans ce schéma les flèches indiquent l'*inclusion* de chaque situation comme *milieu* d'une situation de niveau supérieur

Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (2)

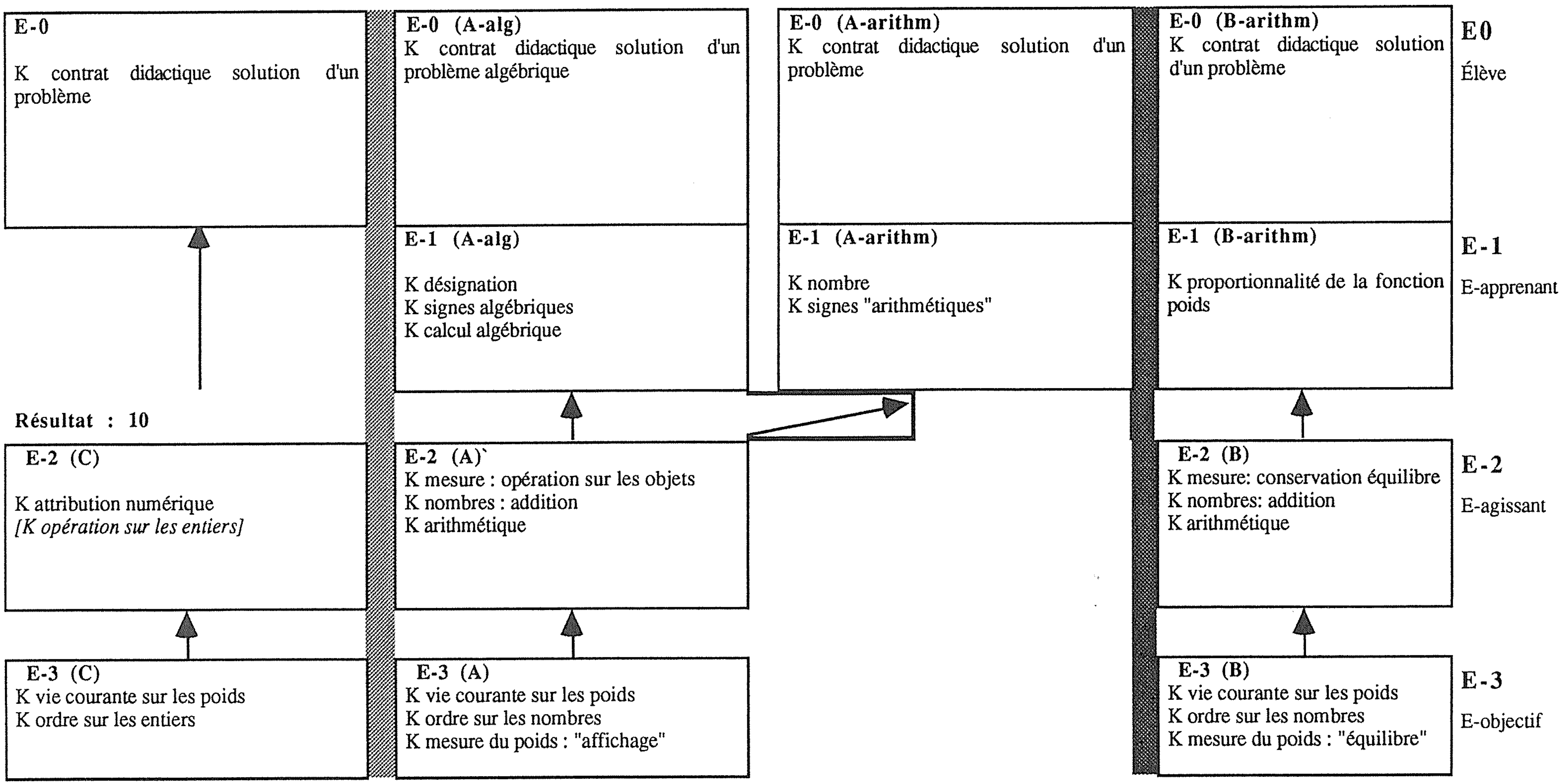
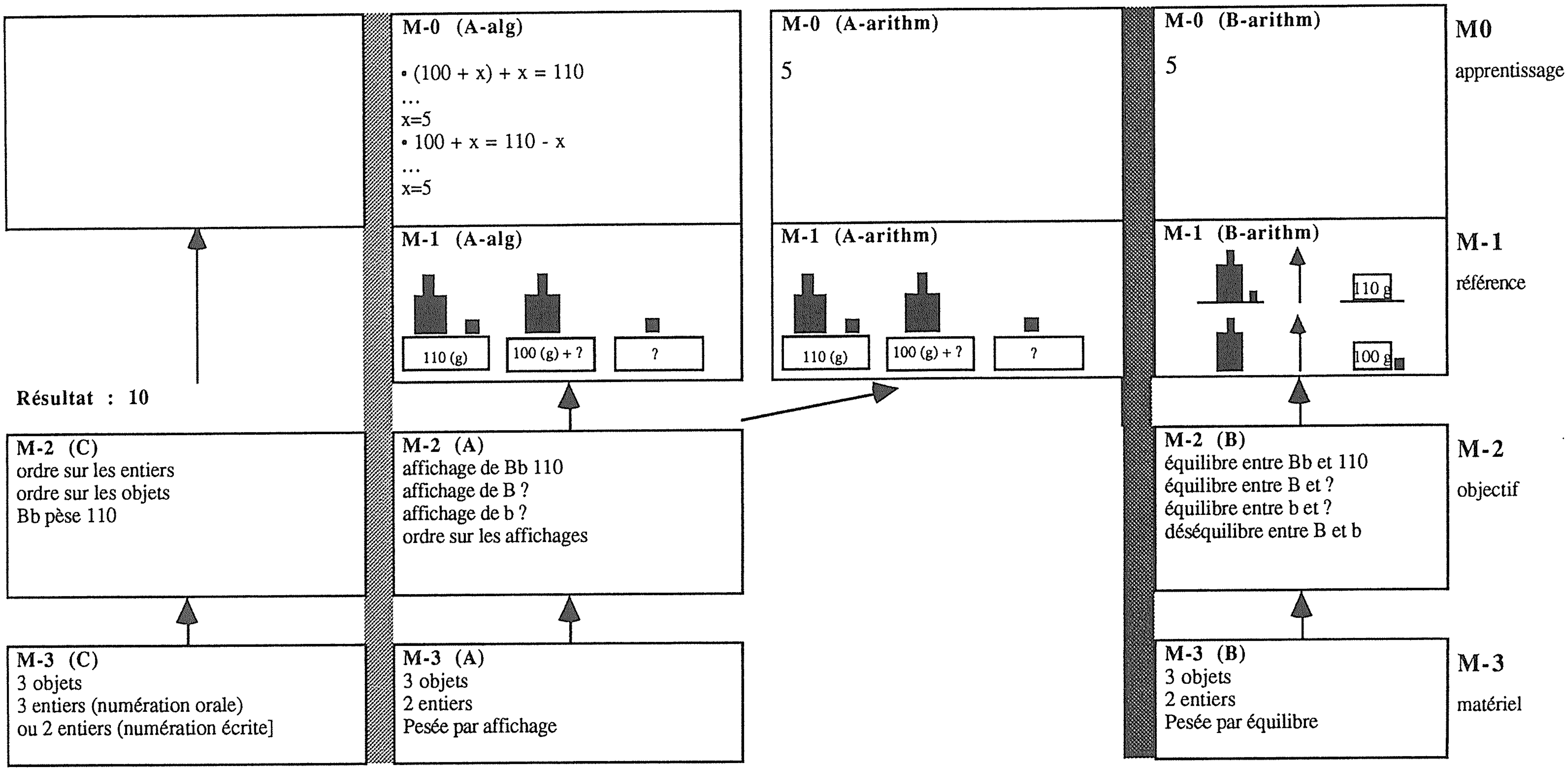
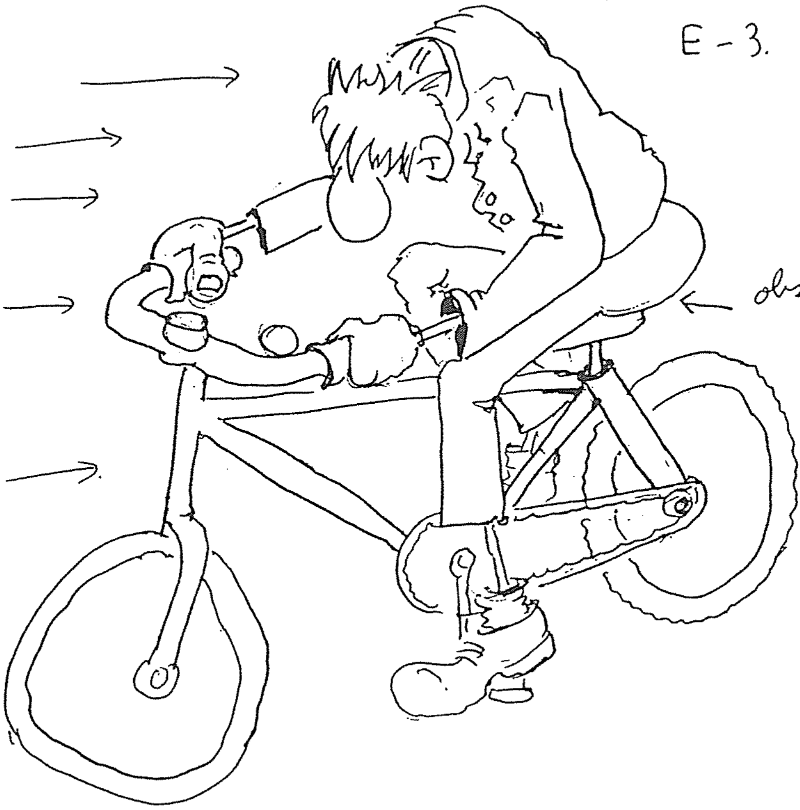


Schéma de l'analyse ascendante du milieu pour le problème "Bouteille-bouchon" (3)



TP final d'étude du milieu.



Travaux Dirigés
ANALYSE A POSTERIORI D'UN PROTOCOLE A L'AIDE D'UN MODELE LOCAL A PRIORI

Annie Bessot & Lalina Coulange

Laboratoire Leibniz
Université Joseph Fourier, Grenoble I

Notre projet est de montrer l'apport du modèle théorique local produit par l'analyse ascendante de la « structuration du milieu » du problème « Bouteille et bouchon » pour l'analyse a posteriori des « régulations inhérentes à toute action [en situation didactique][...]. Elles [les régulations] sont déterminées par les grands équilibres [...] qui doivent être conservés pour maintenir possible la relation didactique. » (Brousseau 1995, pp. 7-8)

Pour pouvoir aborder cette partie du travail didactique, nous avons recueilli des données par l'observation d'une classe de troisième à propos du problème « Bouteille et bouchon » (enregistrement au magnétophone). Une chronique a résulté de l'observation des séances.
L'analyse a posteriori de cette chronique va produire un modèle interprétatif de la contingence issu d'allers et retours entre des observables et le modèle local a priori qui structure ces observables entre contingence et nécessité. Nous pouvons schématiser comme suit la position de l'analyse a posteriori :

Chronique <-----> *Modèle local « a posteriori »* <----> Modèle local « a priori »

Nous avons choisi de rendre compte du travail au sein de la séance de travaux dirigés en structurant le texte par les questions posées aux participants[1].

1 - Supposons que la réponse 5 se diffuse dans la classe. La diffusion de cette réponse modifie-t-elle nécessairement la situation de l'élève ?

Seul l'élève en situation C peut donner une réponse différente de 5, à savoir 10 (ou dix). Que se passe-t-il pour lui s'il envisage la réponse 5 ? Le nombre 5 devient le troisième nombre de la liste des entiers : « 5 (ou cinq), 100 (ou cent), 110 (ou cent dix) ». E-2 agissant cherche à mettre en relation objets et nombres par l'ordre « petit, moyen, grand » : il cherche le plus petit entier, parmi trois entiers, à attribuer au plus petit objet « bouchon ». On obtient alors en situation d'action S-2(C) un résultat « 5 (ou cinq) » qui peut donner lieu dans la classe à une réponse quasi-immédiate en situation didactique S0, sans passage par la situation d'apprentissage (niveau S -1). La réponse 5 peut donc avoir la signification élémentaire d'attribut du plus petit entier connu au plus petit objet.

Notons aussi que la connaissance préalable de la réponse 5 peut conduire un élève, dans la situation A (pesée par Affichage) et dans la position du sujet apprenant, à engager de façon privilégiée une procédure d'essais et de vérifications (S-1arithm)[2] et à ne pas envisager de mise en équation (S-1alg).

[1] Chaque participant reçoit le document présentant le modèle local en terme de structuration du milieu du problème « Bouteille-bouchon » (voir annexes 1 et 2 de l'article « Structuration du milieu et modèle local a priori » dans les mêmes actes)
[2] qui se limitera alors à un seul essai et une unique vérification.

2 -Analyse a posteriori du protocole issu de l'observation d'une classe de 3ème à propos du problème « Bouteille et bouchon » (voir annexe p. 60 et suivantes)

a- Dans quelles « situations » (au sens du modèle local « structuration du milieu ») sont les élèves ?

◦ Situation C

Juste après la lecture de la consigne, un élève répond instantanément « 10g » [intervention 30 du protocole]. La rapidité de la réponse est un indice pour affirmer que cet élève répond en position correspondant à la situation S-2 (C) du modèle.
D'autres réponses « 10g » apparaissent dans la classe de manière moins instantanée. Cependant ces réponses semblent avoir la même signification que précédemment comme l'atteste l'extrait suivant :

49-E2. oui, c'est logique Laurent, le bouchon et la bouteille 110g... et la bouteille fait 100g de plus que le bouchon, ton bouchon il fait 10g !

Des réponses « 5 » peuvent aussi relever de la situation C (comme nous l'avons montré en 1). On peut interpréter les nombreuses difficultés de compréhension des explications de la stratégie arithmétique d'essais et vérifications dans la phase de bilan comme des difficultés d'élèves dans la situation C (qui restent à un niveau plus élémentaire d'interprétation du problème) :

112 - E. moi je comprends rien
113 - E2. 110g plus le bouchon ... ça fait 120g
114 - E. m'sieur je comprends rien
115 - P. écoutes, écoutes ce qu'il dit ...

◦ Situations A

- Situation A-arithm

Des stratégies d'essais et de vérifications se mettent très vite en place dans la classe [S-1 (A-arithm)]

45 - Laurent. oui, oui, monsieur le bouchon il est entre 0 et +5 ? Non ?

Des élèves dans cette situation, interagissent avec l'enseignant en position d'observateur P-1 assez tardivement (interventions 81-89) : notamment ils cherchent à obtenir de l'enseignant des éléments de validation de leur solution : le nombre trouvé comme solution de ce problème doit-il être ou non un nombre entier ?

81 - E. Est-ce qu'on peut avoir un nombre fixe ?
82 - P. Qu'est-ce que tu appelles un nombre fixe ?
83 - E. ben, 5, 4, 3...
84 - P. un nombre entier
85 - E. ouais un nombre entier, mais ...

Les solutions 2 et 3 écrites au tableau relèvent de S0(A-arithm):

sol.2	**sol.3**
Le bouchon pèse 5g	Le bouchon pèse 5 g
car 105+5=110G	la bouteille pèse alors 105g
et la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon	et 105g+5g=110g

On peut remarquer que le résultat « 10g » est parfois repris par certains élèves en situation A-arithm comme un premier "essai" éventuellement pour contredire publiquement des élèves en situation C par la prise en compte simultanée des relations entre poids et objet : « la bouteille plus le bouchon fait cent dix grammes », « la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon ». L'enseignant les intègre d'ailleurs par ces interventions, à la « genèse » des stratégies d'essais et de vérifications pendant la phase de bilan.

• *vérification 1*

70 - E parce que si le bouchon il fait 10 g et que la bouteille pèse 100g de plus, cela veut dire que la bouteille elle fait 110g !

• *vérification 2*

62-E La bouteille plus le bouchon, ça va faire 120 g

• *vérification 3*

60-E ça ne fait que 90 g de plus que le bouchon...

- *Situation A-alg*

La solution 4 gardée « cachée » à la demande de l'enseignant, en accord avec son projet d'enseignement (voir plus loin) relève de la situation S0 (A-alg).

sol.4 *(Cyril)* à l'arrière du tableau
bouchon = x [3]
x+(x+100)=110 [4]
2x=10
x=5

Dès le départ Cyril s'est lancé dans l'écriture d'une équation et a trouvé le résultat juste très vite puisqu'il est le premier à venir écrire sa solution au tableau.

• Situation B

la solution suivante est identifiable à S0(B-arithm) :

sol.1
Le bouchon pèse 5g car la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon. Alors
110-100=10g
10÷2=5
105+5=110
bouteille bouchon

C'est la dernière écrite. En écrivant cette solution, en aparté, deux élèves interagissent et le modèle a priori permet d'interpréter leur propos comme une tentative de verbalisation d'une relation « d'équilibre » :

93 - Virginie. Comme il faut rajouter le poids du bouchon plus encore le poids du bouchon ...
94 - Amandine. Ah !
95 - Virginie. tu fais 10 divisé par 2, cela fait 5 ..."

b - Analyse des interventions de l'enseignant dans la chronique

• Quelles stratégies (autres que algébrique) a-t-il prévues ? quelles stratégies n'a-t-il pas prévues ? Comment l'enseignant gère t-il la présence d'une stratégie non prévue ?

L'enseignant avait prévu la réponse « 10g » pour l'avoir observée en position P-1. Celle-ci n'apparaît pas au moment de l'écriture du résultat par les différents groupes à cause de la diffusion du résultat « 5g » dans les interactions entre élèves.

97 - P. [...] on a 5g, 5g, 5g et on a 5g ici aussi, derrière (sol.4) . Par ailleurs avant de commencer, il y a eu une sorte... de consensus sur 5g, heu, *mais au départ j'ai entendu beaucoup de ... vous aviez dit de zéro à 10 hein ? [E. Oui, mais...] au départ, non, non, ce n'est pas... et puis au départ il y avait 10g, la première idée qui est venue c'était 10g... hein ?* c'était venu ici, c'était venu par là pourquoi vous avez éliminé 10g très rapidement ?

---

[3] x lettre étiquette ?

[4] équation qui a sens d'effectuation : les deux inconnues apparaissent dans le même membre de l'égalité.

P. revient dans son intervention sur cette réponse (non présente dans les solutions publiques des élèves) en utilisant explicitement son observation du travail des élèves (en position P-1) : ainsi il espère faire produire des explications correspondant à la stratégie arithmétique qu'il avait prévue[5] (en position P1). La réponse « 10 » de S(C) n'est donc rappelée par l'enseignant que comme pouvant s'intégrer à une « véritable » stratégie d'essais et vérifications qui ne se limite pas à la seule vérification de la réponse « 5 » (voir 1).

La stratégie d'essais et de vérifications est légitimée comme représentant les stratégies arithmétiques : elle est donc prévue par P, il s'y attarde et la fait longuement commenter.

A l'opposé, la stratégie relevant de la situation B-arithm n'a pas été prévue dans le projet de l'enseignant (position P1) et donc n'a pas été observée en situation d'observation (position P-1). Nous allons le montrer sur des extraits de la chronique. Virginie commence une première intervention : elle verbalise de manière incomplète un passage d'une relation d'équilibre à une autre[6].

> 131 - Virginie. le 5 on peut expliquer comment ... parce que tu peux mettre plus le bouchon... tout à l'heure j'avais expliqué à Amandine ... *une bouteille plus le poids du bouchon, en plus on rajoute le bouchon, c'est comme si il y avait deux bouchons ...*

Ce début d'explication est contesté par un élève et n'est pas pris en compte par l'enseignant. P continue à tenter de faire comprendre la stratégie d'essais et de vérifications :

> 132 - E2. t'as pas le droit
> 133 - P. dans le texte il y a marqué la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon
> 134 - E2. de plus...
> 135 - P. en fait c'est 100g de plus que le bouchon, donc tout à l'heure il t'a dit si ça ça faisait 10g, 100g de plus que 10g ça fait 110g, donc il teste, il a vu que ça marchait pas, donc après il a essayé 5 g, il a dit 5g, 5g avec 100g de plus ça fait donc 105 ... *mais il dit, il y a encore le bouchon à rajouter d'où 110*, donc là ça marche... c'est comme ça qu'il marque. Oui, Nathalie

Mais devant l'incompréhension de Laure à propos de cette solution, Antoine (élève du même groupe que Virginie) propose de nouveau l' explication du résultat 5 g de Virginie.

> 138 - Antoine (solution 1). Il y a une autre façon de faire aussi peut-être

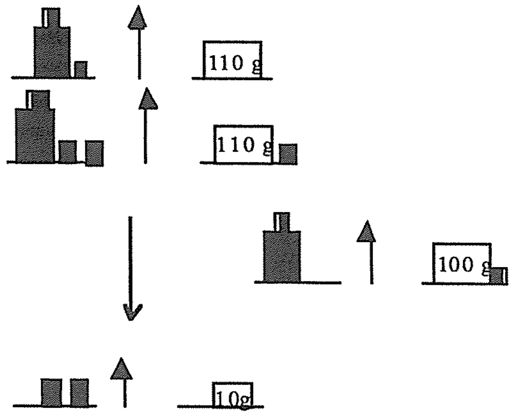
Antoine essaie de verbaliser des relations d'équilibres fondant le raisonnement qui lui a permis d'obtenir le résultat « deux bouchons pèsent 10 g » :

> 140 - Antoine. je ne sais pas si c'est clair mais ... donc tu fais 110g moins 100g, il va te rester 10g et après sachant que ça va te faire ... c'est comme si tu avais deux bouchons parce que tu vas rajouter, tu vas rajouter à la bouteille un bouchon et en plus tu vas avoir le bouchon pour fermer (1)
> 141 - E. tu vas rajouter à la bouteille le poids du bouchon
> 142 - Antoine. oui le poids du bouchon, et après tu vas fermer avec un vrai bouchon *[rires]*, donc après tu fais 10 divisé par 2 ça fait 5 (2)... et 2 fois 5 voilà

Ce qu'il tente ainsi de verbaliser oralement (sans dessin) peut être identifié au raisonnement (par passage d'équilibres) suivant :

---

[5] c'est à dire celle d'essais et de vérifications
[6] B b <-> 110
B b b <-> 110 b



L'enseignant ne semble pas comprendre ce raisonnement (qu'il n'a pas identifié en position d'observateur P-1 ni prévu en situation de projet P1) ; la plupart des élèves ne le comprennent pas non plus. Ceci trouve son explication dans la difficulté de formulation d'un tel raisonnement (qui relève de la situation d'action S-2 [7]). L'intervention de P consiste alors dans un premier temps, en une simple lecture de la solution écrite au tableau par le groupe :

> 143 - P. bien, on va regarder, *ça n'a pas l'air d'être très clair chez Laure.* Tu vas t'asseoir Antoine. *Tu l'as noyée* Heuh... donc il y a ici trois explications, il y en a une autre derrière le tableau, je vais le tourner tout à l'heure. Donc ici l'explication qu'a écrite Virginie, c'est à dire [il lit la sol.4] *« le bouchon pèse 5g car la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon » d'accord 110-100 égale 10* ! donc c'est ce qu'il vient d'expliquer Antoine *« donc 10 divisé par 2 ça fait 5g, 105 plus 5 ça fait 110 »* ...

Par la suite il reviendra sur cette solution pour valoriser la solution algébrique qui permet de donner une explication compréhensible de la phrase « 2 bouchons pèsent 10g ».

• Que doit être pour l'enseignant une réponse publique ? Quel rôle l'enseignant fait-il jouer à la solution algébrique par rapport aux solutions arithmétiques ?

Une deuxième phase dans le déroulement de la situation « Bouteille et Bouchon » succède à la recherche du résultat par groupe : elle commence à l'intervention 77 pour l'ensemble de la classe et à l'intervention 52 pour un groupe (qui a trouvé un résultat plus rapidement).

> 52 - P. enfin là, vous avez une solution, *vous pouvez l'expliquer*
> [...]
> 77 - P. *vous avez un résultat, vous êtes capables de l'expliquer...* bien... on va les marquer les résultats. Ici vous avez un résultat (groupe de devant, côté A) ...Vous ? (groupe de devant) Vous vous avez un encadrement [E. 5g] toi tu penses 5g... bien alors de façon qu'on écrive tout vous notez sur une feuille par exemple, ce groupe là vous notez votre résultat, on va le copier après sur le tableau, vous notez simplement votre résultat et puis une *explication rapide...* hein *? Là vous notez votre résultat ici avec une explication rapide.* Non, mais Anaïs avait une idée... là vous regardez là en même temps vous pouvez expliquer. Et puis là vous notez aussi ce que vous avez trouvé sur une feuille pour qu'on les recopie après ... vous notez rapidement ce que vous avez trouvé comme solution, le résultat, et vous expliquez vaguement ... qu'on puisse ensuite ...Au fond là bas, Laure Amandine ... Laure, Amandine et ... heu vous avez quelque chose comme résultat ? avec heu ? oui ? donc vous notez sur une feuille et *puis on va le copier au tableau de façon à ce qu'on change pas les idées après, hein* ...

P marque de façon insistante son attente d'une explication associée au résultat trouvé « la solution c'est le résultat plus l'explication ». L'explication du résultat est d'autant plus enjeu de cette phase qu'il y a consensus dans la classe sur le résultat « 5 » !
Il caractérise l'explication attendue comme *rapide* (1) et demande à chaque groupe de l'écrire au tableau *sans interagir avec les autres* (2).

---

[7] E-2 "agit mais ses opérations ne sont pas forcément explicitables et en particulier ses opérations mentales et cognitives. Il communique par l'action, le plus souvent sans pouvoir créer de moyens sémiologiques nouveaux. Il construit des messages en utilisant les codes connus de ses interlocuteurs sans les modifier sensiblement. Toutes les preuves qu'ils utilisent restent elles-aussi implicites." (Brousseau 1986, p. 63-64)

L'attente de P vis à vis de (1) va renforcer les règles du contrat spécifique à la rédaction d'une solution arithmétique pour les élèves dans la situation didactique S0 (A-arithm) : « On n'écrit pas de résultats faux et on doit justifier la solution en écrivant des opérations[8] sur les entiers de l'énoncé qui ont permis d'aboutir » (les élèves ne vont pas rendre publiques les essais antérieurs) .

L'exigence de P associée à (2) va permettre l'apparition de plusieurs types de réponses et notamment de mettre en concurrence procédures arithmétiques et algébriques. Dans ce but P insiste pour que le meilleur élève (Cyril) écrive sa solution (algébrique) « derrière le tableau » pour qu'elle ne diffuse pas. Cela va augmenter les chances de l'écriture de solutions arithmétiques nécessaires à son projet d'enseignement.

> P. (...) tu mets ici et ici de façon qu'on puisse tourner le tableau, *qu'on ait plusieurs types de réponses ...*
> [en aparté : comme C. est le meilleur élève il risquerait d'y avoir une fédération autour de sa solution, (...) ce que je disais à Lalina, c'est à dire, j'ai mis derrière le tableau là bas pour pas qu'il y ait diffusion ...]

L'association de (1) et (2) comme caractéristiques de l'explication attendue par P, va permettre la valorisation de la solution algébrique, mise en concurrence avec la solution par essais et vérifications, en la faisant apparaître comme la plus facile à communiquer (car les explications associées aux solutions arithmétiques sont longues à formuler par écrit).

L'enseignant met à profit l'intervention d'un élève qui parle d'« équation » pour passer à l'explication donnée par Cyril (le meilleur élève de la classe), en lançant un bref rappel sur les équations (un élève fait le lien entre équation, x et inconnue) :

> 144 - E. est-ce qu'on aurait pu utiliser une équation ? on a essayé ...
> 145 - P. Cyril c'est ce qu'il a fait, il a pensé à "équation". Pour vous équation ça vous dit quoi ? Qu'est ce que tu appelles "faire une équation" ?
> 146 - E. ben si il y a une inconnue, on cherche à remplacer le x par une inconnue
> 147 - P. bien c'est... *[à Cyril]* je ne te trahis pas en disant que c'est ce que tu as fait ?
> 148 - Cyril. heuh
> 149 - P. donc il a fait ça *[dévoile la solution 4]*

L'enseignant institutionnalise la mise en équation en rentrant brièvement dans le détail de la désignation d'une inconnue par « x » et l'obtention à partir des hypothèses de l'énoncé de l'équation « $x+(x+100)=110$ » : « mettre en équation, c'est reprendre les phrases de l'énoncé ».

> 149 - P. donc il a fait ça *[dévoile la solution 4]* ... (...) c'est à dire qu'il a dit que *x c'était le bouchon...* ce qui veut dire que x plus 100 c'est quoi ? ... Pourquoi, pourquoi il écrit x plus 100 à votre avis ?
> 150 - E. parce que 100 c'est le poids de la bouteille
> 151 - E. parce que le poids de la bouteille pèse le poids du bouchon plus 100g
> 152 - P. *parce qu'il a repris la phrase : la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon, 100g de plus que le bouchon, le bouchon étant x, ça fait 100 + x...*

Notons au passage l'intervention 150 : cet élève affirme « 100 c'est le poids de la bouteille » : il semble rester dans une situation identifiable à S-2(C) (5 poids du bouchon, 100 poids de la bouteille)

L'enseignant souligne les qualités de la procédure algèbrique en référence aux critères déjà énoncés : rapide, communicable

> 149 - P. (...) Cyril... c'est court en plus, c'est un avantage... alors est-ce que Laure avec ça comprend mieux...

Il institutionnalise donc la solution « mise en équation » en référence à ses concurrentes arithmétiques. P nous dévoile ainsi son projet : la procédure algébrique est une explication brève

---

[8] Ces dernières opérations sont celles de la vérification que le résultat convient

et claire. Il la garde *cachée dans un premier temps* parce qu'il la pense optimale pour le problème Bouteille et bouchon : le risque de diffusion empêcherait l'émergence de solutions arithmétiques qui doivent être présentes pour attester de cette optimalité comme *explication.* La solution algébrique permet même d'« éclairer » la solution « 2 bouchons pèsent 10g », que ni Antoine, ni Virginie ne pouvaient expliquer clairement :

152 - P. (...) En tout il y a le bouchon, c'est ce qu'on a retrouvé tout à l'heure chez Antoine quand il disait c'est comme si on avait deux bouchons hein ?

Pour conclure

Deux faits significatifs vis à vis des régulations dans cette situation didactique sont ainsi mis en évidence par l'analyse a posteriori, telle qu'elle est organisée par le modèle local (produit de l'analyse a priori « ascendante »).

• La réponse « 5 » fait l'objet d'un consensus dans la classe. Mais derrière ce résultat, se cachent des significations diverses : celles modélisées par les situations emboîtées du modèle local a priori. Cette réponse consensuelle permet l'avancée du temps didactique : tous les élèves ayant trouvé le résultat attendu, l'enseignement peut donc continuer. Des élèves en situation C sont confortés dans leur compréhension élémentaire du problème posé : il y a, dans cette classe, création d'un décalage cognitif cachée par ce consensus apparent.

• Un enjeu didactique[9] du projet de l'enseignant nous est dévoilé : faire apparaître la solution algébrique comme :
- concurrente des solutions arithmétiques pour la résolution du problème,
- et optimale vis-à-vis de l'explication exigée du résultat.

Cependant l'enseignant consacre peu de temps à la solution algébrique : ainsi il préserve un futur aux solutions arithmétiques et tout particulièrement à la solution arithmétique légitimée, celle d'essais et vérifications, pour fonder la signification de la résolution algébrique sur et contre l'arithmétique.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU G (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 7 n° 2 pp. 33-115, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G (1990) Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 9 n° 3 pp. 309-336, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1995) L'enseignant dans la théorie des situations didactiques, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques,* ed. IREM de Clermont-Ferrand.

COMITI C., GRENIER D., MARGOLINAS C.(1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques in Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A (Eds), *Différentes types de savoirs et leurs articulations.* pp. 93-127. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MARGOLINAS C (1998) Étude de situations didactiques "ordinaires" à l'aide du concept de milieu : détermination d'une situation du professeur, *Actes de la 8ème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* , ed. IREM de Clermont-Ferrand.

---

9 Cet enjeu apparaît clairement et explicitement pendant l'interview de P

ANNEXE

Extrait de protocole d'une classe de troisième
Observation du 20 mars 1998, de 10 h à 12 h

25 - P. ... Alors voilà. C'est un problème simple. Vous avez une bouteille et son bouchon. Jusque là tout le monde comprend... Bien. Alors je sais que si je pèse ma bouteille et son bouchon, hein ?
la bouteille plus le bouchon, elle fait 110g. Jusque là tout le monde comprend ? Bien.
Je vous dis que, je vous dis que la bouteille pèse, je ne me trompe pas ? la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon.
26 - E. Oh la, la !
27 - P. La question c'est quoi à votre avis ?
28 - Es. combien pèse le bouchon
29 - P. Combien pèse le bouchon

> **Au tableau**
> 110g
> la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon
>
> Combien pèse le bouchon ?

30 - Benoit. 10g
31 - P. à la limite une fois qu'on sait combien pèse le bouchon
32 - Es. ...
33 - P. voilà, Claire elle part du principe que c'est un exercice dur !
34 - Es. et oui
35 - P. elle se dit, j'ai une solution, ça peut pas être la bonne
36 - E. je vais pas dire que le bouchon pèse 10g comme Benoit...
37 - P. alors tu ne dis pas que le bouchon pèse 10g ...
38 - E. 110 g c'est
39 - P. alors 110g c'est donc le poids, hein, c'est, on va pas dire la masse, bouteille et son bouchon, la bouteille bouchée, hein ? c'est 110g
Si vous voulez je le marque, bouteille et son bouchon 110g

> bouteille et bouchon 110g

En aparté
40 - *Cyril. la bouteille pèse 100g ...m'sieur le bouchon il pèse 5 g c'est ça ? on fait l'équation ?*
41 - *E. ouais mais cela dépend*

42 - P. alors, bon allez y je vous laisse 5 minutes, vous pouvez vous mettre à deux pour réfléchir au problème ...
43 - Cyril. j'ai fait une équation monsieur
44 - P. ben moi je veux bien hein ! Vous faites comme vous voulez ... alors
Dans un groupe
45 - Laurent. oui, oui, monsieur le bouchon il est entre 0 et +5 ? Non ?
46 - E1. 105 et 5 ?
47 - P. moi je ne sais pas
48 - Laurent. et bien moi je pense...
49 - E2. oui, c'est logique Laurent, le bouchon et la bouteille 110g... et la bouteille fait 100g de plus que le bouchon, ton bouchon il fait 10g !
50 - E. ben oui, c'est logique / Es non
51 - E. brouhaha
52 - P. enfin là, vous avez une solution, vous pouvez l'expliquer
53 - E. Brouhaha
54 - E. ...y en a un, si elle est vide ou si elle est pleine
55 - P. est-ce un problème important ? si elle est vide ou si elle est pleine ?
56 - Es. non heu...
57 - P. si je vous dis c'est du bordeaux dedans, cela change les choses ?[E. non] non, bon.
58 - E. cela dépend de la composition du bouchon

59 - P. cela dépend de la composition du bouchon...
60 - E. ça ne fait que 90g de plus que le bouchon... donc 5g
61 - P. 5g
62 - E. la bouteille plus le bouchon ça va faire 120g
63 - E. Si tu dis que le bouchon fait 10g, la bouteille bouchée va faire 120g
64 - E. Mais la bouteille fais 100g de plus que le bouchon, 100g plus le poids du bouchon
65 - E. mais non ... Brouhaha
66 - E. non... il y a un piège
67 - P. toi tu vois des pièges de partout ...(rires)
68 - E. m'sieur, le bouchon il ne peut pas faire 10g, parce qu'après 110g ...
69 - P. Attendez on va regarder, on va mettre chacun les solutions ...
70 - E. parce que si le bouchon il fait 10g et que la bouteille pèse 100g de plus, cela veut dire que la bouteille elle fait 110g !
71 - P. Vous avez quelque chose vous ? Alors ? Laure ? Amandine ?
72 - Es. 10g
73 - P. 10g ! Alors tu as une idée Laure ? Hein ? ... Donc là vous avez une idée
74 - Laure. non, on a pas une idée, on a un résultat juste
75 - P. vous avez un résultat juste, bien
76 - E. on a un résultat
77 - P. vous avez un résultat, vous êtes capables de l'expliquer... bien... on va les marquer les résultats. Ici vous avez un résultat (groupe de devant, côté A) ...Vous ? (groupe de devant, côté L) Vous vous avez un encadrement [E. 5g] toi tu penses 5g... bien alors de façon qu'on écrive tout vous notez sur une feuille par exemple, ce groupe là vous notez votre résultat, on va le copier après sur le tableau, vous notez simplement votre résultat et puis une explication rapide... hein ? Là vous notez votre résultat ici avec une explication rapide. Non, mais Anaïs avait une idée... là vous regardez là en même temps vous pouvez expliquer. Et puis là vous notez aussi ce que vous avez trouvé sur une feuille pour qu'on les recopie après ... vous notez rapidement ce que vous avez trouvé comme solution, le résultat, et vous expliquer vaguement ... qu'on puisse ensuite ...Au fond là bas, Laure Amandine ... Laure, Amandine et ... heu vous avez quelque chose comme résultat ? avec heu ? oui ? donc vous notez sur une feuille et puis on va le copier au tableau de façon à ce qu'on change pas les idées après, hein ...
78 - Es. je n'sais pas monsieur...
79 - P. pardon c'était simplement pour noter, pour pouvoir noter les résultats
Des élèves des groupes se déplacent au tableau pour recopier leurs résultats.
80 - P. (au groupe de devant, côté A) alors Caroline, c'est bon ? C'est bon là ? tu viens le noter là, là derrière tu notes le résultat et une vague explication, hein ...
81 - E. Est-ce qu'on peut avoir un nombre fixe ?
82 - P. Qu'est-ce que tu appelles un nombre fixe ?
83 - E. ben, 5, 4, 3...
84 - P. un nombre entier
85 - E. ouais un nombre entier, mais ...
86 - P. non on ne nous a pas dit que, peut-être que ça fait 3,7g
87 - E. ouais, mais si on met entre zéro et dix c'est bon
88 - P. c'est une réponse
89 - E. entre zéro et dix
90 - P. bon, vous êtes à peu près d'accord ? Thibault tu vas le copier derrière ce tableau là, votre réponse, et votre vague explication... [Cyril. je vais avec toi] oui tu vas avec... bon c'est bon ? Là il nous reste ce groupe là et ce groupe là ... bon Anaïs tu viens copier là ? Non mais tu copies simplement le, simplement la réponse si tu veux de façon à pouvoir ... c'est juste pour regarder... tu mets ici et ici de façon qu'on puisse tourner le tableau, qu'on ait plusieurs types de réponses ...

Les élèves écrivent au tableau tout en interagissant ...
91 - E. C'est 5g à votre avis ?
92 - P. J'en sais rien, hein

Au tableau trois solutions sont visibles, la solution 4 est cachée.

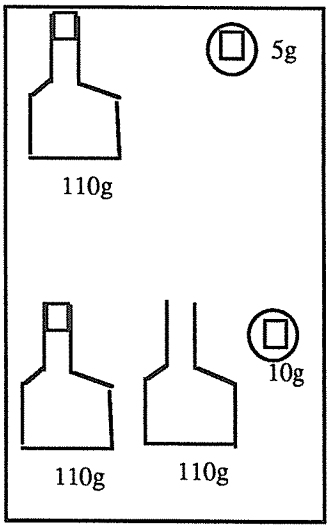
sol.1 *(Antoine, Amandine, Virginie... dernière écrite)*	sol.2 (groupe de devant, côté L)	sol.3 *(groupe de devant, côté L)*	sol.4 *(Cyril, Thibault ...)* **à l'arrière du tableau**
Le bouchon pèse 5g car la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon. Alors 110-100=10g 10÷2=5 105+5=110 bouteille bouchon	Le bouchon pèse 5g car 105+5=110G et la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon	Le bouchon pèse 5 g la bouteille pèse alors 105g et 105g+5g=110g	bouchon = x x+(x+100)=110 2x=10 x=5

93 - P. bien alors dès que Virginie a terminé on va regarder les solutions, essayer de les comprendre si tant est qu'on puisse les comprendre ...

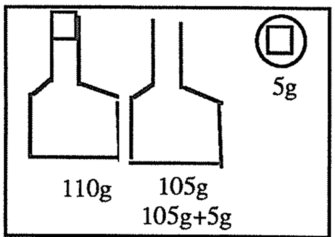
En aparté en écrivant la Sol 1
93 - Virginie. Comme il faut rajouter le poids du bouchon plus encore le poids du bouchon ...
94 - Amandine. Ah !
95 - Virginie. tu fais 10 divisé par 2, cela fait 5 ...
96 - E. qu'est-ce t'en sait que la bouteille elle fait 105 g ?

97 - P. la bouteille elle pèse 100g de plus que le bouchon, d'accord ? ... il y a un résultat et il n'y a pas le résultat ... C'est bon ? On attend que Virginie ait terminé... on regarde un peu. Et puis chacun va essayer de... d'expliquer... donc comme solutions en fait on a 5g, 5g, 5g et on a 5g ici aussi, derrière (sol.4) . Par ailleurs avant de commencer, il y a eu une sorte... de consensus sur 5g, heu, mais au départ j'ai entendu beaucoup de ... vous vous aviez dit de zéro à 10 hein ? [E. Oui, mais...] au départ, non, non, ce n'est pas... et puis au départ il y avait 10g, la première idée qui est venue c'était 10g... hein ? c'était venu ici, c'était venu par là pourquoi vous avez éliminé 10g très rapidement ?
98 - E1. Parce que 10g ...100g heu 110g moins 100g
99 - E2. non, comme on fait 100g le poids du bouchon 10g ...
100 - E3. c'est la bouteille plus bouchon qui fait 110g ! [EP. ouais !]
101 - E2. oui, la bouteille plus bouchon ! mais comme la bouteille fait 100g de plus que le bouchon, cela veut dire que tu as rajouté le poids du bouchon avec
102 - Es. brouhaha
103 - P. Alors attend, elle n'a pas bien compris Nathalie, est-ce que tu peux l'expliquer autrement ? Non non mais, bon, ce que tu dis est-ce qu'on pourrait pas faire, je ne sais pas, un dessin ou autre chose ? oui, oui ben vas-y
E2 [Sol2] va au tableau
104 - P. Nathalie c'est notre test, si Nathalie a compris c'est bon hein ? d'accord ? Voilà

105 - E2. la bouteille comme ça *[E2 dessine]*, elle fait 110g, tu es d'accord avec moi ? Donc le bouchon ... il n'y a plus que le bouchon, on dit qu'il fait 5g *[E2 dessine]*,, on essaie quoi



106 - Es. protestations 10g ! tu essaies 10g !!
107 - P. on essaye 10, on essaye 10
108 - E2. ouaih. On essaye 10. Alors la bouteille toute seule, elle doit faire 100g de plus que le poids du bouchon. Tu es d'accord avec moi ? Tu es d'accord avec moi , tu rajoutes 100g à 10g
109 - E. on ne l'a pas la bouteille toute seule, 100g moins 10 ...non ?
110 - P. attends, attends
111 - E2. pour le moment...pour l'instant elle fait 110g ... tu as deux bouchons... donc elle fait le poids du bouchon plus 100g, donc ça fait juste ça, t'es d'accord avec moi que ça fait 110g ? *[il écrit 110g sous le dessin de la bouteille]*
112 - E. moi je comprend rien
113 - E2. 110g plus le bouchon ... ça fait 120g
114 - E. m'sieur je comprends rien
115 - P. écoutes, écoutes ce qu'il dit ...
116 - E2. après il faut que tu rajoutes le bouchon pour la fermer, ça fait 120 donc ça va pas
117 - E'. là il y a quelque chose qui ne va pas / Es. ah ouais !
118 - E'. pourquoi là ta bouteille elle est toute seule, elle n'a pas de bouchon
119 - E2. et bien oui elle est toute seule !
120 - E'. donc t'enlève le poids du bouchon
121 - P. attends ! oui il a fait un test avec 10g pour te montrer qu'avec 10g ça marchait pas
122 - E2. après je te montre avec 5 g
123 - E'. ouais, mais je ne comprends pas pourquoi quand il n'y a pas le bouchon on met toujours 110g
124 - E. ouais c'est parce que c'est faux !
125 - P. là c'est ce qu'il trouve si il avait pris comme bouchon 10g
126 - E2. après je peux montrer avec 5g, ça devrait marcher
127 - E. ce que je comprends pas ...
128 - P. Chut, on écoute ce qu'il dit, après on verra
129 - E2. le bouchon plus 100g, 105g *[il écrit 105g sous le dessin de la bouteille]*... après tu rajoutes le poids du bouchon, puisqu'il faut le fermer avec le bouchon ... 110g *[il écrit 110g sous le dessin de la bouteille]*



130 - P. elle n'a pas compris. Virginie, tu voulais dire quelque chose. Alors on peut peut-être utiliser les explications qui sont données. Oui ?
131 - Virginie. le 5 on peut expliquer comment ... parce que tu peux mettre plus le bouchon... tout à l'heure j'avais expliqué à Amandine ... une bouteille plus le poids du bouchon, en plus on rajoute le bouchon, c'est comme si il y avait deux bouchons ...
132 - E2. t'as pas le droit
133 - P. dans le texte il y a marqué la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon
134 - E2. de plus...
135 - P. en fait c'est 100g de plus que le bouchon, donc tout à l'heure il t'a dit si ça ça faisait 10g, 100g de plus que 10g ça fait 110g, donc il teste, il a vu que ça marchait pas, donc après il a essayé 5 g, il a dit 5g, 5g avec 100g de plus ça fait donc 105 ... mais il dit, il y a encore le bouchon à rajouter d'où 110, donc là ça marche... c'est comme ça qu'il marque. Oui, Nathalie
136 - Nathalie. moi j'ai pigé mais Laure a pas compris
137 - P. Laure a pas compris. Alors est-ce qu'on peut utiliser peut-être maintenant les explications qui sont là...
138 - Antoine *[sol. 4]*. Il y a une autre façon de faire aussi peut-être
139 - P. alors vas y, *[Antoine va au tableau]* il y a encore une autre solution que peut-être Laure comprendra mieux
140 - Antoine. je ne sais pas si c'est clair mais ... donc tu fais 110g moins 100g, il va te rester 10g et après sachant que ça va te faire ... c'est comme si tu avais deux bouchons parce que tu

vas rajouter, tu vas rajouter à la bouteille un bouchon et en plus tu vas avoir le bouchon pour fermer
141 - E. tu vas rajouter à la bouteille le poids du bouchon
142 - Antoine. oui le poids du bouchon, et après tu vas fermer avec un vrai bouchon *[rires]*, donc après tu fais 10 divisé par 2 ça fait 5 ... et 2 fois 5 voilà
143 - P. bien, on va regarder, ça n'a pas l'air d'être très clair chez Laure. Tu vas t'asseoir Antoine. Tu l'as noyée Heuh... donc il y a ici trois explications, il y en a une autre derrière le tableau, je vais le tourner tout à l'heure. Donc ici l'explication qu'a écrite Virginie, c'est à dire *[il lit la sol.1]* "le bouchon pèse 5g car la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon. d'accord 110-100 égale 10 ! donc c'est ce qu'il vient d'expliquer Antoine "donc 10 divisé par 2 ça fait 5g, 105 plus 5 ça fait 110" heuh...
144 - E. est-ce qu'on aurait pu utiliser une équation ? on a essayé ...
145 - P. Cyril c'est ce qu'il a fait, il a pensé à "équation". Pour vous équation ça vous dit quoi ? Qu'est ce que tu appelles "faire une équation" ?
146 - E. ben si il y a une inconnue, on cherche à remplacer le x par une inconnue
147 - P. bien c'est... *[à Cyril]* je ne te trahis pas en disant que c'est ce que tu as fait ?
148 - Cyril. heuh
149 - P. donc il a fait ça *[dévoile la sol. 4]* ... Cyril... c'est court en plus, c'est un avantage... alors est-ce que Laure avec ça comprend mieux, c'est à dire qu'il a dit que x c'était le bouchon... ce qui veut dire que x plus 100 c'est quoi ? ... Pourquoi, pourquoi il écrit x plus 100 à votre avis ?
150 - E. parce que 100 c'est le poids de la bouteille
151 - E. parce que le poids de la bouteille pèse le poids du bouchon plus 100g
152 - P. parce qu'il a repris la phrase : *[P. lit]* "la bouteille pèse 100g de plus que le bouchon", 100g de plus que le bouchon, le bouchon étant x, ça fait 100 + x ... oui Laure ? ... En tout il y a le bouchon, c'est ce qu'on a retrouvé tout à l'heure chez Antoine quand il disait c'est comme si on avait deux bouchons hein ? Donc ensuite, donc c'est là qu'il fait son équation donc il l'a écrit , il a 2x =10 Est-ce qu'on comprend comment il est passé de là [x+(x+100)=110] à là [2x=10] [EP. oui] Nathalie tu peux expliquer.
153 - Nathalie. ça fait ... il a enlevé le 100 de chaque côté
154 - P. oui il a enlevé le 100 de chaque côté donc il a 110 moins 100 il trouve 10, donc il a 2x = 10 donc x = 5. Bon alors je vous ai préparé plein ! [Rire de P. et protestations de Es] Non mais des drôles, des drôles, vous allez voir [brouhaha] ... mais si...[brouhaha] je n'ai plus mis de bouteille parce que l'éthique ça marchait pas ... c'est plus des bouteilles c'est des cailloux *[il distribue la fiche cailloux]*

10h33 (fin de l'extrait)

RAPPORTS ENTRE RAISONNEMENT ARITHMÉTIQUE ET UTILISATION DE L'ALGÈBRE EN QUATRIÈME :
Etude du cas d'un élève prénommé Simon.

Dominique Woillez

LADIST - Bordeaux

L'atelier présente l'analyse du comportement d'un élève de quatrième sur un problème de transcription algébrique. Selon la théorie des situations, cette analyse implique celle de la situation (et éventuellement celle du milieu), à laquelle cet élève est confronté.

Dans une première partie nous étudierons le comportement de Simon dont nous proposerons une interprétation que nous justifierons à l'aide d'un modèle. Puis dans une seconde partie nous montrerons l'analyse a priori de la situation que nous voulions créer. Enfin, dans une troisième partie nous décrirons et commenterons la situation effectivement réalisée.

PARTIE I

I.1. Les faits

Des élèves d'une classe de 4° ont appliqué le programme de calcul suivant : « réduire de 10%, augmenter le résultat obtenu de 20% » à des nombres simples. La consigne est : Proposez une expression algébrique de ce programme.

Transcription de la séquence vidéo.

Au tableau sont accrochées des affiches écrites par les élèves. Sur ces affiches figurent des programmes de réductions et d'augmentations appliquées au nombre cent.

Affiche du programme A :

$$100-100\times\frac{10}{100}=90 \quad (-10\%)$$

$$90+90\times\frac{20}{100}=108 \quad (+20\%)$$

Au nombre 100, le réduire de 10%

Augmenter le résultat obtenu de 20%

1. Simon : madame, on a le A.
2. P : Ah! j'écoute ...
3. Simon (en dictant): ça fait x moins x fois zéro virgule un, plus x moins x fois zéro virgule un, plus x moins (sic) x fois zéro virgule deux.

   Le professeur écrit sous le programme A au fur et à mesure que Simon dicte : « x-x×0,1+ x×x » et perd le fil.

4. P: tu recommences parce que...

   Simon recommence sa dictée.

Le professeur écrit cette fois au tableau « x-x×0,1+ x-x×0,1»

5. P: alors x moins x fois zéro virgule un plus la même chose ?
6. Simon : oui..
7. P: ensuite ?
8. Simon : plus x moins x fois zéro virgule deux.

Le professeur écrit. Au tableau figure maintenant : « x-x×0,1+ x-x×0,1+ x - x × 0,2»

9. P: C'est l'écriture du programme A ? Est-ce que tu peux m'expliquer pourquoi ?
10. Simon : parce que le premier x moins x fois zéro virgule un c'est réduire de dix pour cent ... *(Le professeur écrit sous x-x×0,1, réduire de 10%)* ... et après c'est notre nombre obtenu, c'est notre x moins dix pour cent qu'on va calculer avec x moins x fois zéro virgule deux.
11. P: donc, tu reprends ce nombre là *(en montrant x-x×0,1)* et c'est ce que tu écris ici *(en montrant l'expression algébrique complète).* Mais tu as écris une somme !
12. Simon : ouais! En fait on pourrait le faire en deux étapes, si on mettait le nombre réduit de dix pour cent égal à y par exemple et on fait y plus y multiplié par zéro virgule deux.

Le professeur écrit au tableau « x-x×0,1= y et y + y × 0,2 » et dit :

13. P : il appelle le premier résultat y et c'est ce y qu'il va changer maintenant. Voici l'expression du premier programme.
14. Simon: mais c'était juste ce que j'avais dit tout à l'heure !
15. P: non, parce que tu les additionnais. Est-ce que là on additionne les résultats ?
16. Simon : non

Fin de la transcription.

Le professeur en proposant le programme, attendait de ses élèves d'abord l'écriture :

« (1-0,1)x » [resp.0,9x] pour « réduire de 10% », qui avait été travaillé un mois auparavant, puis, soit « 0,9x + 0,2×(0,9x) », soit « 1,2×(0,9x) » pour le programme complet. La proposition de Simon la surprend donc, elle ne la comprend pas (lignes 4 à 9) et doit lui demander de recommencer.

I.2. Interprétation du comportement de Simon

Dans une première tentative, pour exprimer le programme, Simon propose l'expression: « $x - x \times 0{,}1 + x - x \times 0{,}1 + x - x \times 0{,}2$ ».

1. La réduction de 10% est transcrite par « x−x×0,1 », et non par 0,9x qui a pourtant été étudiée en classe; cette formulation est très proche des calculs sur les nombres effectués auparavant.

Une transcription encore plus proche des calculs, qui en conserve parfaitement l'ordre, serait l'expression incorrecte « x×0,1−x ». Cette formulation est effectivement proposée par d'autres élèves de la classe (non transcrit ici).

2. On note aussi que l'opération de multiplication est dictée contrairement aux usages algébriques (lignes 3, 5 et 8).

3. Simon reprend volontairement le même nombre pour la seconde partie du programme, c'est la raison pour laquelle « $x-x\times 0{,}1$ » est répété: « et après c'est notre nombre obtenu, c'est notre x moins dix pour cent qu'on va calculer » (ligne 10).

4. La substitution est rendue ici par la somme. La composition des applications verbalement exprimée par « et après », traduite algébriquement par la substitution, est ici formulée par une addition .

Nous rapprochons ce comportement, d'un autre bien connu qui consiste à se servir du symbole d'égalité comme connecteur d'une suite d'opérations.(exemple : 3+4=7+2=9-1=8 pour le calcul de 3+4+2-1). Ici, de la même façon, l'addition sert de relais entre plusieurs opérations. Je réduis de 10% : « $x-x\times 0{,}1$ », « et après c'est notre nombre obtenu »: « $x-x\times 0{,}1$ + $x-x\times 0{,}1$ », « qu'on va calculer avec x moins x fois zéro virgule deux » : « $x-x\times 0{,}1+x-x\times 0{,}1+x-x\times 0{,}2$ ». Nous formulons l'hypothèse que ce comportement est typique de la pensée arithmétique se manifestant en algèbre.

Pour repérer plus précisément ce que sont les problèmes d'arithmétique élémentaire et les méthodes de résolution et parallèlement ce que sont les problèmes d'algèbre élémentaire et leurs méthodes de résolution, nous avions élaboré deux modèles. En effet, les mathématiques ne répondent pas à cette question, et le découpage traditionnel des classes de problèmes est insuffisant pour les caractériser.

I.3. Les modèles

1) Les règles d'une résolution arithmétique élémentaire

Le traitement arithmétique des problèmes peut être modélisé de la façon suivante :

Les valeurs initiales

- Les données sont des nombres positifs appartenant à N^+, D^+ ou Q^+.
- Ces nombres sont soit des scalaires nommés (éléments du corps de base ou rapports d'homothétie), soit des mesures.

Les valeurs calculées

- La solution est la production d'un ou plusieurs nombres, scalaire (taux, échelle, rapport de grandeur...) ou une mesure de grandeur (un couple (nombre, unité)).
- Ce nombre est annoncé par une expression en langue naturelle indépendamment du calcul.

Le passage des valeurs initiales aux valeurs calculées se fait en une suite finie et ordonnée de calculs.

- Ces calculs se font à partir des nombres de l'énoncé, de nombres supposés par le résolveur, des nombres déjà calculés (d'où l'ordre des calculs).
- Ces calculs se font à l'aide de l'une des quatre opérations simples : addition, soustraction, multiplication, division.
- Ces calculs se font sur deux nombres
- Chaque résultat est annoncé en langue naturelle dans les termes de l'énoncé.
- Les résultats intermédiaires sont des nombres de N^+, D^+ ou Q^+ en termes de mesures ou bien de scalaires bien repérés et étiquetés (taux, pourcentage, ...)
- Les fonctions en présence sont des fonctions linéaires ou affines (la distinction étant pertinente)

Dans l'arithmétique élémentaire sont traités implicitement : les relations et les fonctions (conservation des rapports, proportionnalité), des raisons du choix d'un nombre (fausse supposition), l'ordre des calculs, le raisonnement.
En revanche sont l'objet d'un traitement explicite : les nombres, les unités de mesure, les opérations, les formules arithmétiques, les algorithmes (opérations, règles de trois ou fausse supposition, croix des mélanges)

Enfin, formellement, le répertoire est la langue naturelle, les symboles (=, +, -, ×, :) importés de l'algèbre comme abréviations et les algorithmes (croix de St André, règle de trois) ont une forme stéréotypée.

2) Les règles d'une résolution algébrique élémentaire

Parallèlement, le raisonnement algébrique peut se modéliser :

<u>Données initiales</u>

- Les données comportent des relations (égalités ou inégalités) explicites ou non entre termes.
- Les données sont des variables et/ou des constantes.
- Les constantes sont des nombres appartenant à Z, D, Q ou R.
- Les variables prennent leurs valeurs dans les ensembles cités précédemment.

<u>Etat final</u>

- On demande une ou des égalités (inégalités) entre nombres et variables ou entre termes.

<u>Le passage de l'état initial à l'état final se fait en une suite ordonnée d'égalités (d'inégalités) entre termes.</u>

- Les termes sont formés suivant les règles des prédicats du premier ordre.
- Un terme peut être transformé en un terme égal soit en calculant sur les constantes, soit en utilisant les propriétés des opérations (structure d'algèbre). Ces propriétés ne sont pas énoncées dans la pratique.
- On peut substituer dans un théorème un terme par un terme égal localement ou non.
- Les égalités (inégalités) sont soit données, soit établies à partir des données.
- Le passage d'une formule à une autre se fait par la même opération licite appliquée aux deux termes ou bien par utilisation d'un théorème que l'on énonce.
- Les fonctions en présence sont soit des fonctions linéaires ou affines (la distinction est pertinente) ou leurs inverses, soit des fonctions quadratiques ou leurs inverses (ensemble des fractions rationnelles).

En algèbre élémentaire le choix des inconnues, les quantificateurs seront traité de manière implicite et l'écriture des termes, la transformation des termes et les relations entre termes seront explicites.

Le répertoire est la langue naturelle et celui d'un langage du premier ordre.

Nous allons maintenant tenter de montrer comment le comportement des élèves dans ce cas précis est conforme à la pensée arithmétique et pas encore à l'algèbre.

I.4. Justification

1) Les calculs et leur ordre sont respectés sauf pour « x–x×0,1 ».

L'erreur trouvée « x×0,1–x » respecte davantage l'ordre et puisque l'arithmétique ne s'occupe que de grandeurs (positives), la question du signe de « x×0,1–x » ne se pose pas.

2) La succession des opérations est rendue par l'addition qui sert de connecteur entre les différentes manipulations. Le résultat à produire est une expression algébrique (un terme) qui ne doit pas comporter de signe d'égalité, il lui faut relier les différents calculs entre eux, et le choix se porte sur l'addition interprétation traditionnelle de « et ».

2) Comme le calcul arithmétique ne se fait que sur des constantes, la substitution d'un terme non calculé à un autre n'existe pas en arithmétique, c'est en revanche une caractéristique algébrique. Simon montre qu'il peut le faire dans « x–x×0,1 », il l'a appris, mais cette capacité à effectuer les emboîtements est limitée. Des contraintes ergonomiques l'empêche de la faire. C'est pourquoi, il propose dans une seconde tentative : $\begin{matrix} x - x \times 0{,}1 = y \\ y + y \times 0{,}2 \end{matrix}$ qui consiste en deux écritures. Il sait la technique de nommer les termes et n'a pas les moyens de différencier la deuxième écriture de la première (ligne 14 : « c'est la même chose »).

I.4. Conclusion

Ainsi la seule transcription algébrique de certaines suites de procédures arithmétiques fait apparaître que certaines des connaissances arithmétiques vont entrer en conflit avec des stratégies algébriques.

En effet la substitution d'un terme par un autre n'a pas d'existence en arithmétique et est traduite soit par l'addition comme ici, soit par l'égalité. Par ailleurs, même après enseignement, les élèves renoncent difficilement à certaines caractéristiques de leurs calculs arithmétiques comme le nombre de calculs (x-0,1×x au lieu de 0,9x), l'ordre de ces calculs (x×0,1–x), et la mise en évidence des opérations (×).

PARTIE II

Nous allons maintenant examiner les conditions que nous avons créées pour que Simon produise son message.

L'objectif de départ était de construire une situation qui exige la production d'une égalité comme message. Pour faire correspondre à une connaissance une situation appropriée, la théorie des situations propose une série de questions et de techniques : quelles fonctions distinctes doivent apparaître ? Qui doit dire quoi, à qui et dans quel but ?

II.1 Analyse a priori d'une équivalence

Soit une équivalence A≡B. La situation doit être résolue par la production du message « A≡B ». Il faut un émetteur E_1, un récepteur R_1 et une situation d'action S_1 où le renseignement « A≡B » est nécessaire.
« A » doit donc désigner un objet O_1 et « B » un objet O_2 et dans S_1, l'objet O_1 est remplaçable par l'objet O_2.
R_1 ne doit pas savoir que l'objet O_1 est remplaçable par l'objet O_2 et pourtant il doit pouvoir avoir un rapport avec ces deux objets, au moins à travers leurs noms. Et pour que les noms

« A » et « B » existent il faut qu'ils figurent dans des cultures différentes qui ne communiquent pas.
Donc il existe pour R_1 une situation de communication où un émetteur E_2 peut désigner O_2 pour un récepteur R_2 par « A », et un autre E_3 qui appelle O_2 par « B ».

Le déploiement précédent se réalise dans la classe de la façon suivante:

1.1. Un groupe d'élèves G_1 utilise O_1 et en parle en le nommant A pour agir sur un certain milieu.
1.2. Un groupe d'élèves G_2 ,distinct de G_1, utilise O_2 et en parle en le nommant B pour agir sur un certain milieu.
2.2. Un groupe d'élèves G_3 utilise O_1 ou O_2 indifféremment et doit connaître ou éprouver leur interchangeabilité dans certaines cas et pas dans d'autres.
2.3. Un groupe d'élèves G_4 distinct du groupe G_3 et qui a la même tâche que celle de G_3, ne peut expérimenter et demande au groupe G_3 s'il doit utiliser O_1 ou O_2 , le groupe C doit alors lui dire l'équivalence de A et B pour certains cas.
3. L'équivalence de A et B devra être prouvée et argumentée dans un débat.

II.2. Conséquences d'autres études

Par ailleurs une travail parallèle permet de prévoir des situations où l'arithmétique élémentaire est moins performante que l'algèbre tout en se limitant aux problèmes du premier degré.

L'une de ces situations est la somme ou la différence de l'application identique avec une application linéaire ($x \pm kx$). L'analyse fait apparaître les variables didactiques suivantes :

1) {donnée du coefficient k; donnée d'un couple (x_0, kx_0) }

2) {somme; différence}

3) {donnée de k et demande de l'application somme; donnée de l'application somme et demande de k}.

Une autre situation est la composition d'applications linéaires. Les variables didactiques sont alors:

1) Le mode de données de l'application linéaire comme au 2) précédent.

2) Le nombre d'applications linéaires à composer.

3) Pour deux applications linéaires: {données des deux applications et demande de l'application composée; donnée de l'application composée et d'une application et demande de la seconde}.

II.3- Motivations du choix de la situation:

1. L'étude précédente a permis de retenir : la composition de deux fonctions linéaires, et la somme de deux termes liés par une fonction linéaire. Ces deux lois de composition sont internes dans l'ensemble des applications linéaires.

2. Les fonctions linéaires sont vues ici comme programmes de calcul (premier usage de la lettre) et l'algèbre peut être à ce niveau un instrument de preuve. L'articulation algèbre arithmétique peut être repérée à cet endroit.

3. L'analyse a priori d'une situation d'un problème d'équivalence, les considérations précédentes et les programmes de 4° imposent les contraintes suivantes:

- il doit y avoir deux programmes distincts équivalents
- l'équivalence ne doit être ni sémantique, ni formelle

- l'équivalence doit être suffisamment problématique

4. Parmi les équivalences de a) structures de problèmes, b) de formules c) de termes, nous avons choisi une équivalence de termes qui nous paraissait le moins lourd (mais les autres restent à l'étude) au niveau 4°.

II.4- Le choix de la situation

La relation pourcentage de variation- application linéaire ayant été travaillée en classe, il a été choisi de faire travailler les élèves sur la composition de deux applications linéaires générées par des pourcentages de variation. Le résultat étant jugé suffisamment étrange et troublant pour les élèves.
Une autre piste non retenue a été la vitesse moyenne (jugée trop difficile).

II.5- Analyse du projet de leçon

Savoirs :
Enchaîner successivement deux variations données en pourcentage
Trouver le pourcentage relatif à l'application composée
Prouver qu'il est indépendant des valeurs initiales

Objectifs opérationnalisés :
Appliquer un pourcentage et l'additionner ou le soustraire
Enchaîner une augmentation et une réduction données en pourcentages
Remplacer les deux opérations par une seule
La composée est encore une application linéaire qui s'interprète ensuite en une réduction ou une augmentation
Les pourcentages ne s'additionnent pas
Faire obtenir les résultats précédents à l'aide des écritures algébriques.

Types d'exercices que l'on aurait pu poser à la fin de la leçon
A quelle réduction (augmentation) revient une réduction de a% suivie d'une réduction de b% ?
Sophie dit à son amie au téléphone : aux galeries on solde les maillots de bain à 20% et avec ma carte j'ai une réduction de 30%. Ainsi je paierais les maillots de bain à 50% de leur valeur . Qu'en pensez-vous ?
J'ai payé mon maillot 100F. Quel était son prix d'origine?

II.6- Leçon minimale pour atteindre ces objectifs

1- Rappel : Augmenter de 10% revient à multiplier par 1,1.

Exemple : $50 + 50\times 10/100=55$ et plus généralement $x + x\times10/100=x\times(1+0,1)$
Exercice : augmenter de 20 % veut dire ....
de même réduire de 10%

2. Maintenant j'ai le nombre de départ et le nombre d'arrivée d'une application linéaire. Comment trouve-t-on le coefficient ?
Exemple: 100------->180. Le coefficient de l'application est 180/100=1,8.
Exercice: quel est le coefficient de l'application linéaire qui, à 100 fait correspondre 0,8 ?

3. Ai-je augmenté ou réduit ? De quel pourcentage ? 180-100=80 pour cent; ou bien 1,8=1+0,8=1+80%
Exercice : même question avec l'application linéaire de l'exercice précèdent.

4. Maintenant j'augmente de 10% et je réduis le résultat de 20%

Exemple : pour 50, augmenté de 10% donne 55 puis $55 \times 0,8= 44$
Exercice : augmentez de 30% et réduisez ensuite le résultat de 30%

5. A quel pourcentage de variation cela correspond-il ? C'est une réduction de 50-44=6 pour 50 c'est à dire 12%.
Exercice : calculer le pourcentage de variation de l'enchaînement précédent.

6. Conclusions

II.7- Leçon classique avec progression raisonnable ayant les mêmes objectifs didactiques

1.Rappels :
L'application qui fait correspondre un prix au prix réduit (ou augmenté) est une application linéaire
Calcul du coefficient directeur en fonction du pourcentage de variation
Comment calculer le pourcentage de variation connaissant le coefficient de l'application linéaire

2. Reconnaître deux applications linéaires enchaînées
Calculer une image par la composition, un antécédent
Calcul de l'application linéaire composée
Comment décomposer une application si nécessaire

3. Calculer un enchaînement de variations
Théorèmes d'enchaînement
Comparer des enchaînements
Calculer le pourcentage de variation associé à l'application composée

4. Maniement des expressions algébriques comme preuve d'équivalence
Substitution

Cette leçon ainsi traitée dépasse de loin les programmes et des objectifs visés plus haut.

II.8- Objectifs non mathématiques

Faire débattre pour savoir si les deux applications sont équivalentes pour toute valeur
Utiliser le langage algébrique comme preuve syntaxique
Ces deux derniers objectifs sont détruits par les deux cours précédents.

III. - La situation réalisée

1. A est le programme : « réduire de 10%, augmenter le résultat obtenu de 20% », B est le programme « augmenter de 8% ».
2. Deux groupes d'élèves G_1 et G_2 appliquent leurs programmes à des nombres simples.
3. Un groupe G_3 constitué d'élèves ayant travaillé sur A et sur B constatent qu'ils donnent les mêmes résultats.
4. Un groupe G_4 doit effectuer des calculs rapidement, et n'a en main que le programme A, il demande de l'aide à G_3 qui lui dit que A et B donnent les mêmes résultats.
5. La question est d'expliquer pourquoi ces deux programmes donnent le même résultats. Les élèves proposent alors d'écrire les programmes dans le cas général et c'est alors que se pose le problème de transcription algébrique du programme A (c'est à ce moment précis que Simon intervient) qui devra être comparée à celle du programme B.

La situation expérimentée n'est pas satisfaisante, en particulier nous n'avons pas trouvé une situation correcte des phases 3 et 4.0

VISITE DE L'ATELIER « THÉORIE DES SITUATIONS »

par Guy Brousseau

LADIST - Bordeaux

Il s'agit plutôt d'un atelier dans un chantier. De toute façon, la T. S. (la théorie des situations) est utilisée par des chercheurs divers et elle leur appartient autant qu'à moi. De sorte que s'il y a souvent coopération entre les chercheurs, il peut y avoir des interprétations et des usages différents et éventuellement divergents. Les exposés sur la théorie des situations n'ont pas été organisés ni même coordonnés.

L'entreprise :

C'était autrefois l 'IREM de Bordeaux, puis seulement une de ses parties, puis le Laboratoire Aquitain de Didactique des Sciences et des Techniques de l'Université Bordeaux 1 (LADiST). Aujourd'hui elle est en passe de devenir le Laboratoire « Didactique et Anthropologie des Enseignements Scientifiques et Techniques » (DAEST) de l'Université Victor Ségalen Bordeaux 2 et de l'IUFM d'Aquitaine. Pourquoi avons nous changé ? réponse : Bonne question !

Les Ouvriers

Eugène Comin [1], Doctorant et professeur de lycée. Il travaille sur l'enseignement de la proportionnalité et de la linéarité de l'école primaire au collège
Dominique Woillez, Doctorante et professeur agrégée en collège. Elle travaille sur l'enseignement de l'algèbre au collège et son articulation avec l'arithmétique.
Tous deux en sont à la phase de rédaction.
Guy Brousseau prépare sa retraite pour le mois de septembre 1998.

Le Chantier

C'est celui de la théorie des situations didactiques en mathématiques

a) L'idée de base est de modéliser directement les conditions dans lesquelles s'activent les acteurs de l'enseignement « professeurs et élèves » en ne retenant que celles qui sont « nécessaires »dans un modèle appelé « situation » pour expliquer certains des observables : les déclarations, les décisions, les réponses, etc.

[1] Eugène Comin a animé un atelier pendant l'UE. Fondé sur l'analyse d'un document audiovisuel, le contenu de son atelier n'est pas reproduit dans ces actes.

Le chercheur travaille sur son modèle avec deux types de questions : celles concernant la contingence traitée par son modèle et celle de la consistance de son modèle, consistance interne (non contradiction) ou consistance avec les connaissances déjà établies dans des « théories » scientifiques.
L'idée consiste à prendre directement comme objet d'étude ce que le professeur conçoit, met en œuvre, gère et communique. Dans cette approche, le bénéfice escompté est de permettre un accès plus direct à un mathématicien de formation et une certaine économie dans les cultures psychologique, sociologique, sémiologique, épistémologique etc. nécessaires sinon à la conception de la didactique, du moins à sa délimitation dans ses usages.

b) Une situation est donnée par un ensemble d'états possibles d'un « milieu » parmi lesquels un actant choisit à chacune de ses décisions un nouvel état parmi ceux qui lui sont permis à ce moment là par des règles qui lui ont été proposées. L'actant cherche à mener le milieu à un état final déclaré gagnant et à éviter les états « perdants ». Une connaissance est un moyen de choisir une stratégie ou d'en écarter certaines autres. La connaissance déterminée par une situation est celle qui engendre sa stratégie optimale. On suppose que l'actant cherche à obtenir « le meilleur résultat au meilleur prix ». Les situations peuvent être « effectives » et activer des comportements, voire provoquer des apprentissages, elles peuvent aussi être fictives (par ex. expérience mentale).

c) Dans ce travail, il faut accepter que les termes du modèle soient différents des termes utilisés de façon courante pour désigner les objets de la contingence – l'enseignement - que l'on veut modéliser, surtout de ceux utilisés par les professionnels de l'enseignement. Leurs concepts et leur langage n'ayant pas la même fonction que les concepts et le langage scientifique ne peuvent pas être tenus a priori pour pertinents dans ce dernier rôle (même s'il arrive qu'ils le soient). Réciproquement il n'y a aucune raison pour l'instant de proposer aux professeurs de modifier leur répertoire. Le risque est grand de leur voir mettre leurs concepts habituels sous les nouveaux mots. Il arrive que les contacts fréquents des didacticiens avec les professeurs (ils sont eux même professeurs la plupart du temps) les conduisent à diffuser des points de vues et des termes encore insuffisamment « travaillés » et qu'il est impossible ensuite de reprendre.

d) L'approche systémique n'est pas la seule possible. Elle n'est pas contradictoire avec l'approche anthropologique. Elles seraient plutôt complémentaires, et on peut traiter certaines mêmes questions avec l'une et avec l'autre, et obtenir des résultats similaires. Suivant les sujets et la commodité, j'utilise l'une ou l'autre. Par contre, la nécessité de construire un système scientifiquement cohérent peut amener à éliminer d'un exposé les « concepts étrangers ». La Théorie anthropologique donne un fondement plus général que l'approche systémique. Elle permet une approche plus délibérée, plus souple et plus rigoureuse dans l'observation et l'analyse des objets en présence. La théorie des situations est pour moi plus commode pour l'ingénierie, pour la conception (ingénierie) et l'étude du fonctionnement des systèmes (expérimentation) et pour le questionnement. Toute les deux visent l'explication et la prévision des phénomènes liés à l'enseignement et prennent en compte les points de vue économiques des actions étudiées et leur clôture écologique.

e) Ainsi, la didactique des mathématiques est l'étude des conditions (spécifiques) de la diffusion des connaissances mathématiques nécessaires aux institutions et aux hommes (Comparer avec la définition de l'économie). Il s'agit de comprendre et de reproduire en la transposant l'aventure spécifique à la création d'une connaissance. Quelle aventure faut-il avoir vécue pour acquérir un usage raffiné de l'algèbre ? Ce n'est sûrement pas la même que celle qui conduit à la géométrie. Quelles genèses didactiques peut-on en proposer aux élèves ? lesquelles sont viables, lesquelles ne le sont pas ? Les activités didactiques (mutatis mutandis les activités économiques) peuvent être décrites et analysées de points de vue très différents (évoqués plus haut) mais elles ne peuvent être produites que par des réorganisations et des « problématisations » des mathématiques qui sont par nature des activités mathématiques (effectuées par les mathématiciens producteurs de mathématiques). D'autre part, la signification didactique de ces analyses ne peut être importée que par le moyen de théories spécifiques (didactiques) . Par conséquent, ces théories qui ont une adhérence mathématique importante, doivent être connues et en grande partie faites par des mathématiciens, à qui elles s'adressent d'ailleurs. Avec Thurston, j'appelle mathématiciens ceux qui accroissent la compréhension humaine des mathématiques.

f) De nombreux concepts « métadidactiques » ont dû être construits mais on essaie de n'en utiliser que le moins possible pour expliquer un phénomène donné. Les études relatives à la didactique des nombres, des rationnels, des probabilités, de la géométrie ou de l'algèbre comme aujourd'hui sont plus importantes pour moi que celles sur les obstacles, sur le contrat didactique, ou sur l'institutionnalisation.

g) La didactique n'est attachée à aucune idéologie pédagogique particulière. Des situations complexes ne marchent pas nécessairement mieux que des simples. Il s'agit d'abord de modéliser, de comprendre et d'expliquer toutes les stratégies d'enseignement et de prévoir leurs résultats.

Les travaux

a) Théoriques (nous n'en parlerons pas) : utiliser la méthode des situations, c'est banalement s'interroger sur les enjeux et pour chaque attente du professeur, sur les raisons qu'aurait l'élève de faire telle chose plutôt que telle autre ? J'ai apporté une grille destinée à interroger un projet de leçon ou une phase d'enseignement afin d'y rechercher les éléments d'identification de la situation et d'en prévoir les effets (cf. annexe du cours de Montréal). Les études théoriques ont pour objet de permettre de vérifier la consistance ou la compatibilité des modèles. La principale vertu des théories, c'est de permettre ne pas perdre les connaissances acquises ; à condition que les chercheurs les utilisent vraiment pour chercher la vérité, en n'hésitant pas à rejeter les modèles contradictoires (faux) ou inadéquats.

b) Expérimentaux
L'introduction de l'algèbre dès l'école primaire et les inconvénients des introductions précoces maladroites ont été étudiées à Bordeaux depuis 1960 :

- l'introduction d'un code pour désigner des objets à l'école maternelle avec la thèse de J. Pérès,
- l'addition à trou,

- l'inversion de la multiplication à trou,
- l'introduction de l'algèbre en troisième par l'étude des inégalités (Mercedes Diez)

Il en est de même pour la proportionnalité et la linéarité, en particulier pour l'étude de situations « fondamentales » (certaines bien connues, telles que les feuilles de papier, le puzzle, le pantographe etc.)

Les résultats présentés

Nos études sur l'enseignement de l'algèbre nous ont donné des indices nets d'un phénomène important. L'enseignement précoce de bribes d'algèbre (les signes +,- etc. et surtout =) et la disparition, sans substitut clairement annoncé, des enseignements de contrôle (par exemple la théorie des rapports au collège) et d'usage (par exemple l'écriture des unités auprès des nombres manipulés) conduisent, avec d'autres circonstances, à des difficultés réelles et à des échecs importants.

NDLR Suite aux interventions des conférenciers, les participants de l'UE étaient invités à formuler des questions. Nous reproduisons, ci-dessous, la liste de questions adressées à Guy Brousseau et les éléments de réponses que celui-ci leur a apportés.

QUESTIONS À GUY BROUSSEAU

1) Préciser le terme de « consistance » et la différence entre " contradiction " et « paradoxe ».
2) La théorie des situations est-elle une théorie des régulations ? Des éclaircissements sont demandés.
3) Comment la théorie des situations modélise-t-elle le traitement des erreurs ?
4) Les situations fondamentales sont elles reproductibles ?
5) Quelle est la distinction entre contrat pédagogique et contrat didactique ?
6) Le problème du transfert a été évoqué. De quel transfert s'agit-il ?
7) Des exemples de raisonnements arithmétiques qui ont disparu quand l'algèbre a supplanté l'arithmétique
8) Préciser les différences entre proportionnalité et fonction linéaire : quelles sont les difficultés du passage de l'une à l'autre ?
9) La proportionnalité s'est formalisée au XVIII^{e} siècle ! Comment et pourquoi ?
10) Quelle est la distinction entre « connaissances » et « savoirs » ?
11) Dans quel sens un enseignant pourrait-il utiliser la notion de situation fondamentale dans son travail quotidien !

***Eléments de réponses** (certains bien trop rapides)*

1 . Consistance, contradiction, paradoxes (Q 1)

Consistance : non contradiction.
Un modèle (au sens des sciences expérimentales, pas au sens de la logique mathématique) est composé d'éléments, certains pertinents donc concrètement significatifs, c'est-à-dire observables, autrement dit définis à l'aide d'un modèle de « contingence » d'autres non concrètement significatifs.
Un modèle est un assemblage d'observables et de relations qui permet de prévoir (de calculer) d'autres observables.
Il comprend des calculs et des déclarations qui sont fournis par une théorie (ensemble d'objets et de relations « établis ») et par des raisonnements (formels).
L'ensemble des déclarations liées au modèle doit être consistant, c'est-à-dire non contradictoire.
Si deux modèles prévoient, dans les mêmes conditions, deux observations incompatibles, ils ne peuvent pas entrer dans une même théorie. Formellement, ces deux modèles sont contradictoires.
Supposons maintenant qu'au cours d'une activité de recherche, un « même modèle » conduise à prévoir dans certaines conditions deux résultats incompatibles. Le modèle est « inconsistant », contradictoire. La contradiction peut avoir une origine

- logique, « syntaxique », c'est une contradiction au sens strict : un raisonnement est faux, (la contradiction stricte tient à l'acceptation d'axiomes contradictoires).
- ou sémantique (les objets sont mal choisis, définis ou interprétés, la contingence n'est pas ce que l'on croyait etc).

Le modèle doit alors être rejeté. Cela ne veut pas dire que rien de ce modèle ne peut être récupéré, en particulier dans le cas d'une contradiction avec la contingence, par exemple en distinguant des objets que l'on avait confondus ou en supprimant des conditions que l'on avait admises sans nécessité ou par d'autres moyens. Si un nouveau modèle lève la contradiction, alors on sait que celle-ci résultait d'une mauvaise approche. On dira alors que l'approche précédente était paradoxale parce qu'elle faisait apparaître une contradiction qui a pu être levée.
Par extension on dira « paradoxales » des approches qui tendent à faire apparaître la contingence comme paradoxale parce qu'on postule implicitement que la contingence n'est pas contradictoire et que le monde est intelligible.
En théorie des situations les paradoxes « fondamentaux » montrent que les modèles naïfs « statiques » ne résolvent pas le problème théorique de décrire l'acte d'enseigner et la nécessité de développer en une théorie originale, des instruments d'analyse qui fassent leur place aux composantes dialectiques, historiques et d'intentionnalité des situations.

2 . La théorie des situations est une théorie des régulations (à plus d'un titre). (Q 2)

Dans la théorie des situations non didactiques isolées (comportements stables) ou à usages didactiques (apprentissages) : A partir d'un connaissance (fournie sous une forme quelconque) la T.S. se propose de construire un modèle des conditions qui justifient sa mise en œuvre, puis

son apparition comme moyen de résoudre un « problème » c'est-à-dire comme moyen de maintenir ou de rétablir des conditions acceptables par le sujet (rendues inconfortables par le problème). Ainsi en T.S., le sujet est un homéostat : le milieu détruit les équilibres et le sujet produit des actions pour rétablir ses équilibres fondamentaux. C'est vrai pour l'élève depuis l'approche behavioriste et surtout dans l'approche Piagétienne. C'est vrai aussi pour le professeur.
Les métaphores flatteuses (former, donner, montrer, etc.) qui représentent le professeur comme l'acteur principal mettent l'accent sur ses décisions a priori et sur ses actions en négligeant ses réactions à des indices pour maintenir certaines conditions.
Dans la théorie des situations didactiques (i.e. comprenant un acteur didactique), la plupart des interventions de l'enseignant sont plus faciles à interpréter comme des réactions. D'autre part, la plupart des décisions ne peuvent être fixées de façon définitive indépendamment d'une certaine « historicité » des déroulements, et la plupart des solutions localement acceptables deviennent des absurdités si on les systématise, la plupart des paramètres ne peuvent qu'être optimisés (les maximiser isolément provoque des erreurs grossières). Concrètement, le professeur « régule » un potentiel de motivations, de connaissances, etc. Il choisit des exercices pour modifier « un état de connaissances » (ou plutôt un rapport au savoir) des élèves et cherche en permanence un équilibre entre des conditions contraires.
Exemples : l'évaluation, les régulations internes (erreurs) ou externes (échecs) la régularisation de « l'hétérogénéité » des classes etc. Le sur et le sous apprentissage etc.
Renvoi au paragraphe suivant, à la thèse de Florence Genestoux (quand elle paraîtra) et au texte sur les stratégies du professeur (Cours de Montréal).

3 . Les erreurs et leur gestion, suivant la théorie des situations. (Q 3)

Pour décrire l'apparition, les effets, le rôle et le traitement des « erreurs » dans le système didactique, la T.S. propose un moyen d'analyse assez révélateur de sa méthode. Il s'agit d'abord de localiser le système dans lequel se produit l'erreur, celui dans lequel elle est repérée, celui dans lequel elle est « corrigée » etc. de façon à identifier ses causes, sa fonction, les répertoires où elle va se répercuter etc. Les questions dont nous allons esquisser l'étude sont très générales (du genre quel paradigme de réponses offriront les divers sous systèmes en présence suivant leurs répertoires ? Ou quels peuvent être les effets à long terme de certaines « gestions » des erreurs). Nous laisserons de côté ce qui est le plus important pour la didactique : l'analyse spécifique des erreurs attachées à chaque connaissance, et l'usage qui en est fait dans l'enseignement.

1. Comment un fait, apparu dans l'interaction d'un actant avec un certain milieu va-t-il être interprété comme « une erreur » ?

Pour qu'un fait soit reconnu (par un observateur) comme une erreur il faut :

a) que ce fait soit identifié comme une production d'un sujet (action, ou message ou preuve etc.)
b) que ce fait soit rapporté à un système de référence admis comme but (action) ou comme règle de production (langage) ou comme justification (validation)
c) que le système de référence produise un fait, la « norme », contraire ou incompatible avec le fait relevé (« bonne » décision, « bonne » formulation etc).

Pour que cette erreur soit identifiée par un des acteurs du système, il faut que le fait identifié comme une erreur soit « de conséquence » pour l'action en cours, c'est à dire que la différence entre le fait et sa norme soit

a) pertinente pour l'action en cours (elle intervient dans une décision ou dans une évolution du milieu)
b) qu'elle rende la décision ou l'évolution inadéquate (impropre, trop coûteuse etc.) à l'action de celui qui porte le jugement d'erreur.

Par exemple, il se peut qu'une réponse des élèves apparaisse à ces élèves comme correcte (« conforme » à leur répertoire « effectif »), mais qu'elle soit déclarée comme une erreur (de mathématiques par ex.) par le professeur, en référence au répertoire de connaissances qu'il vise pour sa classe, (il lui reste à modifier le répertoire des élèves pour leur faire interpréter ce fait comme une erreur). Et ceci bien que peut-être, formellement, il existe une théorie mathématique où même une conception dans laquelle cette réponse serait tenue pour vraie. D'autre part, il arrive que cette erreur des élèves ait été prévue comme un résultat possible de l'exercice et même que le professeur ait souhaité qu'elle se produise parce que sa correction fait partie de l'apprentissage et de l'enseignement en cours. Alors cette erreur des élèves n'est un « accident » que pour eux, c'est un fait nécessaire à l'activité du professeur, partie intégrante du déroulement de sa leçon. L'étude peut être poursuivie ainsi pour déployer toutes les significations d'une erreur et tous les types d'erreurs.
Il faut donc rapporter les " erreurs " aux systèmes et aux situations dans lesquelles elles devront être traitées. La T.S. montrera son intérêt si cette affectation permet une meilleure compréhension, une meilleure gestion des erreurs et une meilleure prédiction des effets du couple erreur/réponse du système à long terme.
On peut trouver de nombreux exemples d'erreurs relatives de ce genre à l'école élémentaire. Une solution (vraie) trouvée " par hasard " (à la devinette dira le professeur) sera rejetée comme une erreur (par rapport au projet didactique) alors que la recherche par étude exhaustive de tous les cas (ou par exhaustion) ou même l'exhibition de la solution seront ailleurs saluées comme des réussites légitimes...

2 . L'hyposystème : erreurs/situation/répertoire d'identification/répertoire de traitement.
La détermination de ces systèmes peut se faire indépendamment par l'observation et par la modélisation a priori. Cette analyse peut fournir des questions, des explications et des moyens didactiques d'intervention. Les études d'erreurs qui ne les replacent pas dans leur contexte et leur fonctionnement dans les situations didactiques, conduisent généralement à des décisions didactiques fausses.

Exemples d'études d'erreurs et de leurs traitements :

- Dans quels types de situations non didactiques ou didactiques les erreurs jouent elles un rôle négatif, positif ? sont elles « nécessaires » ? l'apprentissage par essais et erreurs est-il avantageux ? toujours ?
- Les erreurs dans l'émergence d'un théorème implicite (qui dira vingt ?) où on montre que seuls apprennent les élèves qui ont fait certaines erreurs (d'où l'usage des contre exemples). Certaines erreurs sont produites par des connaissances, lesquelles sont l'indice d'un obstacle épistémologique ? Pourquoi en situation non didactique, les premières reproductions d'un « algorithme » produisent-elles plus d'erreurs que sa production première ? Quels sont les répertoires d'erreurs diagnostiquées par les

professeur (DEA de Nadine Milhaud), Pourquoi sont-ils ajustés sur les types d'interventions ? Pourquoi un professeur ne peut pas faire usage, dans sa réponse publique à ses élèves, d'une explication « scientifique » des erreurs qu'il perçoit ?

- Toute activité qui donne à l'élève l'occasion de faire des erreurs produit de l'hétérogénéité dans la classe. Toute « correction » est supposée rétablir l'homogénéité par rapport à la question posée, sous quelles conditions ?
- Quelles sont les erreurs qui vont pouvoir être traitées dans l'action didactique, et par conséquent oubliées ? Quelles sont celles qui vont devoir être régulées à l'extérieur du processus normal et qui vont donc constituer des échecs ? Quelle différence y a-t-il entre le traitement des erreurs (régulation interne au système) et celui des échecs qui appellent des régulations externes.
- Le système didactique et la noosphère peuvent-ils oublier ou négliger le fait qu'avec certaines connaissances « intermédiaires », certaines erreurs sont inévitables, qu'il est impossible d'enseigner directement une connaissance achevée qui assure une fiabilité absolue, et que tenter cette gageure est presque toujours inefficace.

Exemple d'erreur didactique dans le traitement des erreurs des élèves : l'usage inapproprié des évaluations par les administrations d'enseignement

- Cette erreur nous a conduit à la sous évaluation des résultats utilisables par les élèves (redoublements inutiles), à un jugement trop sévère sur les projets d'enseignement (trouvés toujours trop difficiles), à la baisse des ambitions didactique et à la baisse du niveau des élèves. Cf. ma communication/prévision à la rencontre interaméricaine de l'ICMI à Campinas (1975) et les explications détaillées données au congrès de Budapest (1988) par J. Centeno et moi.
- Pour résumer, cette évaluation externe des élèves est basée sur leurs erreurs (jamais on ne « peut » prendre en compte les indices de connaissances ou de savoir, surtout ceux qui dépendent des conditions « historiques » dans lesquelles ils prennent naissance). Elle dénie la transposition didactique et ignore le rôle des connaissances dans l'activation et l'apprentissage des savoirs. Ainsi, elle laisse entendre que la totalité des résultats de l'enseignement se situe dans la mémoire des élèves (selon ce modèle les professeurs n'auraient pas à modifier leur enseignement au cours de l'apprentissage). Or, les élèves développent des connaissances non observables avec les tests et les professeurs ne savent pas « gérer » les objectifs de haut niveau taxonomique.

Nous arrêterons là l'étude générale de ce problème très important car la réponse est déjà trop longue, et c'est une erreur !

4 . Situation fondamentale et reproductibilité,(Q 4) Usages didactiques (Q 11)

a) Toute situation « s » mobilise des connaissances comme éléments préalables pour « poser le problème » ou pour envisager la stratégie de base (indispensable pour comprendre la question) mais elle est « fondamentale » pour une certaine connaissance qui commande la mise en œuvre et le contrôle de la stratégie optimale, désignons la par « c » La connaissance de cette situation permet de déterminer les variables cognitives Vi et leurs bornes, donc, le domaine de

cette connaissance D(s, c), (qui est Π [Vi]). Au delà de ces bornes, d'autres connaissances deviennent solutions optimales de s.
Par conséquent la situation « s » établit des « proximités » entre connaissances (co-présence dans le milieu, complémentarité ou substituabilité dans les solutions, modélisation, reformulation, ou preuve dans la compréhension ou l'explication, succession temporelle, etc.
Certains des rapprochements ainsi réalisés par les situations rencontrées produisent chez les élèves des agrégations de connaissances et donc des connaissances nouvelles. Une partie seulement de ces agrégations présente un intérêt mathématique cognitif ou didactique.

b) Les connaissances données comme fondamentales par la culture sont souvent des agrégats de connaissances plus élémentaires, liées par un tissu serré de relations logiques, mathématiques et didactiques (qui évolue avec le temps). Elles sont le moyen le plus économique pour représenter, communiquer, déduire ou apprendre sous une forme générale un ensemble exhaustif de connaissances particulières ou de cas d'espèces.
Considérons une connaissance fondamentale C pour la connaissance c.
Propriété 1 : Alors si le domaine D(s,c) engendré par les variables cognitives (et didactiques) de s, contient toutes les situations (tous les exercices) relatives à cette connaissance C, alors s est une situation fondamentale de C. Est-elle unique ?

c) Mais il n'est pas sûr qu'une situation « correspondant » à une connaissance fondamentale engendre (par ses variables cognitives) toutes les situations des connaissances « élémentaires » agrégées dans la connaissance fondamentale. Autrement dit, les procédés d'agrégation « logique » des connaissances ne coïncident pas avec les « lois » d'agrégation résultant de la fréquentation des situations. Les causes de la connaissance ou de l'apprentissage d'une notion ne coïncident pas avec les raisons de la « savoir », c'est-à-dire de la déduire de sa place dans la culture.
Ainsi s'impose d'abord la recherche d'une situation qui représente au mieux les différents usages d'un concept fondamental et le milieu où il prend son sens. Cette situation « fondamentale » a des chances de permettre la construction d'un milieu riche en liaisons pertinentes relative au concept visé. Quand on la trouve il arrive qu'elle réalise la propriété 1 ci-dessus.
Un usage primitif de la T.S. a consisté à développer les différentes situations qui représentent les diverses formes, usages et conditions d'acquisition d'une même connaissance, dans un ordre déterminé (s. action → modèle implicite/connaissance ; s. formulation → message/langage, s. preuve → démonstration/théorie)

d) Ensuite, dans la mesure où une telle situation ne peut être investie d'emblée par un sujet, il s'agit d'identifier une situation première qui entamera le processus de « construction progressive » de la connaissance et du savoir visé. Cette dernière situation sera dite aussi « fondamentale » pour ce concept (ou plus exactement pour une certaine genèse de ce concept. Dans ce sens les situations « fondamentales » ne sont ni plus ni moins reproductibles que les autres.

e) En quel sens un enseignant peut-il utiliser la notion de situation fondamentale ? (Q 11)
Sûrement pas comme savoir à enseigner !
Pour maintenir la dialectique au cours d'une genèse didactique

Pour faire dévolution d'un projet d'apprentissage. Etc.
Quelques exemples :
L'intérêt et les dangers des problèmes types, ou de l'apprentissage par analogie.

5 . Quelle est la distinction entre « connaissances » et « savoirs » (Q 10)

La T.S. assume qu'il n'est pas possible de confondre les connaissances dans leurs fonctions de moyens de décision, (outils) et les connaissances comme objets de l'action des institutions qui les identifient, les répertorient ou les justifient (objets) et que nous appellerons « savoirs » . La « conversion » (?) des connaissances en savoirs peut prendre des siècles à l'humanité et les élèves, comme tout individu isolé, ne peuvent pas le faire (sinon par réification et imitation). Inversement la « conversion » des savoirs en moyens d'action (l'application ?) n'a rien d'évident.
La forme la plus pratique des connaissances est la forme *procédurale* et la forme la plus « commode » des savoirs est *déclarative*, mais les deux formes existent dans les deux types de situations (de sorte que les termes connaissances et savoirs ne se traduisent pas exactement par know how -comment faire- et par knowledge -savoir-). De même les relations entre les connaissances sont souvent d'ordre causal, les relations entre les savoirs sont de l'ordre de la raison. Les deux notions sont évidemment loin de coïncider.
Remarquons que les situations d'action révèlent (chez le sujet) des connaissances qui peuvent être aussi bien des connaissances non repérables par le sujet en termes de savoir que des connaissances converties de façon consciente à partir de savoirs parfaitement explicitables par le sujet.
En français et dans les langues latines, les termes « connaissances » et « savoir » bien que parfois synonymes, distinguent bien des sens voisins de ceux introduits ci-dessus.

6 . La distinction entre contrat pédagogique et contrat didactique (Q 5)

Renvoi pour le premier terme à l'ouvrage de Jeannine Filloux « le contrat pédagogique ». Il s'agit bien pour elle de préciser ce que la société, les parents, les élèves et les professeurs peuvent attendre les uns des autres, ainsi que les cadres éthiques, psychologiques et presque juridiques, de cette véritable partie du « contrat social ».
En ce qui concerne le « contrat didactique » une petite note historique s'impose, mais disons tout de suite que le contrat didactique n'est pas un contrat effectif (pas de conditions explicites ni même explicitables et connues des acteurs, pas de clauses de rupture ni de sanctions véritables), il collecte bien les attentes des partenaires et l'idée que chacun se fait des attentes de l'autre etc. mais il ne « fonctionne pas ». Il est condamné à être rompu et c'est au moment de la rupture que tout se passe comme s'il y avait eu un contrat... qui n'a jamais été passé.
Mes premiers travaux portaient sur la modélisation des situations (projetées ou créées par le professeur) à usage didactique. Une situation « didactique » était alors une généralisation d'un problème pour enseigner. Celles qui m'intéressaient étaient celles où le professeur n'avait pas besoin d'enseigner directement l'objet de son enseignement ni même de le montrer. Il se

contentait de « communiquer » l'énoncé et le but dans les termes déjà connus des élèves. Les interventions didactiques étaient des palliatifs à une situation didactique « insuffisante ».
Pour modéliser l'action du professeur j'ai commencé par espérer que ses interactions avec son « milieu » (l'élève et sa situation didactique au sens premier) étaient du même type que celles de l'élève (ou de toute personne) avec son propre milieu. Hélas j'ai dû déchanter : la relation didactique requiert des modèles différents spécifiques. Je ne pouvais pas faire entrer la relation didactique du professeur dans ma théorie des situations à usages didactiques, ni étendre l'adjectif didactique d'un objet qui sert à enseigner à une situation d'enseignement (encore que la situation comme « environnement » et l'action directe du professeur servent bien elles aussi).
Les caractéristiques qui m'apparurent les plus remarquables pour la relation didactique, décrite à l'aide des modèles de situation étaient les paradoxes que soulevaient les ambitions sociales des partenaires (paradoxes fondamentaux). J'entrepris donc alors l'étude de ce leurre qu'était le « contrat didactique ».
Il s'est avéré que l'étude du contrat didactique était exactement celle d'une situation dans laquelle s'exprime un système doué d'intention didactique, c'est-à-dire une situation didactique au sens actuel. Il a fallu replacer les situations précédemment explorées dans ce nouveau décor : situation non didactique (modèle), situation a didactique (contingence) car l'écart tient un rôle important dans l'analyse.

7 . Sur le transfert (Q 6)

Le transfert est un concept (assez grossier) utilisé par certains psychologues pour représenter ce qui se passe lorsqu'un sujet qui a appris une connaissance dans des circonstances précises, mobilise à nouveau ces connaissances dans des circonstances entièrement nouvelles pour lui... Il fait un transfert ! mais rien dans ce concept n'indique à quelles conditions. Les raisons que les observateurs ont de trouver la même connaissance utile dans les deux cas seraient elles les mêmes pour l'élève ? Merveilleuse féerie de l'empirisme : le monde y apparaît comme naturellement intelligible de façon univoque ! Pour moi, c'est une illusion que de vouloir l'importer en didactique. Seule la connaissance précise des situations peut dire s'il y a des raisons ou non d'observer l'usage spontané d'un même schème d'action, s'il y a des raisons pour l'identifier avec les mêmes instruments culturels etc. Inversement, il faut déterminer la cause et la signification pour le sujet de l'usage d'un même concept ou d'une même connaissance.

8 . Raisonnements arithmétiques qui ont disparu quand l'algèbre a « supplanté » l'arithmétique. (Q 7)

Bien connus,
- La disparition des distinctions entre nombres concrets (vecteurs dans une EV ou dans un module) et nombres abstraits (scalaires ou coefficients) et les marques de cette distinction : l'indication des unités et le traitement formel du nom des unités.
- Le raisonnement par fausse position avec une correction par récurrence finie pour les « partages inégaux » additifs auquel on substitue un petit graphe.

- Les raisonnements pour les partages inégaux à parts multiples (calculs sur l'arithme)
- Le raisonnement par fausse position
- Les « échanges », les substitutions et les raisonnements par fausse position pour résoudre différents types de systèmes de deux ou plus équations du premier degré. Les « règles de trois » multiples.
- Les raisonnements arithmétiques pour résoudre les problèmes de barycentre tels que les problèmes de mélange ou d'alliages.
- L'usage des pourcentages et des valeurs pour donner un allure de nombre naturel aux coefficients...
- La pratique de problèmes où apparaît un grand nombre de variables liées par des relations simples : linéaires ou affines, les problèmes d'inversion arithmétique de formules affines

Etc.

Voir la thèse de Dominique Woillez quand elle paraîtra.

9 . Proportionnalité et fonction linéaire. (Q 8)

Proportion de nombres

La proportionnalité est à l'origine une propriété qui caractérise certains arrangements de **quatre** nombres (a, b, c, d) pris dans cet ordre. Ce quadruplet est accompagné d'un vocabulaire spécifique pour les couples qui y figurent : les extrêmes sont a et d, les moyens sont b et c, les antécédents sont a et b et les conséquents c et d. Les antécédents et les conséquents expriment des « rapports ».

La proportionnalité s'exprime par une expression « a est à b comme c est à d » qui laisse au destinataire le soin de déterminer ce que a est à b ou plus exactement quelle « opération » fait passer de a à b, la même faisant passer de c à d.

> La proportion est arithmétique dans (7, 4, 11, 8). Les rapports égaux (7 ; 4) et (11 ; 8) sont des rapports arithmétiques. Nous traduirions ceci aujourd'hui par a-b = c-d ou par « la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens »
>
> La proportion est géométrique dans (7, 4, 14, 8) et plus généralement quand a/b = c/d, autrement dit quand le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.
>
> Elle est inverse dans (7, 4, 8, 14), c'est à dire lorsque a/b = d/c
>
> Elle pourrait être harmonique etc.

Cette « généralisation » permet de mettre en évidence des similitudes entre les opérations « + » et « x » et entre les opérations « – » et « : » et de formuler des théorèmes « généraux » sur les proportions.

On peut considérer par exemple des « proportions continues » c'est-à-dire telles que (a, b, b, c) puis (b, c, c, e) etc. qui engendrent de la même façon, soit une suite géométrique, soit une suite arithmétique ou une suite harmonique selon le type de rapports considérés.

Variables proportionnelles

La proportionnalité est le moyen primitif d'étude des " fonctions mathématiques " au sens de relations entre des variables.

La fonction « la plus simple » est celle ou tout quadruplet déterminé par deux objets et leurs images forme une proportion : (a, f(a), b, f(b)) ou bien (a,b, f(a), f(b)). Elle exprime :

- que tout rapport est conservé (Le quadruplet est nécessaire pour exprimer les rapports rationnels avec des entiers
- ou encore que le rapport entre un objet et son image est constant (la rapport suffit dans tous les cas « concrets », si on peut utiliser les rapports rationnels.

On exprime cette propriété en disant que les variables (ou même que les grandeurs que ces variables représentent) sont « proportionnelles ».
On obtiendrait ainsi les translations (f(x) = x +a) et les homothéties (f(x)= a.x) numériques mais, à l'usage, seules les homothéties permettront d'attribuer aux variables en présence le qualificatif de proportionnelles.
Ainsi la proportionnalité est devenue une relation entre deux variables, ou entre deux suites, ou deux grandeurs ou même deux ensembles de vecteurs (colinéaires toutefois). C'est donc à ce moment une propriété qui caractérise un couple de variables.

Linéarité

Une fonction f est linéaire si f(u + v) = f(u) + f(v) et si f(λ.u) = λf(u) (dans un espace vectoriel)
Une homothétie numérique est un cas particulier d'application linéaire car
{∀(a, b) de R2, b non nul, a/b = f(a)/f(b)} équivaut à {{∀(a, b), b non nul, f(a)/a = f(b)/b = k}
et donc à ∀a, de R, f(a) = k.a
Alors, f(a+b) = k.(a + b) et d'après la distributivité de « . » sur « + » f(a+b) = k.a +k.b
D'où la conclusion.
Remarquez bien que la *fonction est linéaire* quand les *variables sont proportionnelles* (et que la distributivité est réalisée), que la fonction est déterminée par un coefficient, la proportion par l'égalité de deux rapports. Les rapports numériques et les coefficients sont accompagnés de « rapports de dimensions » qui suivent les mêmes règles, mais les produits en croix changent pour chaque couple et en général, n'ont pas de signification matérielle.

Fonctions (et fonctions de la linéarité)

Mais les proportions permettent de construire d'autres fonctions :
La fonction affine (les différences entre les images sont proportionnelles aux différences entre les valeurs, ou les rapports entre les variations sont conservés)
Les fonctions quadratiques, homographiques, exponentielles etc. peuvent ainsi être introduites par une proportionnalité entre certains éléments. Cette construction gardait la trace de l'époque ou la seule « fonction » concevable était la fonction linéaire, les autres fonctions devant se détacher d'elle et se définir par elle.

Tableaux de proportionnalité

Si deux variables sont proportionnelles à une même troisième, elles sont proportionnelles entre elles. Si A est proportionnelle à B et si B est proportionnelle à C alors A est proportionnelle à C (La composée de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire) etc.
Ces propriétés permettent de regrouper plusieurs fonctions linéaires d'un même ensemble en un tableau unique de nombres, que l'on peut traiter avec des techniques homogènes.
En fait, ce genre de tableau peut représenter aussi bien des fonctions numérique que des fonctions « vectorielles ». Exemple, les quantités de produits permettant de faire un gâteau pour divers nombres de personnes peuvent constituer un vecteur image sur lequel le langage de la proportionnalité fonctionne. Mais il n'en est pas de même si on considère les quantités d'un

certain produit comme l'ensemble de départ et les autres valeurs comme les images (elles ne forment pas facilement un vecteur). D'autre part, les lignes et les colonnes du tableau peuvent être interverties pour les calculs, mais pas pour l'interprétation. Si les colonnes sont des variables et les lignes des valeurs, une ligne n'est pas une variable. Cette distinction s'efface dans l'usage routinier des tableaux.

Quelques difficultés de « passage ».

Les difficultés sont nombreuses. Les causes aussi. Elles viennent entre autres de ce que l'usage vernaculaire des termes « proportions » et « proportionnel » est très relâché (proportions = rapports par ex.) et qu'il est spécialisé dans certaines structures numériques (entiers) ce qui le rend « incohérent » dans d'autres, surtout depuis que la théorie des rapports et proportions n'est plus au programme des collèges.

Le même vocabulaire caractérise deux nombres (proportion improprement utilisée comme synonyme de « l'un est multiple entier de l'autre »), trois nombres (pour la recherche d'un terme, dans la règle de trois), quatre nombres (une proportion), deux variables, une fonction, deux suite de nombres, chaque fois avec un sens différent.etc.

Les distinctions anciennes ne correspondent plus aux nouveaux usages. Il ne s'agit pas de maintenir en survie des « théories » obsolètes, mais ces nouveaux usages ne permettent pas la manipulation formelle des éléments de sens nécessaires (distinctions entre valeur et variable, scalaire et grandeur etc.) au cours de l'apprentissage.

Il ne s'agit pas non plus d'enseigner à tout prix la « proportionnalité » à l'ancienne puis de « passer » à l'algèbre, mais de fabriquer un environnement de connaissances, de techniques, de technologies et de théories pour traiter correctement ce que l'algèbre laissait à la charge des élèves et qui autrefois était fourni par la connaissance de l'arithmétique. Il n'y a aucun avantage à restaurer les problèmes de robinets, d'alliages ou de trains qui se croisent comme on peut le voir parfois aujourd'hui en troisième mais il faut donner aux élèves un moyen de traiter la mise en équation et la manipulation algébrique appropriée aux problèmes de la vie courante et des sciences appliquées et ne pas uniquement viser les mathématiques pour les mathématiques.

On peut introduire une certaine transposition de l'algèbre dans les classes élémentaires et le faire de façon intelligente et utile, mais, il faut payer le prix : il faut effectuer certaines recherches pour prévoir les difficultés, non seulement des élèves mais aussi celles de l'adaptation des enseignants, et celle des institutions (la didactique de l'adaptation didactique de l'institution), concevoir sur un terme assez long un projet de production de moyens d'enseignement et de formation des professeurs et n'introduire les réformes qu'à mesure de leur possibilité de « contrôle » (il faut d'abord que les mathématiciens qui daignent s'intéresser à la formation et à l'enseignement, et les IPR à qui le gouvernement vient de confier la responsabilité sur l'ensemble des niveaux d'enseignement, consentent à renoncer à leur croisade de conquête des lieux saints et au génocide des malheureux chercheurs en didactique).

Pour les suggestions voir la thèse d'Eugène Comin quand elle paraîtra.

Au XVIIIe siècle les proportions… (Q 9)

Le traitement oral ou écrit mais non formalisé des problèmes de proportionnalité est à peu près établi. Nous avons signalé tout ce qui repose sur la position des nombres. Il y a là la première ébauche de « lois » communes à diverses « structures » (une sorte de semi groupe ou de semi anneau). Cette analyse est porteuse de nombreuses notions encore à l'étude comme nous l'avons signalé.

Or l'algèbre banalise les transformations des proportions en les généralisant et donc rend inutile toute la construction linguistique qui supporte l'usage des proportions.

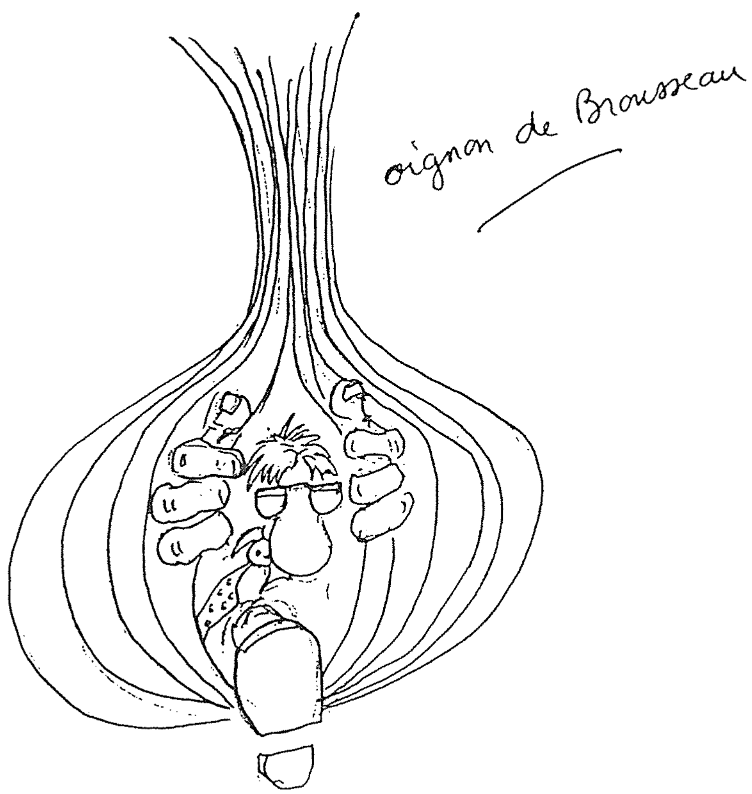
a/b = c/d est équivalent à c/d = a/b sans qu'il soit besoin de remarquer que les antécédents peuvent permuter avec les conséquents, a.d = b.c est obtenu par des opérations élémentaires de l'algèbre.

Pour éviter que l'algèbre détruise l'édifice, il faut lui donner un environnement formel spécifique qui traduise les formules orales et ne se laisse manipuler que selon les règles de la théorie des rapports et des proportions.

On écrit donc a/b = c/d sous la forme a : b : : c : d

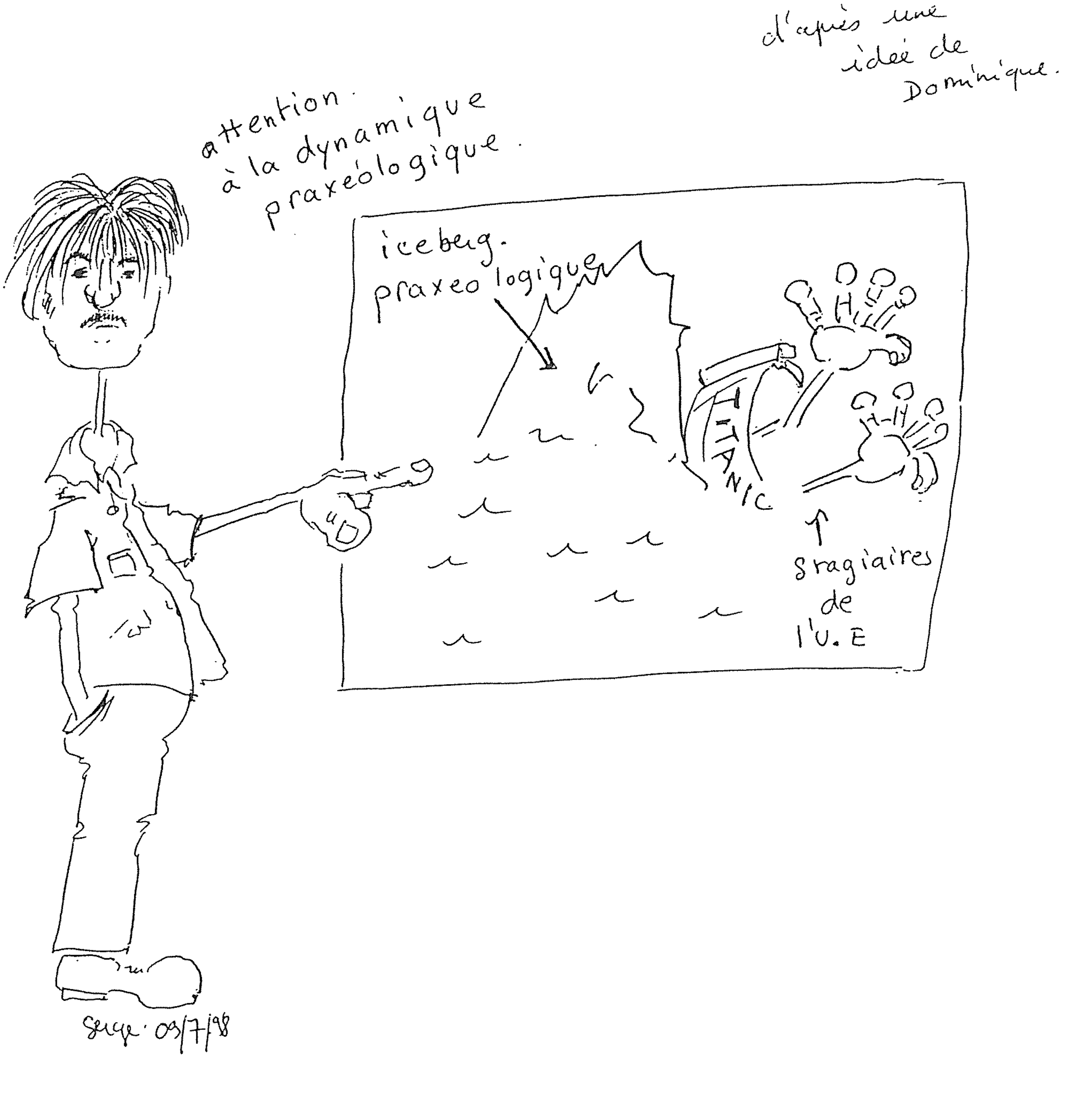
Certains ont voulu distinguer (avec des nombres de points différents) les proportions arithmétiques des géométriques mais cela va contre l'idée d'un même objet commun et de toute façon l'entreprise fera bientôt long feu.

Guy Brousseau



II

APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE


d'après une
idée de
Dominique.
attention
à la dynamique
praxéologique.
iceberg.
praxeologique
TITANIC
stagiaires
de
l'U.E
Serge. 03/7/98

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES : L'APPROCHE ANTHROPOLOGIQUE

par Yves Chevallard
IUFM d'Aix-Marseille

Leçon 1. – La notion d'organisation praxéologique

1. Pourquoi *anthropologique* ?

L'étiquette d'approche – ou de théorie – *anthropologique* semble proclamer une exclusivité (les autres approches, existantes ou possibles, ne mériteraient pas ce qualificatif...) dont il faut dire tout de suite qu'elle n'est qu'un effet de langage. Il n'y a aucune raison pour que l'organisation de savoir qui sera présentée dans les développements qui suivent se voit accorder le monopole de la référence légitime au champ de l'anthropologie, même si elle semble bien être, aujourd'hui, la seule à s'autodésigner ainsi.

Pour l'essentiel, je parlerai donc de *la* théorie anthropologique du didactique – *la* TAD – comme, en tel village, on vous présentera *le* Louis, *le* Charles, *le* François, etc. L'exclusivité n'est évidemment pas garantie ! Le fait de s'appeler Louis, Charles ou François ne dit pas grand chose de la personne qui le porte. C'est là peut-être que s'arrête la comparaison précédente. Car, bien sûr, ce n'est pas *sans raison* que l'on dit *anthropologique* la théorisation dont certains éléments seront explicités dans ci-après. De fait, l'emploi de cet adjectif *veut dire* quelque chose, et quelque chose dont il vaut mieux être prévenu pour éviter d'aller d'incompréhensions en malentendus.

Le point crucial à cet égard, dont nous découvrirons peu à peu toutes les implications, est que la TAD situe l'activité *mathématique*, et donc l'activité *d'étude* en mathématiques, *dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales*. Or ce parti pris épistémologique conduit qui s'y assujettit à *traverser* en tous sens – ou même à *ignorer* – nombre de frontières institutionnelles à l'intérieur desquelles il est pourtant d'usage de *se tenir*, parce que, ordinairement, on respecte le découpage du monde social que les institutions établies, et la culture courante qui en diffuse les messages à satiété, nous présentent comme *allant de soi*, quasi *naturel*, et en fin de compte *obligé*.

Selon cette *vulgate* du « culturellement correct », parler valablement de didactique des mathématiques, par exemple, suppose que l'on parle de certains objets distinctifs – les mathématiques, d'abord, et ensuite, solidairement, les élèves, les professeurs, les manuels, etc. –, *à l'exclusion d'à peu près tout autre type d'objets*, et en particulier de tous ceux que l'on croit trop vite scientifiquement non pertinents pour cette raison qu'ils apparaissent *culturellement étrangers* aux objets tenus pour emblématiques des questions de didactique des mathématiques.

Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*. Avant même d'examiner ce qu'est une praxéologie, on doit donc noter que l'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie *nullement* l'activité *mathématique* parmi les activités humaines : c'est *autrement* que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité.

2. La notion de praxéologie

2.1. Types de tâches. – À la racine de la notion de praxéologie se trouve les notions solidaires de *tâche*, t, et de *type* de tâches, T. Quand une tâche t relève d'un type de tâches T, on écrira parfois : $t \in T$. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches *parent*) s'exprime par un *verbe* : *balayer* la pièce, *développer* l'expression littérale donnée, *diviser* un entier par un autre, *saluer* un voisin, *lire* un mode d'emploi, *monter* l'escalier, *intégrer* la fonction $x \mapsto x\ln x$ entre $x = 1$ et $x = 2$, etc. Trois points doivent être soulignés immédiatement.

Tout d'abord, la notion de tâche employée ici est à l'évidence *plus large* que celle du français courant : se gratter la joue, marcher du divan jusqu'au buffet, et même sourire à quelqu'un, *sont ainsi des tâches*. Il s'agit là d'une mise en pratique particulièrement simple du « principe anthropologique » évoqué plus haut.

Ensuite, la notion de tâche, ou plutôt de *type* de tâches, suppose un objet relativement précis. *Monter un escalier* est un type de tâches, mais *monter*, tout court, n'en est pas un. De même, *calculer la valeur d'une fonction en un point* est un type de tâches ; mais *calculer*, tout court, est ce qu'on appellera un *genre* de tâches, qui appelle un déterminatif.

Concrètement, un genre de tâches n'existe que sous la forme de différents *types* de tâches, dont le contenu est étroitement spécifié. *Calculer...* est un genre de tâches ; *calculer la valeur (exacte) d'une expression numérique contenant un radical* est un type de tâches, de même que *calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée*. Tout au long des années de collège, le genre *Calculer...* s'enrichit de nouveaux types de tâches ; il en sera de même au lycée, où l'élève va d'abord apprendre à *calculer avec des vecteurs*, puis, plus tard, à *calculer une intégrale* ou *une primitive*, etc. Il en va de même, bien sûr, des genres *Démontrer...*, *Construire...*, ou encore *Exprimer... en fonction de...*

Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des *construits institutionnels*, dont la *re*construction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, *qui est l'objet même de la didactique*.

2.2. Techniques. – En dépit de la remarque précédente, on ne considérera d'abord, dans cette leçon, que la *statique* des praxéologies, en ignorant donc provisoirement la question de leur *dynamique*, et en particulier de leur *genèse*. Soit donc T un type de tâches *donné*. Une praxéologie relative à T précise (en principe) *une manière d'accomplir*, de *réaliser* les tâches $t \in T$: à une telle *manière de faire*, τ, on donne ici le nom de *technique* (du grec *tekhnê*, savoir-faire). Une praxéologie relative au type de tâches T contient donc, en principe, une technique τ relative à T. Elle contient ainsi un « bloc » $[T/\tau]$, qu'on appelle bloc *pratico-technique*, et qu'on identifiera génériquement à ce qu'on nomme couramment *un savoir-faire* : un certain type de tâches, T, et une certaine manière, τ, d'accomplir les tâches de ce type. Là encore, trois remarques doivent être faites d'emblée.

Tout d'abord, une technique τ – une « manière de faire » – ne réussit que sur une *partie* $P(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la *portée* de la technique : elle tend à *échouer* sur $T\backslash P(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, *en général*, accomplir les tâches du type T ».

La chose est évidente, mais très souvent oubliée, en mathématiques. Ainsi toute technique de calcul sur **N** échoue-t-elle à partir d'une certaine taille de nombres. Le fait qu'on ne sache pas *en général* factoriser un entier donné est notamment à la base de certaines techniques de *cryptographie*.

À cet égard, une technique peut être *supérieure* à une autre, sinon sur T tout entier, du moins sur une certaine partie de T : sujet sur lequel on reviendra à propos de l'*évaluation* des praxéologies.

Ensuite, une technique τ n'est pas nécessairement de nature *algorithmique* ou *quasi* algorithmique : il n'en est ainsi que dans de trop rares cas. Axiomatiser tel domaine des mathématiques, peindre un paysage, fonder une famille sont ainsi des types de tâches pour lesquelles il n'existe guère de technique algorithmique... Mais il est vrai qu'il semble exister une tendance assez générale à l'algorithmisation – encore que ce processus de *progrès technique* paraisse parfois durablement arrêté, en telle institution, à propos de tel type de tâches ou de tel complexe de types de tâches.

Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général *une seule* technique, ou du moins *un petit nombre* de techniques *institutionnellement reconnues*, à l'exclusion des techniques alternatives possibles – qui peuvent exister effectivement, mais alors en *d'autres* institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques *institutionnelles* dans I – faire ainsi, c'est naturel... –, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme *artificielles*, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables *passions institutionnelles* pour les techniques naturalisées dans l'institution.

Ainsi on peut déterminer le *signe* d'un binôme $ax+b$ en récrivant cette expression sous la forme $a[x-(-\frac{b}{a})]$, ce qui permet de conclure moyennant un petit raisonnement : $2-3x = -3(x-\frac{2}{3})$ est négatif si $x > \frac{2}{3}$, positif pour $x < \frac{2}{3}$; $5x+3 = 5[x-(-0{,}6)]$ est positif pour $x > -0{,}6$, négatif pour $x < -0{,}6$; etc. Mais cette manière de faire, à peu près inconnue dans l'enseignement secondaire français d'aujourd'hui, y recevrait sans doute un flot de critiques.

2.3. Technologies. – On entend par *technologie*, et on note généralement θ, un *discours rationnel* (*logos*) sur la technique – la *tekhnê* – τ, discours ayant pour objet premier de *justifier* « rationnellement » la technique τ, en nous assurant qu'elle permet bien d'accomplir les tâches du type T, c'est-à-dire de réaliser ce qui est prétendu. Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis telle autre institution. À nouveau trois remarques compléteront cette présentation.

On admettra d'abord comme un fait d'observation que, dans une institution I, quel que soit le type de tâches T, la technique τ relative à T est toujours accompagnée d'au moins un *embryon* ou, plus souvent encore, d'un *vestige* de technologie, θ. En nombre de cas, même, certains éléments technologiques sont *intégrés dans la technique*.

Ainsi en va-t-il traditionnellement en arithmétique élémentaire, où le même *petit discours* a une double fonction, technique et technologique, en ce qu'il permet tout à la fois de *trouver* le résultat demandé (fonction technique) et de *justifier* que c'est bien là le résultat attendu (fonction technologique), comme lorsqu'on dit : « Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront 3 *fois plus*, soit 3 fois 10 F ».

En outre, le fait qu'existe dans *I* une technique *canonique*, en principe seule reconnue et seule employée, confère à cette technique une vertu « autotechnologique » : faire ainsi n'appelle pas, ou plus, de justification, puisque c'est *la bonne* manière de faire (dans *I*).

On notera ensuite qu'une deuxième fonction de la technologie est d'*expliquer*, de *rendre intelligible*, d'*éclairer* la technique. Si la première fonction – justifier la technique – consiste à assurer que la technique donne bien ce qui est prétendu, cette deuxième fonction consiste à exposer *pourquoi* il en est bien ainsi. On notera que ces deux fonctions sont inégalement assumées par une technologie donnée. De ce point de vue, en mathématiques, la fonction de *justification* l'emporte traditionnellement, par le biais de l'exigence démonstrative, sur la fonction d'*explication*.

On sait qu'une équation $ax^2+bx+c = 0$ (où $a \neq 0$) a une racine double lorsque $b^2-4ac = 0$, n'a pas de racine (dans $\mathbb{R}$) si $b^2-4ac < 0$ etc. On peut *expliquer* un tel résultat à l'aide de la technologie des *nombres complexes*. Soit en effet z et $\overline{z}$ les racines complexes de l'équation. On a : $(z-\overline{z})^2 = (z+\overline{z})^2-4z\overline{z} = (b/a)^2-4(c/a) = (b^2-4ac)/a^2$. On voit ainsi que $b^2-4ac = 0$ si et seulement si $z = \overline{z}$; que si $b^2-4ac < 0$, alors z et $\overline{z}$ ne sauraient être réels, etc.

Enfin une troisième fonction correspond à un emploi plus actuel du terme de technologie : la fonction de *production* de techniques. On notera ainsi qu'il existe des technologies *potentielles*, en attente de techniques, qui ne sont encore technologies d'aucune technique ou de très peu de techniques. À cet égard, on soulignera le phénomène de *sous-exploitation* des technologies disponibles, tant du point de vue de la justification ou de l'explication que de la production.

C'est ainsi que la technologie des nombres *fractionnaires* (quotients de décimaux) permet d'engendrer une technique qui surclasse celle vue précédemment à propos du prix de sucettes, et que concrétise le schéma discursif suivant : « Si a choses valent b francs, alors x choses, soit $\frac{x}{a}$ fois a choses, vaudront $\frac{x}{a}$ *fois plus*, soit $\frac{x}{a}$ fois b francs. » Ainsi dira-t-on : « 11 sucettes coûtent $\frac{11}{8}$ *fois plus* (que 8 sucettes), soit $\frac{11}{8}$ fois 10 F (= 13,75 F) » ; et, par une extension hardie du sens de l'expression : « 3 sucettes coûtent $\frac{3}{8}$ *fois plus* (que 8 sucettes), soit $\frac{3}{8}$ fois 10 F (= 3,75 F) ». (On notera que l'on a : $\frac{3}{8} \times 10\text{ F} = \frac{11}{8} \times 10\text{ F} - \frac{8}{8} \times 10\text{ F} = 13{,}75\text{ F} - 10\text{ F} = 3{,}75\text{ F}$.) Plus correctement, on dira simplement que « x choses, c'est $\frac{x}{a}$ *fois a* choses », etc.

2.4. Théories. – À son tour, le discours technologique contient des assertions, plus ou moins explicites, dont on peut demander raison. On passe alors à un niveau supérieur de justification-explication-production, celui de la *théorie*, Θ, laquelle reprend, par rapport à la technologie, le rôle que cette dernière tient par rapport à la technique.

Bien entendu, on peut imaginer que cette régression justificative se poursuive à l'infini – qu'il y ait une théorie de la théorie, etc. En fait, la description à trois niveaux présentée ici (technique/technologie/théorie) suffit, en général, à rendre compte de l'activité à analyser. La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissante : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens du classique « On démontre en mathématiques... » du professeur de physique, ou encore du « On a vu en géométrie... » du professeur de mathématiques d'autrefois.

En tout domaine, la *nature* de la théorie peut fluctuer, et de fait, fluctue historiquement. Comme il en va en matière technique ou technologique, il y a ici un *progrès théorique*, qui conduit en général à substituer aux évidences « métaphysiques » des énoncés théoriques positifs.

Soit ainsi le principe de récurrence : $P \subseteq \mathbf{N} \wedge 0 \in P \wedge \forall n\ (n \in P \Rightarrow n{+}1 \in P) \Rightarrow P = \mathbf{N}$. Pour justifier cet ingrédient technologique principal des démonstrations par récurrence, on peut, entre autres choses, soit se référer, comme le faisait encore Henri Poincaré, à « la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible » (*La science et l'hypothèse*, 1902), soit admettre comme un axiome que toute partie non vide de **N** a un premier élément, et montrer alors que le principe de récurrence en découle.

En grec, *theôria* a pris à partir de Platon le sens moderne de « spéculation abstraite ». Mais à l'origine, il renvoyait simplement à l'idée de contemplation d'un spectacle, le *theôros* étant le spectateur qui regarde l'action sans y participer. De fait, les énoncés théoriques apparaissent fréquemment comme *abstraits*, éloignés des préoccupations des « simples » technologues et techniciens. Cet effet d'abstraction est corrélé à ce qui fonde la grande *générativité* des énoncés théoriques – leur capacité à justifier, à expliquer, à produire.

Le fait que, dans **R**, la suite de terme général $1/n$ tend vers 0 est un résultat technologique très « concret ». Sa justification théorique tient dans l'axiome d'Eudoxe-Archimède, tenu ordinairement pour fort abstrait : si A et ε sont des réels strictement positifs, alors il existe un entier n tel que $n\varepsilon > A$. On notera qu'en fait les deux assertions sont équivalentes !

2.5. Savoir-faire et savoirs. – Autour d'un type de tâches T, on trouve ainsi, en principe, un triplet formé d'une *technique* (au moins), τ, d'une technologie de τ, θ, et d'une théorie de θ, Θ. Le tout, noté $[T/\tau/\theta/\Theta]$, constitue une praxéologie *ponctuelle*, ce qualificatif signifiant qu'il s'agit d'une praxéologie relative à un unique type de tâches, T. Une telle praxéologie – ou *organisation praxéologique* – est donc constituée d'un bloc pratico-technique, $[T/\tau]$, et d'un bloc *technologico-théorique*, $[\theta/\Theta]$.

Le bloc $[\theta/\Theta]$ est, ordinairement, identifié comme *un savoir* (alors que le bloc $[T/\tau]$ constitue *un savoir-faire*). Par métonymie; on désigne couramment comme étant un savoir la praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ *toute entière*, ou même une partie quelconque de celle-ci. Mais cette manière de faire encourage à minorer le savoir-faire, notamment dans la production et la diffusion des praxéologies : ainsi qu'on l'a noté, on rencontre souvent des technologies qui « attendent leur premier emploi », ou qui ont « perdu leur emploi ».

Une telle mise en avant du savoir n'est nullement fortuite. On ne rencontre en fait que rarement des praxéologies ponctuelles. Généralement, en une institution I donnée, une théorie Θ répond de *plusieurs technologies* θ_j, dont chacune à son tour justifie et rend intelligibles *plusieurs techniques* τ_{ij} correspondant à *autant de types de tâches* T_{ij}. Les organisations ponctuelles vont ainsi s'agréger, d'abord en organisations *locales*, $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, centrées sur une technologie θ déterminée, ensuite en organisations *régionales*, $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$, formées autour d'une théorie Θ. (Au-delà, on nommera organisation *globale* le complexe praxéologique $[T_{ijk}/\tau_{ijk}/\theta_{jk}/\Theta_k]$ obtenu, dans une institution donnée, par l'agrégation de plusieurs organisations régionales correspondant à plusieurs théories Θ_k.) Or le passage d'une praxéologie ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ à une praxéologie locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$ met en avant la technologie θ, de la même façon que le passage ultérieur à une praxéologie régionale $[T_{ij}/\tau_{ij}/\theta_j/\Theta]$ portera au premier plan la théorie Θ. Dans les deux cas la visibilité du bloc du savoir s'accroît, au détriment de celle du savoir-faire. Un tel déséquilibre, sans doute, n'est pas sans justification : car s'il est vrai que, en bien des cas, le type de tâches T précède *génétiquement* le bloc $[\theta/\Theta]$ (lequel se construit alors comme moyen de produire et de justifier une technique τ appropriée à T), il n'en reste pas moins que, *structuralement*, le savoir $[\theta/\Theta]$ permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire $[T/\tau]$ pourra être classiquement *présenté*, dans le *texte* du savoir, comme une simple *application* du « savoir » $[\theta/\Theta]$.

Dans l'enseignement des mathématiques, un *thème d'étude* (« Pythagore », « Thalès », etc.) est souvent identifié à une *technologie* θ déterminée (théorème de Pythagore, théorème de Thalès), ou plutôt, implicitement, au bloc de savoir $[\theta,\Theta]$ correspondant, cette technologie permettant de produire et de justifier, à titre d'applications, des techniques relatives à divers types de tâches. On notera cependant que d'autres thèmes d'étude (« factorisation », « développement », « résolution d'équations », etc.) s'expriment, très classiquement, en termes de types de tâches.

Une organisation praxéologique, même ponctuelle, n'est pas en général entièrement conforme aux canons évoqués ci-dessus. Le type de tâches autour duquel elle s'est construite, peut ainsi être mal identifié, tandis que la technique associée se révélera presque impraticable. La technologie pourra parfois se réduire à une pure pétition de principe, et la théorie être parfaitement sibylline. La notion de praxéologie apparaît ainsi comme une notion générique dont il convient d'approfondir l'étude – notamment par l'enquête empirique et l'analyse des données d'observation recueillies.

3. Des questions à étudier

3.1. Le routinier et le problématique. – On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une *dynamique* praxéologique, qu'on n'examinera ici que très brièvement.

Les praxéologies, en fait, vieillissent : leurs composants théoriques et technologiques perdent de leur crédit et deviennent opaques, tandis que des technologies nouvelles émergent qui, par contraste, portent à suspecter d'archaïsme les techniques établies.

Jusqu'au milieu du XX[e] siècle, ainsi, l'arithmétique scolaire contient, sous le nom de *théorie des rapports et proportions*, une praxéologie mathématique locale qui permet de traiter efficacement les problèmes de proportionnalité directe ou inverse : si 8 sucettes coûtent 10 francs, et si on veut connaître le prix, x francs, de 3 sucettes, on dira que « 8 *est à* 10 *comme* 3 *est à* x », ce qui se traduit par la *proportion* notée classiquement $8:10::3:x$, dans laquelle on sait que le produit des *extrêmes*, $8\times x$, est égal au produit des *moyens*, 10×3, égalité qui donne aussitôt $x = \frac{10\times 3}{8}$. La réforme « des mathématiques modernes » a, autour de 1970, expulsé nombre d'éléments théoriques et technologiques des mathématiques « classiques » regardés comme obsolètes, dont la théorie des rapports et proportions, non sans éliminer en même temps des techniques élémentaires qui, de fait, ne seront pas immédiatement remplacées, ou ne le seront que par des praxéologies plus complexes, peu viables dans les petites classes de l'enseignement secondaire. Dès qu'on dispose de la notion de *fonction*, et plus particulièrement de la notion de fonction *linéaire*, ainsi que des notations usuelles à cet égard, on peut reprendre le problème des 3 sucettes en ces termes : f étant linéaire, si $f(8) = 10$, alors $f(3) = f\left(\frac{3}{8}\times 8\right) = \frac{3}{8} \times f(8) = \frac{3}{8}\times 10 = \ldots$

Surtout, dans un univers de tâches *routinières* surgissent à tout instant, ici et là, des tâches *problématiques*, qu'on ne sait pas – pas encore – accomplir. De nouveaux types de tâches, qui sont alors des types *de problèmes*, s'affirment ainsi, autour desquels de nouvelles praxéologies devront se constituer.

À la rentrée 1998, les professeurs de mathématiques enseignant en Terminale S auront à traiter, en enseignement de spécialité, un type de problèmes inédit à ce niveau des études : étant donné a, $b \in \mathbf{N}^*$ premiers entre eux, trouver des entiers x, y tels que $ax+by = c$ (« équation de Bézout »). Lorsque les entiers a et b sont « petits » et qu'on travaille à la main, il est pratique de procéder comme sur l'exemple suivant (où $a = 151$, $b = 137$, $c = 1$). On commence par écrire la fraction a/b sous la forme d'une fraction continuée, que l'on arrête quand le numérateur de la dernière fraction obtenue est 1 :

$$\frac{151}{137} = 1+\frac{14}{137} = 1+\frac{1}{\frac{137}{14}} = 1+\frac{1}{9+\frac{11}{14}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{\frac{14}{11}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{3}{11}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{11}{3}}}}$$

$$= 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{2}{3}}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{3}{2}}}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}}.$$

On *supprime* alors cette dernière fraction (ici, 1/2), et on calcule l'expression ainsi obtenue :

$$1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\cancel{\frac{1}{2}}}}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{1}{\frac{5}{4}}} = 1+\frac{1}{9+\frac{4}{5}} = 1+\frac{1}{\frac{49}{5}} = 1+\frac{5}{49} = \frac{54}{49}$$

On obtient ainsi : $49\cdot151-54\cdot137 = 1$. Bien entendu, il resterait à *justifier* cette technique, et, plus encore peut-être, à l'*expliquer*.

Constamment, en une institution I donnée, de nouvelles praxéologies sont regardées, par au moins *une partie* des acteurs de I, comme nécessaires à un *meilleur* fonctionnement de I. Ces praxéologies devront en conséquence y être *produites* ou, plus souvent, *re*produites, dans la mesure où elles existent *déjà* en quelque autre institution I' – à partir de laquelle on pourra se proposer de les « importer » dans I. Les conditions imposées par l'écologie de I font alors que la praxéologie désirée ne pourra y être reproduite *à l'identique*, mais qu'elle subira, dans ce « transfert », diverses modifications adaptatives : on parlera donc, non de transfert, mais de *transposition* de I' à I.

Les processus de transposition institutionnelle ne produisent pas nécessairement des versions *dégradées* – inférieures par exemple quant à la qualité de leur bloc technologico-théorique – des organisations praxéologiques transposées. Tout au contraire, en matière de transposition *didactique*, par exemple, c'est-à-dire lorsque I est une institution didactique (école, classe, etc.), il arrive assez fréquemment, notamment lorsque I' n'est pas une institution *savante*, que le travail transpositif soit l'occasion d'*améliorer* la praxéologie ainsi retravaillée – en la simplifiant, en en précisant certains éléments, etc. Dans tous les cas, en outre, la transposition enrichit le monde des praxéologies *socialement disponibles* – dans la mesure où elle crée une praxéologie adaptée à des conditions institutionnelles *inédites*.

3.2. Analyser les pratiques enseignantes. – Ordinairement, la pénurie praxéologique se traduit d'abord par un manque de *techniques*. Comment accomplir les tâches de tel type T ? Et aussi, et peut-être surtout, comment accomplir *mieux* les tâches de ce type ? Autant d'interrogations qui appellent une *production de techniques* et, donc, de *praxéologies*. D'une manière générale, on est ainsi conduit, étant donné un type de tâches T, à *(ré)étudier la question*, notée génériquement τ_T, d'une technique propre à permettre d'accomplir les tâches $t \in T$, et, plus complètement, d'une praxéologie correspondante. La question τ_T – *Comment accomplir les tâches du type T ?* – apparaît alors comme *génératrice* de la praxéologie $O_T = [T/\tau/\theta/\Theta]$ à (re)construire.

L'existence de cette université d'été montre ainsi qu'un certain nombre de personnes ont décidé d'y étudier et d'y faire étudier, à nouveaux frais, la question τ_T relative à un type de tâches T dont le libellé peut être : *Analyser les pratiques enseignantes*. Ce libellé, qui donne son titre à l'université d'été, renvoie implicitement à une problématique *plus large*, qu'on exprimera ici par un schéma générique articulant *quatre* grands types de tâches. Étant donné un objet *o* relatif aux pratiques enseignantes, il s'agira en effet d'abord d'*observer* l'objet *o* (T_1), puis de *décrire & analyser* l'objet *o* (T_2), ensuite d'*évaluer* l'objet *o* (T_3), enfin de *développer* l'objet *o* (T_4). Bien entendu, ces *types* de tâches, qui se définissent par référence à certains *genres* de tâches (*observer*, *décrire & analyser*, *évaluer*, *développer*) eux-mêmes plus ou moins bien définis dans la culture commune (que signifie *développer* par exemple ?), restent largement *à construire*, solidairement avec les autres composants – techniques, technologiques, théoriques – des praxéologies visées.

Dans la suite de ces trois journées, le type de tâches T_1 (l'observation) sera peu ou prou neutralisé par le recours à des corpus de données d'observation *tout constitués*. Les types de tâches T_3 (l'évaluation) et T_4 (le développement), sur lesquels on reviendra dans la leçon 3, seront davantage à l'horizon du travail qu'en son cœur. Au centre du travail, on placera donc le type de tâches T_2 – la description et l'analyse de certains objets *o* relatifs aux pratiques enseignantes.

Les types d'objets *o* envisagés seront eux-mêmes de deux sortes. Étant donné un thème d'étude mathématique θ, on considérera successivement a) *la réalité mathématique* qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ, b) *la manière* dont peut se construire cette réalité mathématique, c'est-à-dire la manière dont peut s'y réaliser l'étude du thème θ. Le premier objet – « la réalité mathématique qui... » – n'est rien d'autre qu'une *praxéologie mathématique* ou *organisation mathématique*, qu'on notera OM_θ. Le second objet – « la manière dont... » – est ce qu'on nommera une *organisation didactique*, qu'on notera, de manière analogue, OD_θ. Le travail d'étude à réaliser concerne donc principalement les deux sous-types de tâches suivants : *décrire & analyser* l'organisation *mathématique* OM_θ qui peut se construire dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ (T_{21}) ; *décrire & analyser* l'organisation *didactique* OD_θ qui peut être mise en œuvre dans une classe de mathématiques où l'on étudie le thème θ (T_{22}).

Chacun des trois groupes de travail Σ_1, Σ_2, Σ_3 (visites d'atelier & TD) travaillera sur un thème θ différent, qui restera pour chacun *le même* au long des trois journées d'étude afin de permettre au groupe un travail plus approfondi : pour Σ_1 {Michel Jullien & Jacques Tonnelle}, θ_1 = *Écritures fractionnaires* ; pour Σ_2 {Michèle Artaud }, θ_2 = *Nombres relatifs* ; pour Σ_3 {Gisèle Cirade & Yves Matheron}, θ_3 = *Équations du 1^er^ degré et modélisation algébrique*.

3.3. Analyser une organisation mathématique. – L'objet de cette première journée est de *construire*, ou du moins d'*ébaucher*, à partir des éléments théorico-technologiques introduits jusqu'ici, une technique τ_{21} de description et d'analyse d'une organisation mathématique OM_θ. À titre d'introduction, on considère ci-après un *spécimen* simple du type de tâches T_{21}, en choisissant le thème θ = div de la *division des entiers* :

> t_{div} : Décrire & analyser l'organisation $\mathrm{OM}_{\mathrm{div}}$ qui peut se construire dans une classe où l'on étudie le thème de la division des entiers.

Une telle tâche doit être soigneusement distinguée de la tâche, notée $t_{\partial\text{div}}$, de description et d'analyse de l'organisation *didactique* correspondante :

> **$t_{\partial\text{div}}$: Décrire & analyser l'organisation didactique $\text{OD}_{\text{div}} = \partial\text{OM}_{\text{div}}$ qui peut être mise en œuvre dans une classe où l'on étudie le thème de la division des entiers.**

Le travail requis est en fait ce qui, *grosso modo*, peut être attendu d'un candidat au CAPES de mathématiques lors de l'*exposé sur un thème donné*, première épreuve orale d'admission dont, au concours 1997, le sujet 08 était précisément libellé : *Division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, unicité du quotient et du reste. Applications à l'arithmétique*. Le *résultat technologique principal* de OM_{div} est évidemment le suivant :

> θ_0. [*Théorème & définition*] Étant donné deux entiers relatifs a et b, $b > 0$, il existe un couple et un seul d'entiers relatifs q et r tels que : $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. Les nombres a et b s'appellent respectivement le *dividende* et le *diviseur*, les nombres q et r, le *quotient* et le *reste* de la division de a par b.

On s'assure aisément que l'assertion précédente équivaut à la suivante :

> θ_0'. [*Théorème & définition*] Étant donné deux entiers relatifs a et b, $b > 0$, il existe un et un seul entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. Le nombre q s'appelle le *quotient* de la division de a par b. On appelle *reste* de cette division l'entier $r = a-bq$.

Cet énoncé technologique n'est en fait que la *conclusion* d'un « discours technologique » plus vaste, qui le justifie, ou, comme on dit en mathématiques, qui le *démontre* :

> **Division des entiers : résultat fondamental**
>
> Soit deux entiers relatifs a et b, $b > 0$.
> 1. Démontrons qu'il existe au plus un entier entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. La suite arithmétique généralisée $(bk)_{k\in\mathbb{Z}}$ étant strictement croissante, si q_1 et q_2 vérifiaient tous deux cette double inégalité, avec par exemple $q_1 < q_2$, soit $q_1+1 \leq q_2$, on aurait $a < b(q_1+1) \leq bq_2 \leq a$, ce qui est impossible. D'où l'unicité de q.
> 2. Démontrons ensuite l'*existence* de q. Supposons d'abord $a \geq 0$. La suite $(bk)_{k\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante et non bornée, il existe un premier entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $bk > a$, de sorte en particulier que $b(k-1) \leq a$. Posons $q = k-1$; il vient alors $bq \leq a < b(q+1)$: l'entier q convient. Si, maintenant, on a $a < 0$, il existe q' tel que $bq' \leq -a < b(q'+1)$, soit encore $b(-q'-1) < a \leq b(-q')$. Si $a = b(-q')$, on peut prendre $q = -q'$. Sinon, on a $a < b(-q')$ et $b(-q'-1) < a$, soit $b(-q'-1) < a < b(-q')$; en prenant $q = -q'-1$ on obtient ainsi $bq < a < b(q+1)$: l'entier q convient.
> 3. Ainsi, étant donné deux entiers relatifs a et b, $b > 0$, il existe un et un seul entier relatif q tel que : $bq \leq a < b(q+1)$. Le nombre q s'appelle le *quotient* de la division de a par b. On appelle *reste* de cette division l'entier $r = a-bq$.

Les *éléments théoriques* requis pour justifier la technologie précédente sont les suivants.

> **Division des entiers : éléments théoriques**
>
> 1. La démonstration d'unicité utilise essentiellement le fait que la suite $(bk)_{k\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante.
> 1.1. Ce fait découle du résultat théorique suivant :
> Θ_0. L'ordre usuel sur $\mathbb{Z}$ fait de $\mathbb{Z}$ un anneau ordonné, c'est-à-dire que l'on a :
> Θ_{01}. $\forall k \in \mathbb{Z}, \forall n, m \in \mathbb{Z}, n \leq m \Rightarrow n+k \leq m+k$;
> Θ_{02}. $\forall k \in \mathbb{N}, \forall n, m \in \mathbb{Z}, n \leq m \Rightarrow kn \leq km$.
> 1.2. On utilise aussi la propriété ci-après, plus propre à l'anneau ordonné discret $\mathbb{Z}$:
> Θ_1. $\forall n, m \in \mathbb{Z}, n < m \Leftrightarrow n+1 \leq m$.
> 2. La démonstration d'existence repose sur l'affirmation suivante : la suite $(bk)_{k\in\mathbb{N}}$ étant strictement croissante et non bornée, il existe un premier entier k tel que $bk > a$.
> 2.1. Le fait que la suite arithmétique $(bk)_{k\in\mathbb{N}}$ est *strictement croissante* vient d'être examiné.
> 2.2. Le fait qu'elle soit non bornée découle de ce que $\mathbb{Z}$ est un groupe *archimédien* :
> Θ_2. [propriété d'Eudoxe-Archimède] $\forall a \geq 0, \forall b > 0, \exists k \in \mathbb{N}, bk > a$.
> 2.3. Le fait qu'il existe un *premier* entier k, c'est-à-dire un *plus petit* entier k, tel que $bk > a$ résulte du fait que l'ordre usuel sur $\mathbb{N}$ est un *bon ordre* :

Θ_3. [*Propriété de bon ordre*] Toute partie non vide de N possède un plus petit élément.
Soit en effet F l'ensemble des entiers k tels que $bk > a$: d'après Θ_2, F est non vide ; par suite, d'après Θ_3, F possède un premier élément.
2.4. Remarque. On a : $\Theta_2 \Leftarrow \Theta_3$ [laissé au lecteur].

L'organisation mathématique à déterminer, OM_{div}, est *a priori* une organisation *locale* (et non pas ponctuelle), qui peut donc contenir *plusieurs* types de tâches. Faute de place, on ne considérera ici que le type de tâches mathématiques suivant :

T_q. Étant donné deux entiers relatifs a et b, $b > 0$, calculer le quotient q de la division de a par b.

Le but de l'étude serait alors de préciser une technique τ_q pour accomplir les tâches du type T_q – ce qu'on ne fera ici que sur un point particulier. L'observation de OM_{div} dans la littérature des manuels anciens fait en effet rencontrer une « remarque » aujourd'hui si oubliée qu'elle en paraît d'abord peu crédible, et sur laquelle on s'arrêtera un instant. Un premier ouvrage indique ainsi :

Albert Millet, *Arithmétique* (enseignement primaire supérieur), Hachette, 1923, p. 84

Théorème. – Pour diviser un nombre par un produit de plusieurs facteurs, il suffit (si les divisions se font exactement) de diviser ce nombre par le premier facteur, le quotient obtenu par le second et ainsi de suite jusqu'au dernier facteur. Le dernier quotient obtenu est le quotient cherché.
REMARQUE. – Ce théorème s'applique aux divisions avec reste. Nous l'admettrons sans démonstration.
Ainsi : **517 : (5 × 7 × 4)** peut s'obtenir en divisant : **517** par **5**, soit **103** ; **103** par **7**, soit **14** ; **14** par **4**, soit **3**.
Le quotient de **517** par **5 × 7 × 4** soit **140** est **3**.

D'autres auteurs – et non des moindres ! – écrivent de même, à propos du même théorème :

Anna et Élie Cartan, *Arithmétique* (classes de 4^e et de 3^e), Armand Colin, 1934, p. 54

92. – Remarque. – Si un nombre n'est pas divisible par un produit de facteurs, on démontre qu'on peut néanmoins trouver le quotient du nombre par le produit en appliquant la deuxième partie du théorème IV (n° **91**, p. 53). La règle donnée au n° **78** (p. 47) est une application de cette remarque. Pour avoir le quotient de 6 783 par le produit 100 × 9, on peut diviser 6 783 par 100, ce qui donne 67 comme quotient, puis diviser 67 par 9.

La chose est-elle vraie ? Une justification s'impose, que d'autres manuels fournissent – telle l'*Arithmétique* de Roland Maillard et Albert Millet pour la classe de Mathématiques (Hachette, 1954, pp. 39-40). Il est intéressant de constater qu'une telle justification s'appuie sur un résultat technologique qui est une variante immédiate des résultats précédemment établis :

θ_0". [*Théorème*] Le quotient q de la division de a par b est caractérisé par les inégalités : $bq \leq a$ & $a+1 \leq b(q+1)$.

On a alors le résultat suivant :

θ_1. [*Théorème*] Soit deux entiers relatifs a et b, $b > 0$. Si $b = b'b''$, soit q' le quotient de a par b' et q'' le quotient q' par b''. Alors q'' est le quotient de a par b.
Démonstration. On a $b'q' \leq a$ et $b''q'' \leq q'$; d'où $bq'' = b'(b''q'') \leq b'q' \leq a$. On a de même $a+1 \leq b'(q'+1)$ et $q'+1 \leq b''(q''+1)$; d'où $b(q''+1) = b'(b''(q''+1)) \geq b'(q'+1) \geq a+1$. Par suite, et d'après θ_0", on a $q = q''$.

Ce développement technologique assure que la technique indiquée *marche* : le quotient de 4225 par 24 est ainsi, puisque $24 = 4{\cdot}6$, celui de 1056 par 6, soit encore, puisque $6 = 2{\cdot}3$; celui de 528 par 3, soit enfin 176. Mais cela ne permet pas vraiment – même si la chose est éminemment subjective ! – de *comprendre pourquoi* le phénomène en question se produit. La fonction d'*explication*, productrice d'*intelligibilité*, doit être prise en charge par un autre développement, comme ci-après.

Il est clair que si a est divisible par b, alors on obtient q en divisant a par b', puis en divisant le quotient q' ainsi obtenu par b''. Supposons maintenant que a soit divisible par b', avec $a = b'q'$; il est clair alors – du moins l'admettra-t-on ici – que $q = q''$, où $q'' = [q'/b'']$. (Une *démonstration* de ce point procèderait de l'observation que l'on a $a = b'q' = b'(b''q''+r'') = (b'b'')q''+b'r''$, avec $b'r'' < b'b'' = b$.) Pourquoi alors peut-on, dans le cas général (où l'on ne suppose plus que b' divise a), « oublier » le reste r' de la division de a par b' ? L'explication fondamentale découle des deux faits généraux suivants, dont il convient d'abord de se persuader : ① le quotient par b de l'entier a est aussi le quotient par b des entiers $a-1$, $a-2$, ..., $a-r$: on ne change pas le quotient si on remplace a par $a-k$, avec $0 \leq k \leq r$; ② le reste r (dans la division de a par b) est le premier entier k tel que $a-k$ soit divisible par b. On voit alors que, en « oubliant » le reste r', soit en remplaçant a par $b'q' = a-r'$, le quotient final reste inchangé dès lors que $r' \leq r$ (d'après ①), ce qui est le cas (d'après ②) puisque $a-r$ ($= bq = b'b''q$) est divisible par b'.

3.4. Une remarque technique. – Bien qu'à peine esquissé, l'exemple précédent montre notamment que la composante technologique d'une organisation mathématique change avec les *types de tâches* et les *techniques* que l'on entend produire, justifier, expliquer.

Leçon 2. – Organisations didactiques & moments de l'étude

1. Le didactique, dimension du réel social

1.1. Étudier une question. – Dans la leçon 1, et tout au long de la première journée consacrée à la TAD, nous avons *vécu* une situation *problématique*, c'est-à-dire dans laquelle l'on nous proposait d'accomplir une tâche *problématique* – décrire et analyser une certaine praxéologie mathématique. Nous avons en outre *évoqué* d'autres types de tâches *a priori* problématiques – résoudre une « équation de Bézout » par exemple. On pourrait multiplier les exemples ; tous relèveraient d'un même schéma, que l'on examine rapidement ci-après.

Au point de départ, il y a, dans la vie sociale, une simple demande d'information, ou, comme on dira, une *question au sens faible*, qui prend généralement la forme d'une interrogation au sens grammatical du terme :

Où se trouve le bureau de poste le plus proche ?
Quelle heure est-il ?
Quel âge avez-vous ?
Le train de 16h17 en provenance de Marseille, c'est quel quai ?
Quelle est notre longitude ?
$4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, c'est bien irrationnel, non ?
C'est vrai que n^3+11n est divisible par 6 quel que soit $n \in \mathbb{N}$?!

Du point de vue du questionneur, chacune de ces questions appelle une *réponse au sens faible*, sous forme d'un énoncé apportant l'information demandée : « Il est devant vous ! [le bureau de poste] », « Il est... 8h 47 ! », etc. L'hypothèse est ici que la personne questionnée *connaît la réponse*, ou, du moins, *peut la connaître à peu de frais* – par exemple en regardant sa montre, s'il s'agit de l'heure. On notera pourtant que, en réalité, cette réponse procède de la « partie émergée », seule visible dans la vie sociale ordinaire, d'un « iceberg praxéologique » qui s'est fondu dans le paysage social, mais qu'il a fallu souvent des siècles pour construire. Ainsi en va-t-il à propos de l'heure, ou de la longitude, ou même de l'âge de la personne interrogée. Le jeu des questions-réponses *au sens faible* se joue ainsi *à la surface de la société et de ses institutions* : il en occulte les ressorts profonds, dont il semble – faussement – pouvoir faire l'économie.

Les choses changent quand la personne questionnée *ne sait pas répondre* – lorsqu'elle ne connaît pas la longitude du lieu, ou ignore si le nombre $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ est irrationnel ou pas, etc. Dès lors, *une question se pose*. Qu'elle consiste à déterminer la longitude ou la nature, rationnelle ou non, du nombre $4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, la tâche à accomplir pour répondre à la question posée n'est plus « immédiate ». Si l'on dispose d'une praxéologie relative au type de tâches considéré, on pourra la mettre en œuvre, et d'une manière éventuellement *routinière* (ce qui ne signifie pas « algorithmique »).

Ainsi un bon élève de la nouvelle Terminale S pourra-t-il peut-être écrire sans autre façon : $n^3+11n = n^3-n+12n = n(n^2-1)+12n = (n+1)n(n-1)+12n = 6C_{n+1}^3+12n = 6(C_{n+1}^3+2n)$...

Mais les choses changent plus encore lorsque la personne interrogée ne dispose d'aucune technique pour accomplir la tâche demandée, qui apparaît alors *problématique* pour elle. La question posée se mue dès lors en une question *au sens fort* : non plus « Quelle est la longitude ? » mais « *Comment déterminer* la longitude ? », non plus « Ce nombre est-il irrationnel ? » mais « *Comment déterminer* si ce nombre est irrationnel ? ». On passe ainsi de la demande d'accomplir une tâche t au besoin d'élaborer une technique, et, plus complètement, toute une praxéologie relative aux tâches du type de t – type qu'il faut en même temps construire comme objet institutionnel. À question au sens fort, réponse au sens fort : la réponse n'est plus maintenant une simple information à donner, *c'est toute une organisation praxéologique à construire*.

En nombre de cas, une personne ou un collectif confronté à une difficulté du type précédent – élaborer une praxéologie relative à un type de tâches problématique – répond en ignorant, voire en *niant* cette problématicité, par exemple *en n'accomplissant pas* la tâche en question – en « faisant autrement ».

Un exemple – où la problématicité est de nature *mathématique*. Trois vacanciers doivent se partager la somme de 860 F qui, à l'issue de leurs vacances, reste dans la caisse commune créée pour faire face aux frais quotidiens collectifs, et dans laquelle ils ont versé en tout, respectivement, 1900 F, 2100 F, 2200 F. Ils se demandent comment ils doivent se partager la somme restante de façon que chacun d'eux ait contribué également aux frais collectifs. Puis ils décident, dans un flou généreux et opportun (« Mais non ! Toi tu as payé la pizza l'autre jour, et ça on l'a pas compté... », etc.), que telle répartition, déterminée « à l'intuition », est *grosso modo* acceptable, et s'en tiennent là.

Dans le cas contraire, la *personne* x, ou, plus généralement, le *collectif* X, va se mettre à *étudier la question posée* (« Comment déterminer la longitude ? », « Comment déterminer si ce nombre est irrationnel ? »), qu'on peut noter génériquement τ_T, où T est le type de tâches considéré (éventuellement réduit à un unique spécimen, t). Se constitue ainsi ce qu'on nommera ici un système *d'étude* ou système *didactique*, noté $\Sigma = S(X;\tau_T)$ (avec, éventuellement, $X = \{x\}$). En certains cas, le collectif X sera *aidé*, voire *dirigé*, dans son effort d'étude, par un *aide à l'étude* ou un *directeur d'étude*, y : on notera alors le système didactique $\Sigma = S(X;y;\tau_T)$ (ou $S(X;Y;\tau_T)$ s'il y a un collectif Y d'aides à l'étude). Dans tous les cas, on entre alors dans une dimension spécifique du réel social : la dimension *de l'étude* ou *du didactique*, au sens fort de ces termes.

1.2. L'étude, les institutions, la *skholê*. – La formation même éphémère d'un système didactique si rudimentaire soit-il interrompt le flux normal de l'activité institutionnelle ordinaire. L'activité d'étude apparaît en conséquence comme une source permanente de trouble possible pour la vie de l'institution, dont elle peut à tout instant faire dévier le cours des activités normales en entraînant certains de ses acteurs vers des voies étrangères à sa

« raison sociale » – que l'on songe, par exemple, à la formation continue des enseignants ! Il y a là un fait fondamental dont il faut examiner rapidement les manifestations.

Une première conséquence a été mentionnée rapidement plus haut – *le refoulement de la problématicité*, et donc le refoulement du didactique que cette problématicité pourrait engendrer. Une deuxième conséquence tient à un phénomène voisin, sur lequel il convient d'insister : celui de la *dénégation du didactique*. Les situations de la vie quotidienne au sein d'une institution sont tissées d'interactions didactiques, mais labiles, évanescentes, qui se glissent presque sans bruit dans le flux de l'activité ordinaire – et auxquelles on fait implicitement référence lorsqu'on parle d'*apprentissage sur le tas*, ou, selon la formule de John Dewey, de *learning by doing*, d'apprentissage par la pratique « nue ». Mais ce didactique-là se trouve en général non reconnu par l'institution, parce que, pour se défendre contre un envahissement toujours menaçant, celle-ci a défini une frontière qui sépare, parmi toutes les formes d'activité dont elle peut être le lieu, celles – généralement peu nombreuses et fortement stéréotypées – qu'on accepte d'y regarder comme didactiques, et celles – majoritaires et fort variées – qui sont réputées *non didactiques*, et dont la didacticité potentielle se trouve donc, par là, *niée*.

> Nulle situation n'est *intrinsèquement* didactique ou non didactique. Par suite, en niant la didacticité *potentielle* d'une situation donnée, en l'imposant à ses sujets comme irréfragablement *non didactique*, l'institution barre la possibilité de son fonctionnement *adidactique* (Brousseau 1996), et ferme ainsi certaines voies d'apprentissage *a priori* possibles pour les sujets de l'institution. Chaque fois que de tels apprentissages apparaissent comme objectivement appelés par le bon fonctionnement de l'institution, c'est-à-dire comme répondant à des besoins cognitifs institutionnellement engendrés, on peut dire que l'institution nie les *besoins didactiques* de ses sujets, besoins dont ces derniers devront donc éventuellement prendre en charge la satisfaction, mais alors à titre personnel, et non plus comme sujets de l'institution.

L'adjectif *didactique*, associé ici au substantif *étude* (et au verbe *étudier*), est, en français, un emprunt au grec *didaktikos* « propre à instruire », « relatif à l'enseignement », de *didaktos*, adjectif verbal de *didaskein*, « enseigner, faire savoir ». En français courant, il s'applique à *ce qui vise à instruire*. L'idée du didactique, l'idée d'étude, c'est-à-dire, fondamentalement, l'idée de faire quelque chose afin d'apprendre quelque chose (« savoir ») ou d'apprendre à *faire* quelque chose (« savoir-faire »), paraît en fait consubstantielle aux sociétés humaines. Comment, pourtant, limiter les effets perturbants du didactique sur la vie des institutions ? Une réponse a pris dans nos sociétés modernes une importance extrême, au point qu'elle tend à absorber dans son ombre portée toute autre manière de gérer les apprentissages : il s'agit de l'*école*, ou plus précisément de la *skholê* des anciens Grecs – cet *otium Graecum*, ce « loisir grec » que stigmatisaient Caton et les vieux Romains, et que l'on peut définir comme *du temps prélevé sur le temps du labeur, ou plutôt de la vie ordinaire, pour être consacré à l'étude*.

La formule est générique, universelle, et peut *a priori* s'appliquer à toute institution : à côté d'elle, mais distincte d'elle, toute institution peut créer sa propre *école*, où l'on pourra se livrer à l'étude de toute question posée par la vie de l'institution, dans le cadre de systèmes didactiques institutionnalisés, $\Sigma_k = S(\{x_i\};\{y_j\};P_k)$, où les x_i seront des *élèves*, les y_j des *professeurs*, et P_k un *programme d'étude* précisant les questions à étudier. Ce processus historique de « scolarisation » des institutions est aujourd'hui fort avancé : rien ou presque qui lui échappe, en droit comme en fait – et c'est d'ailleurs lui qui nous réunit ici, ces jours-ci !

De l'absence de *skholê*, en passant par la *skholê* intégrée au flux de la vie, on arrive ainsi à la *skholê* omniprésente, conçue et vécue comme séparée de l'activité dont elle a pourtant pour mission de questionner, en les étudiant, les praxéologies.

On notera pourtant que, quel que soit l'habitat institutionnel offert au didactique – depuis l'intégration vécue au quotidien dans l'institution, jusqu'à la scolarisation en une institution scolaire associée –, des contraintes s'imposent qui, d'un même mouvement, vont permettre, voire imposer, certains types de *praxéologies didactiques*, et en interdire d'autres, tandis que, même dans le cadre de la *skholê*, même dans le cadre de l'École de la République (à laquelle on restreindra désormais l'emploi de l'adjectif *scolaire*), certaines pratiques didactiques, « niées », resteront viables, et vivantes, sans toutefois être assumées comme telles. Chaque institution, chaque institution didactique notamment, définit ainsi, en acte, au moins négativement, sa propre notion d'étude. De là que cette notion ne puisse être définie de manière intrinsèque, universelle, absolue, au-delà de cette « définition » minimaliste selon laquelle il y a étude lorsqu'il y a *soin*, *application*, *attention* à l'endroit de quelque réalité *problématique* – la réalité « étudiée ».

1.3. Étudier une œuvre. – Étudier une question du type τ_T, où T est un certain type de tâches, cela conduit – comme il en va en principe dans le monde savant – à *créer* une réponse, c'est-à-dire à élaborer une organisation praxéologique $O = [T/\tau/\theta/\Theta]$ *inédite*. Mais, dans le monde ordinaire de la *skholê*, étudier une question, c'est, presque toujours, *recréer*, pour soi et ses compagnons d'étude, une réponse O déjà produite en quelque autre institution. Étudier, c'est donc étudier une *réponse* (au sens fort) tenue pour valable. C'est étudier une *œuvre* existant ailleurs dans la société, pour la reconstruire, la *transposer* dans l'institution qui sert d'habitat à l'étude. Le passage de l'étude d'une question à l'étude d'une réponse – d'une œuvre – ne va pas sans quelques modifications dans la notion même d'étude.

Au départ, ainsi qu'on l'a suggéré, l'œuvre O est étudiée – c'est-à-dire reconstruite, transposée – *en tant que réponse* à la question τ_T que l'on se pose. Si, par exemple, on se pose la question de la représentation plane de l'espace à trois dimensions, on étudiera la *perspective* ; si l'on se pose la question du cryptage et du décryptage de messages, on étudiera la *cryptographie* ; etc. On travaille alors sur des œuvres prenant la forme d'organisations praxéologiques *ponctuelles*, *i.e.* constituées autour d'un unique type de tâches, regardé comme *générateur* de l'œuvre étudiée.

Deux exemples de techniques

1. Comment, par exemple, démontrer que $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ est irrationnel ? Une technique simple, dont on laissera le lecteur préciser la technologie et la théorie, consiste à former une expression rationnelle de α égale à un nombre connu pour être irrationnel. Ici on a : $\alpha = 4\sqrt{3}-3\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^2 = 66-24\sqrt{6} \Leftrightarrow \frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$. On conclut alors par un petit raisonnement : si α était rationnel, il en serait de même de $\frac{66-\alpha^2}{24} = \sqrt{6}$, ce qui n'est pas.
2. Comment déterminer le maximum (ou le minimum) d'une fonction sur un intervalle ? Il s'agit d'un très grand et très ancien problème, étudié autrefois, au lycée, sous le nom de *questions de maximum et de minimum*. La technique élémentaire utilisée en l'absence de calcul infinitésimal se fondait sur le résultat technologique suivant : si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des réels ≥ 0 dont la somme est constante, égale à a, alors le produit $x_1x_2...x_n$ est maximal lorsque $x_1 = x_2 = ... = x_n = a/n$. Ainsi l'aire d'un rectangle de périmètre $2p$, qui s'écrit xy, avec $x+y = p$, est-elle maximale lorsque $x = y = p/2$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré. De même, l'aire d'un enclos rectangulaire formé à l'aide d'une palissade de longueur ℓ et dont l'un des côtés est un mur, qui s'écrit xy avec $2x+y = \ell$, est maximale en même temps que l'expression $2xy$, laquelle atteint son maximum lorsque $2x = y = \ell/2$, soit pour $x = \ell/4$ et $y = \ell/2$.

L'agrégation d'œuvres « ponctuelles » en une organisation *locale* (*la division des entiers*, par exemple) à l'enseigne d'une commune *technologie* θ, voire leur intégration au sein d'une organisation *régionale* (*l'arithmétique*, par exemple) commandée par une même *théorie* Θ, tend à refouler à la périphérie, sous le nom d'*applications*, les types de tâches qui sont en principe générateurs de l'œuvre, au motif qu'il s'agit d'une œuvre *ouverte*, à la technologie potentiellement productrice de techniques inédites, et qu'on ne saurait donc enfermer dans quelques « applications » définies *a priori*. Le rapport entre question et réponse tend ainsi à s'inverser. La réponse est première, la question suit. Dans l'organisation $\mathrm{OM}_{\mathrm{div}}$ (leçon 1, § 3.3), ainsi, on peut faire figurer *ou non* un développement relatif aux *quotients approchés* (v. ci-après). Selon le cas, alors, $\mathrm{OM}_{\mathrm{div}}$ apparaîtra *ou non* comme répondant (au sens fort) à la question « Comment déterminer le quotient approché par défaut à 10^{-n} près d'un entier a par un entier b ? ».

Quotients approchés

1. *Théorème & définition.* Étant donné deux entiers relatifs a et b, $b > 0$, il existe un unique entier relatif q tel que : $b\frac{q}{10^n} \leq a < b\frac{q+1}{10^n}$. Le décimal $q_n = q\cdot 10^{-n}$ est le quotient approchée à 10^{-n} près par défaut de la division de a par b.

Démonstration. La double inégalité $b\frac{q}{10^n} \leq a < b\frac{q+1}{10^n}$ équivaut à $bq \leq a\cdot 10^n < b(q+1)$, ce qui montre que l'entier q est le quotient de la division euclidienne de $a\cdot 10^n$ par b. D'où l'existence et l'unicité de q.

2. *Remarque.* Le quotient q de la division euclidienne de a par b, qu'on appelle aussi quotient *entier* de a par b, est obtenu pour $n = 0$: on dit que q (= q_0) est le quotient de a par b *à une unité* (= 10^0) *près par défaut*. Le quotient entier est ainsi, en général, un quotient *approché* : il n'est un quotient *exact* que si a est divisible par b.

3. *Corollaire.* Pour calculer le quotient q_n approchée à 10^{-n} par défaut de la division de a par b, on calcule le quotient entier q de $a\cdot 10^n$ par b et on prend $q_n = q\cdot 10^{-n}$.

4. *Exemple.* Soit à calculer le quotient q_2 à 10^{-2} (= 0,01) près par défaut de 743 par 56. On cherche le quotient entier q de 74300 par 56, soit $q = 1326$. On a donc $q_2 = 13,26$.

5. ...

Un pas de plus, et l'on aboutit à une déconnexion franche du « cœur » théorico-technologique de l'œuvre d'avec ses « applications », qui, de génétiquement nécessaires, deviennent dès lors institutionnellement *contingentes*. L'étude de l'œuvre tend ainsi à créer une organisation de savoir qui semble ne plus exister que pour elle-même – les technologies ne débouchant qu'aléatoirement sur des techniques effectives, par exemple –, selon la logique de tous les fétichismes culturels. Dans le même temps, les *raisons d'être* de l'œuvre tendent à se perdre, en droit, sinon en fait. On navigue dès lors entre esthétique et arbitraire culturel.

Pourquoi par exemple cette « œuvrette » mathématique, encore étudiée aujourd'hui au Secondaire (en Seconde notamment), autour de la notion d'*expression numérique contenant un radical*, et qui permet de récrire une expression telle $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ sous la forme $-(1+\sqrt{2})$? Soit, dans un repère orthonormal, les points A(4 ; 2), B($3\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), C($1+2\sqrt{2}$; $1+\sqrt{2}$). Pour vérifier si ces points sont alignés, on peut calculer les pentes des droites (AB) et (AC), soit $p_{(AB)} = \frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ et $p_{(AC)} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ afin de voir si ces pentes sont ou non égales. Au vu des expressions obtenues, la question n'est pas facile à trancher. Il convient donc de les récrire sous une forme *canonique*, où toute expression du type considéré ait une écriture *et une seule* – ce qui permettra de *comparer* deux expressions données *d'un simple coup d'œil*. En l'espèce on obtient $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3} = -1-\sqrt{2}$: les deux pentes sont égales, et les points A, B, C sont donc alignés. On notera que, si l'on avait calculé la pente de (BC), on aurait obtenu une expression encore différente : $p_{(BC)} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$. La raison d'être ainsi identifiée est générique : étant donné un système d'objets mathématiques, il est très utile de se doter, chaque fois que la chose est possible, d'un système d'écriture canonique de ces objets, et cela afin de pouvoir comparer sans ambiguïté deux tels objets. C'est ainsi que deux vecteurs seront rapportés à une même base, où ils ont une écriture unique, deux points du plan à un même repère, etc. Cette exigence prévaut dès les premiers apprentissages mathématiques. Les expressions $3\times7+5\times2$ et $7\times8-5\times5$ sont égales, mais la chose ne devient évidente que si on les écrit séparément sous forme canonique, c'est-à-dire si l'on « effectue les calculs » : $3\times7+5\times2 = 31$, $7\times8-5\times5 = 31$. C'est pour la même raison encore que l'on apprendra longuement à développer et à ordonner les expressions algébriques, ou à simplifier les fractions : pour les identifier à coup sûr. Ainsi les fractions $\frac{168}{252}$ et $\frac{252}{378}$ représentent-elles un même nombre dont l'écriture canonique est $\frac{2}{3}$. Mais la chose n'est pas *a priori* évidente, et seul un travail de « simplification », c'est-à-dire de *réécriture canonique*, permet de ne pas passer à côté de la vérité.

2. Organisations didactiques

2.1. Généricité et spécificité. – Les praxéologies didactiques ou *organisations didactiques* sont des réponses (au sens fort) aux questions du type « Comment étudier la question $q = \tau_T$? », ou « Comment étudier l'œuvre O ? » – réponses qu'on notera ici, génériquement, ∂q et ∂O, en sorte qu'on aura par exemple : $\mathrm{OD}_\theta = \partial\mathrm{OM}_\theta$. Cela précisé, la question se pose de savoir quels types de tâches relèvent d'une praxéologie *didactique* ; ou, pour le dire autrement, quels « gestes » peuvent être regardés comme *didactiques*.

La *question* « Comment étudier ♥ ? » dépend à l'évidence de l'*enjeu didactique* ♥. Une *réponse* à cette question, c'est-à-dire une organisation didactique ∂♥, en dépendra également : à partir d'un certain niveau d'organisation de l'étude, on n'étudie plus la question q de la *perspective* comme on étudierait la question q' de la *cryptographie*, par exemple ! Mais elle n'en dépendra pas au point qu'il n'y ait *rien* de commun entre une organisation didactique ∂q et une organisation didactique $\partial q'$. En fait, et ainsi qu'on l'a noté (leçon 2, 1.2.3), dans une institution donnée, seuls certains types de praxéologies didactiques, satisfaisant certaines contraintes, sont écologiquement viables : en conséquence, toutes les praxéologies ∂♥ se conformeront à ces contraintes, quel que soit ♥, sans qu'on puisse affirmer *a priori* que ces contraintes ne pèsent pas, écologiquement, sur les niveaux plus spécifiques d'organisation de l'étude.

La distinction entre ce qui serait spécifique de l'enjeu didactique, ♥, et ce qui ne le serait pas, apparaît ainsi, dans la perspective précédente, comme *relative*. L'opposition générique-spécifique a, si l'on peut dire, une structure *fractale*, en ce qu'elle se retrouve aux différents niveaux d'analyse du didactique. Ainsi, quel qu'en soit l'objet, il y a une *spécificité* de l'activité *didactique* parmi l'ensemble des activités humaines, spécificité qui, précisément, fonde le *genre* didactique, par delà ses différentes *espèces*, celles, notamment, que déterminent *les grands types d'œuvres* – mathématiques, physiques, littéraires, plastiques, etc. L'étude *scolaire* des mathématiques, ainsi, n'est pas un isolat institutionnel : elle se relie, à un certain niveau de généralité, à *l'ensemble* du didactique existant dans la société, et, en tout premier lieu, à l'ensemble du didactique scolaire. À plusieurs égards, bien entendu, elle possède des traits *spécifiques*, qui la distinguent de l'étude scolaire d'autres disciplines. Mais cette opposition reste relative : qu'est-ce qui, au vrai, est mathématique ? La frontière est indécise et, en tout cas, historiquement évolutive. Par ailleurs, à un moment donné, *les* mathématiques, c'est-à-dire les différentes *organisations* mathématiques, sont elles-mêmes diverses, et, par exemple, on n'étudiera pas l'algèbre tout à fait comme on étudie la géométrie. On parlera donc de l'étude de l'algèbre, de celle de la géométrie, ou de la statistique, etc. En cette descente vers des objets d'étude *toujours plus spécifiés*, l'opposition du générique et du spécifique *se trouve chaque fois reconduite*, sans annuler pour autant les oppositions de même forme repérées aux niveaux supérieurs. Il y aura ainsi une spécificité de l'étude de tel domaine mathématique, qui se laissera elle-même décliner en niveaux plus fins de spécification, et cela jusqu'au niveau « moléculaire » des organisations mathématiques ponctuelles constituées autour d'un unique type de tâches.

Par organisation didactique, on entendra donc *a priori* l'ensemble des types de tâches, des techniques, des technologies, etc., *appelés par l'étude concrète en une institution concrète*. L'approche classique en didactique des mathématiques a en général ignoré les aspects les plus *génériques* de l'organisation de l'étude au sein d'un type donné de systèmes didactiques. (Telle est par exemple l'attitude classiquement adoptée, s'agissant des systèmes didactiques scolaires, à propos de la question de l'*évaluation*, du *travail hors classe*, de son évaluation, etc.) Par contraste, la *problématique écologique*, qui est l'un des principaux moteurs de la TAD, conduit à examiner des questions pouvant se situer en un point *quelconque* de l'axe généricité-spécificité, parce que les problèmes *spécifiques* de l'étude d'une organisation mathématique locale particulière restent en général mal posés tant qu'on n'analyse pas les « choix » didactiques, conscients ou non, faits à des niveaux organisationnels *de moindre spécificité*. En conséquence, l'approche anthropologique fait droit à des aspects de l'organisation de l'étude généralement regardés comme relevant de choix « pédagogiques » ou « politiques » extérieurs au champ de questionnement de la didactique des mathématiques.

> Une organisation didactique ∂O comporte donc de multiples niveaux de spécification, dont aucun ne saurait être négligé et dont tous relèvent, à certains égards au moins, de la didactique. À un premier niveau, ainsi, on situera les conditions et contraintes propres à un *système d'enseignement* et à ses *établissements*, qui s'appliquent peu ou prou à toutes les matières qui y sont étudiées : pour le système scolaire français, on situera là, notamment, l'existence de cursus d'études strictement définis, celle de programmes nationaux, la distribution des élèves d'un niveau d'études donné (6^e, 5^e, 4^e, etc.) entre plusieurs communautés d'étude quasi autonomes – les *classes* du niveau considéré –, l'importance accordée aux professeurs par rapport aux autres aides à l'étude possibles, l'existence de systèmes et dispositifs didactiques auxiliaires (études encadrées, modules, etc.). À un deuxième niveau, on situera les déterminants *spécifiques de telle matière* figurant dans tel cursus d'études : on placera là, par exemple, les formes didactiques qui font sens *a priori* pour l'ensemble de la matière étudiée – comme il en va s'agissant de l'expérimentation ou de la démonstration, dans leurs aspects généraux, en mathématiques. Semblablement, les niveaux suivants de spécification concerneront les aspects propres à chacun des niveaux d'organisation de la matière étudiée – global, régional, local, ponctuel.

2.2. Le *topos* de l'élève et l'autre scène. – Dans le cadre des systèmes didactiques *scolaires* $\Sigma = S(X;y;P)$, auxquels on se limitera désormais, les types de tâches intégrés dans une praxéologie *mathématique* sont, traditionnellement, accomplis par un individu seul. L'élève $x \in X$ doit apprendre à factoriser, *seul*, sans l'aide d'autrui, certains types d'expressions algébriques ; à calculer, *par ses propres moyens*, la somme des fractions $\frac{4}{7}+\frac{8}{21}$, etc. En revanche, il n'a pas à apprendre seul : officiellement il reçoit pour cela, au moins, l'aide du professeur y.

Les tâches didactiques, en effet, sont, dans un certain nombre de contextes, *coopératives*, en ce sens qu'elles doivent être accomplies *de concert* par *plusieurs* personnes $x_1, ..., x_n$, les *acteurs* de la tâche. On dira que chacun des acteurs x_i doit en ce cas effectuer certains *gestes*, dont l'ensemble constitue alors son *rôle* dans l'accomplissement de la tâche coopérative t, ces gestes étant à la fois différenciés (selon les acteurs) et coordonnés entre eux par la technique τ mise en œuvre collectivement. Certains de ces gestes seront regardés comme des tâches à part entière, t', dans l'accomplissement desquelles x_i agira (momentanément) *en autonomie relative* par rapport aux autres acteurs de la tâche. L'ensemble de ces tâches, sous-ensemble du rôle de x_i lorsque t est accomplie selon τ, est nommé alors le *topos* de x_i dans t.

Le grec *topos* (qui correspond au latin *locus*) signifie « lieu » : le *topos* de x_i, c'est le « lieu de x_i », sa « place », l'endroit où, psychologiquement, x_i éprouve la sensation de jouer, dans l'accomplissement de t, « un rôle bien à lui ». Dans le cas d'une classe, on parlera ainsi du *topos* de l'élève et du *topos* du professeur. Ainsi, lorsqu'une classe de mathématiques « fait un exercice », ce qui est une tâche éminemment coopérative, la sous-tâche consistant à fournir l'énoncé de l'exercice revient, généralement, au professeur : elle appartient à son *topos*. La tâche consistant à produire – par exemple par écrit – une solution de l'exercice relève, elle, du *topos* de l'élève, tandis que la tâche consistant, ensuite, à fournir un corrigé ressortit, à nouveau, au *topos* du professeur. Si, au cours de la résolution de l'exercice, un élève pose une question au professeur, il effectue ainsi ce qui est vu ordinairement comme un simple geste, appelant un geste homologue de la part du professeur – geste qui peut consister, quelquefois, à... refuser de répondre.

L'une des difficultés didactiques les plus ordinaires et les plus pressantes pour un professeur est celle qu'il rencontre pour « donner une place aux élèves », c'est-à-dire pour créer, à leur intention, et à propos de chacun des thèmes étudiés, un *topos* approprié, qui donne à l'élève le sentiment d'avoir un « vrai rôle à jouer ». Ainsi, dans ce qu'on peut appeler l'enseignement-spectacle, que certaines modes pédagogiques ont pu pousser en avant au cours des décennies écoulées, les élèves sont sollicités fréquemment, mais n'interviennent en général que comme des figurants sans véritable rôle. Dans la plupart des cas, pourtant, une tâche didactique a pour acteurs et le professeur, et les élèves : lorsque le professeur s'engage dans une tâche où il opère en autonomie relative, cette tâche apparaît généralement comme une sous-tâche au sein d'une tâche plus vaste, où il coopère avec l'élève. L'étude du système des tâches et gestes du professeur, et plus généralement de tout autre aide à l'étude (parents, etc.), ne saurait donc être menée de manière isolée : derrière l'activité du professeur, on doit sans cesse apercevoir l'activité de l'élève.

Un point essentiel à cet égard consiste à examiner, en toute organisation didactique scolaire, la *qualité* et la *quantité* du travail autonome exigé des élèves x_i (pour assurer un bon rendement en termes d'apprentissage) et qui est *invisible* (officiellement) du professeur y. (Il existe aussi, bien entendu, tout un travail exigé de y et invisible de x, qui compte autant dans la viabilité d'une organisation didactique...) Il arrive que ce travail invisible, accompli par l'élève sur une *autre scène*, que le professeur peut en principe ignorer, tende à occuper l'essentiel de l'espace de l'étude, comme dans l'exemple ci-après.

L'étude et la classe : le cours H, un cas extrême

... à cinq ans, je fus inscrit au cours H. Cet établissement devait sa réputation à un dispositif très particulier, comportant plusieurs éléments. J'ignore si, dans l'esprit de ses créateurs – peut-être vaudrait-il mieux dire : de ses ingénieurs – les divers éléments du dispositif étaient délibérément combinés. Pour moi, ils le furent et le sont restés.

1. Nous n'étions convoqués qu'une fois par semaine, le matin pour un cours de deux heures.

2. À la fin du cours nous était remis un bref document ronéoté, appelé la « feuille », prescrivant avec une impeccable précision les devoirs, exercices, leçons, lectures que nous devions faire à la maison pendant l'intervalle, guidés, surveillés, instruits par nos répétitrices privées ou, pour les moins fortunés, par nos mères.

3. Mères et répétitrices assistaient au cours, séparées des élèves par une mince barrière. Elles n'étaient pas autorisées à intervenir mais se manifestaient parfois bruyamment par des soupirs, des exclamations, plaintives ou indignées, devant nos défaillances, nos étourderies [...].

4. Une même institutrice – pour nous, M$^{\text{lle}}$ Haussoye – nous régentait de la onzième à la septième incluse.

5. Pendant le cours, rien ne nous était enseigné (c'est pourquoi j'hésite à l'appeler cours). Ce que nous apprenions, nous l'apprenions à la maison, à condition de suivre à la lettre les prescriptions de la « feuille ». La séance hebdomadaire était en réalité un examen et même une sorte de concours. Nous étions en effet classés à l'issue de chaque séance [...]. Nous nous séparions après la proclamation des résultats pour ne nous retrouver que la semaine suivante. Nos amis se recrutaient ailleurs. Là, nous n'avions que des concurrents.

J.-B. Pontalis, *L'amour des commencements*, Gallimard, Paris, 1994, pp. 11-12.

En règle générale, pourtant, l'espace de l'étude a tendu depuis trois décennies à se restreindre – en principe – à la scène officielle de la classe. C'est pourtant par le travail *caché*, invisible, qui répond aux besoins d'étude engendrés par le travail de la classe mais non assumés par l'organisation didactique officielle, que se créent ou se renforcent, silencieusement, les inégalités de réussite entre élèves. On s'en souviendra au moment d'évaluer une organisation didactique (leçon 3).

Le problème du *topos* de l'élève comporte un aspect en quelque sorte inverse du précédent. L'élève peut être son propre directeur d'étude, *et l'est nécessairement en certaines choses*. Il ne saurait en revanche s'enseigner lui-même, d'entrée de jeu, ce que précisément il doit encore « apprendre » : entre l'élève et l'enseignant, la coupure est d'abord franche. La conséquence de cet état de fait ne saurait être surestimée : si l'apparition du professeur-directeur d'étude peut appauvrir la culture *didactique* de l'élève-étudiant, le mésusage de la fonction *enseignante* conduit plus radicalement à invalider *l'apprentissage mathématique lui-même*.

De là une situation dont Guy Brousseau a souligné avec force le caractère éminemment problématique : le contrat didactique « met le professeur devant une véritable injonction paradoxale. Tout ce qu'il fait pour faire produire, par l'élève, les comportements qu'il attend tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir (premier paradoxe didactique). Mais l'élève est lui aussi devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et, donc, il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre implique pour lui de refuser le contrat mais aussi d'accepter la prise en charge. L'apprentissage va donc reposer, non pas sur le bon fonctionnement du contrat, mais sur ses *ruptures* ».

L'élève doit accepter le professeur comme directeur d'étude, et, dans le même temps, renoncer presque violemment aux trompeuses facilités qu'il lui apporte comme enseignant – et cela, en principe, à propos de *chacun* des moments de l'étude, évaluation et institutionnalisation comprises. Le « drame didactique » que le mot de *topos* résume se noue ainsi autour du jeu du maître : toujours subtilement présent, fût-ce *in absentia*, celui-ci doit savoir se faire absent même *in praesentia*, pour laisser l'élève libre de conquérir une indépendance que la figure tutélaire du professeur rend tout à la fois possible et incertaine.

2.3. Les moments didactiques. – Comme toute organisation praxéologique, une organisation didactique s'articule en types de tâches (généralement coopératives), en techniques, en technologies, en théories. Mais comment décrire une telle organisation ? Quels en sont par exemple les principaux types de tâches ? On ne saurait s'attendre à ce que la (re)construction, au cours d'un processus d'étude, d'une organisation mathématique donnée soit elle-même organisée d'une manière unique. Mais on s'aperçoit pourtant que, quel que soit le cheminement de l'étude, certains *types de situations* sont nécessairement présents, même s'ils le sont de manière très variable, tant au plan qualitatif qu'au plan quantitatif. De tels types de situations seront appelés ici *moments de l'étude* ou *moments didactiques* parce qu'on peut dire que, quel que soit le cheminement suivi, *il arrive forcément un moment* où tel ou tel « geste d'étude » devra être accompli : où, par exemple, l'élève devra « fixer » les éléments élaborés (moment de l'institutionnalisation) ; où il devra se demander « ce que vaut » ce qui s'est construit jusque-là (moment de l'évaluation) ; etc.

La notion de moment ne renvoie qu'en apparence à la structure temporelle du processus d'étude. Un moment, au sens donné à ce mot ici, est d'abord une *dimension* dans un espace multidimensionnel, un *facteur* dans un processus multifactoriel. Bien entendu, une saine gestion de l'étude exige que chacun des moments didactiques se réalise *au bon moment*, ou, plus exactement, *aux bons moments* : car un moment de l'étude se réalise généralement *en plusieurs fois*, sous la forme d'une multiplicité d'épisodes éclatés dans le temps. À cet égard, on notera que l'ordre mis, ci-après, sur les différents moments didactiques est en fait largement arbitraire, parce que les moments didactiques sont d'abord une réalité *fonctionnelle* de l'étude, avant d'en être une réalité chronologique.

Le *premier moment* de l'étude est celui *de la première rencontre* avec l'organisation O enjeu de l'étude. Une telle rencontre peut avoir lieu de plusieurs manières, mais un mode de rencontre – ou de « rerencontre » – inévitable, sauf à rester à la surface de l'œuvre O, est celui qui consiste à rencontrer O à travers l'un au moins des types de tâches T_i constitutifs de O. Cette « première rencontre » avec le type de tâches T_i peut elle-même avoir lieu *en plusieurs fois*, en fonction notamment des environnements mathématiques et didactiques dans lesquels elle se produit : on peut *redécouvrir* un type de tâches comme on redécouvre une personne que l'on croyait connaître.

1. Qu'est-ce qui est rencontré dans une première rencontre avec une organisation mathématique O ? La question de l'identité de l'*objet* ainsi rencontré pour la première fois mérite examen. S'il existe en effet des premières rencontres *annoncées* – « Demain nous commencerons le cosinus d'un angle aigu », indique par exemple le professeur –, il existe aussi, à l'autre extrême, des premières rencontres vraies, qui, pourtant, passent presque entièrement *inaperçues* parce que, dans l'institution où elles se produisent, l'objet rencontré est en quelque sorte de deuxième, voire de troisième rang, et qu'il n'est rencontré que parce qu'il vit en étroite association avec l'objet véritable de la rencontre. Cette remarque conduit donc à distinguer le point de vue de l'*organisateur* de l'étude – qu'il s'agisse de l'élève, du professeur, ou de l'ingénieur didacticien – et le point de vue de l'*observateur*. Pour le premier, seuls *certains* objets appellent une mise en scène introductive, tandis que les autres sont censés s'introduire sans façon, comme silencieusement, dans l'organisation mathématique qui se construit. Pour le second, c'est à propos de *chacun* des objets qui s'introduisent dans l'organisation mathématique en construction que peut être posée la question de la première rencontre, et cela par exemple dans une perspective de réorganisation curriculaire, en vue notamment de donner un meilleur relief à un objet culturellement et didactiquement second, que l'on souhaite « promouvoir ».
2. Cela noté, que sont les *formes possibles* de la première rencontre ? Lorsqu'elle est expressément organisée, il semble que celle-ci ne puisse guère procéder que de *deux* grandes formes, dont les multiples combinaisons, dans leurs variantes développées ou, au contraire, dégradées, épuiseraient alors l'espace des possibles. D'un côté, la première rencontre peut s'inscrire dans une problématique *culturelle-mimétique*. En ce cas, par le truchement d'un récit ayant valeur de compte rendu d'enquête sur le monde, l'objet rencontré apparaît d'abord comme existant *par ailleurs*, en certaines pratiques sociales. Ce sous-moment « culturel », où l'objet n'existe encore qu'*en effigie*, de sorte que l'étudiant n'a avec lui que des rapports *fictifs*, est suivi d'un sous-moment « mimétique » où, par la manipulation *effective* de l'objet, l'étudiant est censé *imiter* le praticien – en « jouant », par exemple, au mathématicien, au géographe, au critique littéraire, etc.
3. Dans sa version la plus exigeante, la rencontre culturelle-mimétique conduit en principe à rechercher et à expliciter – sur le mode discursif – les *raisons d'être* de l'objet ainsi rencontré, c'est-à-dire les motifs pour lesquels cet objet a été construit, ou pour lesquels, du moins, il persiste dans la culture. Mais les « raisons des choses » n'affleurent pas toujours nettement dans la culture. De là que la rencontre culturelle-mimétique puisse se dégrader en une parodie de la pratique, qui occulte les *raisons* de la pratique.
4. Par réaction, et à l'opposé, on peut vouloir écarter toute référence à un réel préexistant qu'il s'agirait de reproduire en l'imitant, au profit de la création d'un réel *sui generis*, identifié à un système de situations dites *fondamentales* (qu'on peut nommer aussi *ombilicales*), dont l'élève, seul ou en équipe, est l'acteur principal, sinon unique, et qui, devant ses yeux, font naître l'objet comme ce qui permet de fabriquer une *réponse* à une ou des *questions* déterminées. La rencontre *en situation* conduit ainsi à proposer, *de facto* et peut-être même *de jure*, une « définition » de l'objet rencontré qui ne se veut pas simple copie des définitions déposées dans la culture, mais qui, en bien des cas, apparaît *a priori* comme un véritable *ajout à la culture* – ajout dont il convient alors de montrer la compatibilité avec les définitions connues, pour autant du moins que cette « définition en situation » ne s'est pas *déjà* intégrée au patrimoine culturel.
5. Comme il en va avec la rencontre culturelle-mimétique, la rencontre en situation inclut ainsi un sous-moment *culturel* – dont l'effet Jourdain est l'une des formes les plus spectaculaires. Il s'en faut en effet que toute situation de première rencontre effective soit une situation « ombilicale ». En bien des cas, la définition de l'objet par un système de situations fondamentales se trouve subrepticement écartée au profit d'une mise en scène de l'objet dans des « activités » qui, en dépit de quelques traits culturels conservés, n'ont qu'une relation assez relâchée avec ses raisons d'être les plus essentielles. D'une manière plus générale, il existe dans les pratiques didactiques courantes une large gamme de formes hybrides de premières rencontres, où une référence culturelle incomplètement assumée s'allie à des degrés variables avec une introduction « en situation » plus ou moins adéquate – aux plans épistémologique et cognitif.
6. On notera enfin que si, à l'évidence, la première rencontre ne détermine pas entièrement le rapport à

l'objet – lequel se construit et se remanie tout au long du processus d'étude –, elle joue cependant un rôle important dans l'économie de l'apprentissage, parce que, étant donné l'investissement institutionnel et personnel qu'elle impose (au double plan cognitif et libidinal), elle oriente en général fortement le développement ultérieur des rapports institutionnel et personnel à l'objet rencontré.

Le *deuxième moment* est celui de l'*exploration* du type de tâches T_i et de l'*élaboration d'une technique* τ_i relative à ce type de tâches. On notera que, contre une certaine vision héroïque de l'activité mathématique, regardée comme une suite erratique d'affrontements singuliers avec des difficultés toujours nouvelles, c'est bien *l'élaboration de techniques* qui est au cœur de l'activité mathématique. Au fantasme moderne de l'élève-héros triomphant sans coup férir de toute difficulté possible s'oppose ainsi la réalité indépassable de l'élève-artisan laborieux, qui, avec ses condisciples, sous la conduite avisée du professeur, élabore patiemment ses techniques mathématiques. En réalité, l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger : l'étude d'un problème *particulier*, spécimen du type étudié, apparaît ainsi, non comme une fin en soi, mais comme un *moyen* pour qu'une telle technique de résolution se constitue. Ainsi se noue une dialectique fondamentale : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type.

Le *troisième moment* de l'étude est celui de *la constitution de l'environnement technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$ relatif à τ_i. D'une manière générale, ce moment est en interrelation étroite avec *chacun* des autres moments. Ainsi, dès la première rencontre avec un type de tâches, il y a généralement mise en relation avec un environnement technologico-théorique antérieurement élaboré, ou avec des germes d'un environnement à créer qui se précisera dans une relation dialectique avec l'émergence de la technique. Pour des raisons d'économie didactique globale, toutefois, les stratégies de direction d'étude traditionnelles font en général de ce troisième moment la *première étape* de l'étude, étape qui est alors commune à l'étude de *plusieurs* types de problèmes T_i – tous ceux, parmi les types de problèmes à étudier, qui apparaissent comptables du même environnement technologico-théorique $[\theta/\Theta]$. L'étude de ces types de problèmes apparaît alors, classiquement, comme une suite d'*applications* du bloc technologico-théorique ainsi mis en place.

Le *quatrième moment* est celui du *travail de la technique*, qui doit à la fois améliorer la technique en la rendant plus efficace et plus fiable (ce qui exige généralement de retoucher la technologie élaborée jusque-là), et accroître la maîtrise que l'on en a : ce moment de mise à l'épreuve de la technique suppose en particulier un ou des corpus de tâches adéquats qualitativement aussi bien que quantitativement.

La technique mise en œuvre plus haut pour déterminer le maximum d'une fonction algébrique élémentaire n'a été travaillée que sur *deux* spécimens. Un travail plus poussé est nécessaire, ne serait-ce que pour explorer la *portée* de cette technique – ne réussirait-elle pas que sur ces deux spécimens, précisément ? Considérons ainsi le problème suivant : *déterminer le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un cercle de rayon r*. Si x est la mesure de l'un des côtés du rectangle, l'autre côté a pour mesure $y = \sqrt{(2r)^2-x^2}$, et l'aire du rectangle s'écrit xy. Cette aire est maximale en même temps que l'expression $(xy)^2$, et donc que $x^2(4r^2-x^2)$, expression qui atteint son maximum lorsque $x^2 = 4r^2-x^2 = 2r^2$, *i.e.* pour $x = y = r\sqrt{2}$. On peut étendre la portée de cette technique jusqu'à résoudre, par exemple, le problème suivant (v. leçon 3) : *dans un rectangle de carton de 50 cm par 80 cm, on veut construire une boîte sans couvercle en retranchant, à chaque coin de la plaque de carton, un carré de côté x cm ; déterminer x pour que la boîte obtenue ait une capacité maximale.*

Le *cinquième moment* est celui de *l'institutionnalisation*, qui a pour objet de préciser ce qu'est

« exactement » l'organisation mathématique élaborée, en distinguant notamment, d'une part les éléments qui, ayant concouru à sa construction, n'y seront pas pour autant intégrés, et d'autre part les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation mathématique visée – distinction que cherchent à préciser les élèves lorsqu'ils demandent au professeur, à propos de tel résultat ou de tel procédé, s'il faut ou non « le savoir ».

① Les autres moments de l'étude, en effet, ne livrent encore qu'une organisation mathématique *en chantier*, où l'ouvrage fait, voulu pour durer, se mêle nécessairement aux « reliefs » d'une construction élaborée par essais, retouches, arrêts et reprises. Or ce qui mérite de durer, ce qui vaut d'être pérennisé ne s'impose nullement de soi-même, à coup sûr. Tel exemple, dont l'examen a bien servi le projet de construction en révélant des perspectives *a priori* insoupçonnées, tel état de telle technique, que l'on aura mis longtemps à dépasser, tel théorème, en lui-même insuffisant mais qui fut le premier résultat *démontré*, seront-ils intégrés à l'organisation mathématique définitive, ou bien les écartera-t-on ? Le moment de l'institutionnalisation, c'est donc d'abord celui où, dans la construction « brute » qui, peu à peu, a émergé de l'étude, vont être séparés, par un mouvement qui engage l'avenir, le « mathématiquement nécessaire », qui sera conservé, et le « mathématiquement contingent », qui, bientôt, sera oublié. En ce sous-moment d'*officialisation*, une praxéologie mathématique désormais coupée de l'histoire singulière qui l'a portée à l'existence fait son entrée dans la culture de l'institution qui en a hébergé la genèse.

② Il s'en faut pourtant que cette entrée dans la culture détermine complètement l'avenir institutionnel de la praxéologie ainsi officialisée. Dans un second sous-moment, celui de l'institutionnalisation *stricto sensu*, les objets et rapports *officiels*, ingrédients déclarés de l'organisation en construction, vont être activés à des degrés divers, et, par là, vont « travailler ». Quelques rares objets, officialisés en bonne et due forme, n'auront, il est vrai, pas de vie ultérieure. (Ainsi, au début du Livre I des *Éléments*, Euclide introduit-il la notion de *rhomboïde*, qui ne sera plus utilisée dans la suite de l'ouvrage...) Mais telle n'est pas la loi générale : le « frottement institutionnel » provoque ordinairement l'évolution des rapports officiels vers des formes stables non dégénérées, les rapports *institutionnels*, qui, bien que se constituant solidairement avec les rapports *personnels* des acteurs de l'étude, sembleront bientôt s'en émanciper au point de paraître les gouverner.

③ C'est normalement la phase d'institutionnalisation qui *relance l'étude* en contribuant à mettre en évidence tel ou tel type de problèmes qui, bien que relevant de l'organisation mathématique locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$, n'a pas encore été étudié ou ne l'a été qu'insuffisamment. D'une manière plus générale, l'étude « complète » de O peut être décrite ainsi. Soit T_1, ..., T_n la suite des types de problèmes associés à la technologie θ, supposés étudiés *dans cet ordre*. Pour tout i, $1 \leq i \leq n$, une organisation *ponctuelle* $[T_i/\tau_i/\theta_i/\Theta_i]$ (constituée autour du type de problèmes T_i) se construit et vient s'intégrer à l'organisation *locale* déjà partiellement élaborée, $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq i-1}$, pour produire l'organisation locale $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq i}$. Lorsque $i = n$, on doit avoir $[T_j/\tau_j/\theta^{(j)}/\Theta^{(j)}]_{1 \leq j \leq n} = [T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{1 \leq i \leq n}$, soit l'organisation mathématique locale « visée ». Celle-ci, à son tour, devra s'intégrer dans l'organisation *globale* construite jusque-là. Le processus d'étude va ainsi chaque fois « rouvrir » l'organisation mathématique existante, pour la modifier en l'enrichissant, en la simplifiant, etc.

Le *sixième moment* est celui de l'*évaluation*, qui s'articule au moment de l'institutionnalisation (dont il est à certains égards un sous-moment) : la supposition de rapports institutionnels transcendants aux personnes, en effet, fonde en raison le projet d'évaluer les rapports *personnels* en les référant à la *norme* que le moment de l'institutionnalisation aura ainsi hypostasiée. En pratique, il arrive un moment où l'on se doit de « faire le point » : car ce moment de réflexivité où, quels que soient le critère et le juge, on examine ce que *vaut* ce qui a été appris, ce moment de véridiction qui, malgré les souvenirs d'enfance, n'est nullement une invention de l'École, participe en fait de la « respiration » même de toute activité humaine (v. leçon 3).

L'opération d'évaluation doit être entendue aussi en un sens plus large : derrière l'évaluation toute classique des rapports *personnels*, c'est-à-dire derrière l'évaluation « des personnes », se profile l'évaluation de la *norme elle-même* – le rapport institutionnel qui sert d'étalon. Que vaut, en fait, l'organisation mathématique qui s'est construite et institutionnalisée ? Au-delà de l'interrogation sur la maîtrise, par telle personne, de telle technique on trouve alors l'interrogation *sur la technique elle-même* – est-elle puissante, maniable, sûre, robuste aussi ? Cette évaluation – à laquelle les usages scolaires font, il est vrai, une fort petite part – est ici formatrice, non d'une personne, mais d'une praxéologie : à ce titre, elle participe de l'institutionnalisation. Réformatrice, elle relancera l'étude, suscitera la reprise de tel ou tel moment, et peut-être de l'ensemble du parcours didactique.

2.4. Une remarque technique. – Le modèle des moments de l'étude a, pour le professeur, deux grands types d'emplois. Tout d'abord, il constitue une grille pour l'*analyse* des processus didactiques. Ensuite, il permet de poser clairement le problème de la *réalisation* des différents moments de l'étude. Comment par exemple réaliser concrètement la première rencontre avec telle organisation mathématique ? Avec tel type de tâches ? Comment conduire l'étude exploratoire d'un type de tâches donné ? Comment mener à bien l'institutionnalisation ? Comment réaliser le moment de l'évaluation ? Autant de questions qui se posent au professeur et auxquelles on répondra provisoirement par une formule générique : *en créant des situations didactiques adéquates*. Cette exigence, que l'on ne fera ici que repérer, est en fait d'autant plus complexe que le professeur est tout à la fois le *metteur en scène* et l'*acteur* de situations didactiques dont, le plus souvent, il est en outre le *concepteur*.

Leçon 3. – Évaluer, développer : quelques remarques

1. Évaluer

1.1. Un schéma universel, un geste fondamental. – En nombre de situations, nous sommes amenés à opérer selon le schéma à quatre temps ($T_1 \to T_2 \to T_3 \to T_4$) indiqué plus haut. Face à quelque obligation d'agir, en effet, nous commençons en général par *observer* et *analyser* (T_1 & T_2) la manière de faire de quelque autrui (« Et eux, qu'est-ce qu'ils font ? Comment ils font exactement ? »). Puis nous *évaluons* ce qu'observation et analyse auront ainsi révélé (« Qu'est-ce que ça vaut, tout ça, finalement ?... »), avant de *développer* notre propre « solution » en essayant d'améliorer, sur certains points jugés négativement, la « solution » observée. Ainsi en va-t-il, très banalement, de n'importe quel professeur chaque fois que, remettant son ouvrage sur le métier, il se décide à « observer » un ou plusieurs manuels (de manière plus ou moins systématique), à « analyser » (peut-être superficiellement) leur contenu, à « évaluer » (de façon parfois peu nuancée) ce contenu, enfin à « développer » (quelquefois hâtivement), sur cette base, son propre « produit » – « son cours ».

On notera que le schéma précédent s'applique tout aussi bien lorsque le professeur prend pour objet o, non quelque « modèle » à démarquer pour « préparer son cours », mais les « solutions » produites par ses élèves, solutions que, tour à tour, le professeur observera (en exigeant par exemple de chaque élève qu'il lui remette une « copie »), qu'il analysera (en corrigeant ces copies), qu'il évaluera (par la note attribuée et les annotations portées sur la copie), avant de développer sa propre solution (sous la forme d'un « corrigé » présenté aux élèves oralement et/ou par écrit). Un peu de réflexion montre encore que, dans la fabrication de sa « solution », chaque élève aura lui-même mis en œuvre le *même* schéma à quatre temps, observant (en classe et dans le manuel) certaines « manières de faire », les analysant mais aussi les *évaluant* (par exemple en rejetant tel élément – manière de dire, etc. – qu'il regardera comme un « truc de prof » inassumable par lui, en valorisant au contraire tel élément qu'il considérera – peut être à tort – comme emblématique de ce qu'attend le professeur, etc.), avant et afin de « développer » sa propre solution. En fin de compte, on reconnaîtra ici au schéma proposé, dans le cadre de l'approche anthropologique, une valeur universelle : dans une forme plus ou moins développée, quiconque projette une action le retrouve spontanément.

Dans ce schéma d'action, l'étape de l'évaluation *constitue un geste fondamental*, qui appelle quelques remarques très générales. Soulignons tout d'abord que l'évaluation dont il est question ici ne doit pas être pensée à partir de la seule évaluation scolaire, telle que l'assume le professeur à l'endroit des productions d'élèves. C'est en fait le contraire qui est vrai : l'évaluation scolaire gagne à être saisie comme une spécification de la notion générique d'évaluation. Mais qu'en est-il alors d'une telle notion « générique » ? Estimer la *valeur* d'un objet *o*, lui attribuer une valeur (d'une manière ou d'une autre), bref, *évaluer* est une activité qui, *a priori*, peut porter sur *n'importe quel* objet, être le fait de *n'importe qui* – de n'importe qui a « de la jugeote » –, prendre place en quelque *institution* que ce soit – même s'il est vrai que toutes les combinaisons d'un objet *o*, d'une personne *x* et d'une institution *I* ne sont pas nécessairement « permises ». On notera surtout que la vie d'une institution semble fréquemment saturée d'actes d'évaluation, à ce point même que de telles pratiques, en partie « sauvages », sont parfois regardées comme une véritable gêne, dont l'importance doit être contrôlée.

Certains philosophes antiques – tel Pyrrhon (365-275 av. J.-C.), dont Montaigne se fera le disciple – ont ainsi fait du *refus de juger* le fondement de la vie heureuse : « ... les jugements que les hommes portent sur la valeur de telle ou telle chose ne sont fondés que sur des conventions. En fait, il est impossible de savoir si telle chose est, en soi, bonne ou mauvaise. Et le malheur des hommes en effet vient de ce qu'ils veulent obtenir ce qu'ils croient être un bien ou fuir ce qu'ils croient être un mal. » (Pierre Hadot, *Qu'est-ce que la philosophie antique ?*, Gallimard, 1995, p. 176.).

S'il n'est évidemment pas question d'adopter une problématique du refus de juger, il est cependant toujours nécessaire de réfléchir sur le bon usage de la *suspension de jugement* – l'*epoché* des Stoïciens. En particulier, l'analyse (et, avant cela même, l'observation) ne doit pas devenir, subrepticement, évaluation. Il est vrai sans doute que l'état de suspension de jugement constitue normalement le fond de toute vie institutionnelle, sur lequel s'élève alors le bruissement des jugements de valeur. Mais on doit répéter ici qu'il faut savoir allouer un temps – celui de l'observation et de l'analyse – à la suspension de jugement ; et un temps propre – celui de l'évaluation – à la nécessité quasi vitale de juger.

Devant cette nécessité, l'important est alors de se souvenir que l'activité d'évaluation est toujours, et nécessairement, *relative*. La valeur reconnue à un objet n'est en effet nullement intrinsèque, absolue, parce que l'attribution de valeur se réfère toujours, implicitement ou non, à un certain *usage social* de l'objet évalué : on évalue toujours *d'un certain point de vue*.

Comme l'indique un dictionnaire de psychologie en langue anglaise, la valeur est « The quality or property of a thing that makes it useful, desired or esteemed ». L'auteur ajoute alors : « Note the pragmatic aspect implied by this definition; the value of a thing is given by its role in a (social) transaction, the thing itself does not possess value. (Arthur S. Reber, *The Penguin Dictionary of Psychology*, Penguin Books, 1985).

C'est dans cette perspective que l'on se situera ci-après à propos du problème plus spécifique de l'évaluation – dans une classe *I*, par un élève *x*, ou un professeur *y*, ou un observateur *z* – d'un objet *o* qui sera une *organisation mathématique* OM_θ ou une *organisation didactique* OD_θ associées à un certain thème d'étude mathématique θ. Pour simplifier et clarifier le propos, on se limitera toutefois à considérer le cas de l'évaluation *a priori*, par un professeur *y*, d'organisations mathématique et didactique OM_θ et OD_θ préalablement observées dans la littérature (manuels, etc.), et analysées par *y* en vue de développer des organisations selon son cœur, OM_θ^y et OD_θ^y, à « mettre en place » dans une classe dont il a la responsabilité.

1.2. Évaluer des types de tâches. – On se réfère ici à une organisation soit *ponctuelle* (de la forme $[T/\tau/\theta/\Theta]$), soit *locale* (de la forme $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]$). Dans tous les cas, que le thème d'étude imposé θ s'identifie à un certain type de tâches mathématiques *T* (organisation ponctuelle), ou qu'il renvoie au « noyau générateur » d'un bloc technologico-théorique (organisation locale), l'évaluation s'appuiera sur des critères explicites, à préciser et à justifier, dont l'analyse préalable devra permettre de dire dans quelle mesure ils sont satisfaits par l'organisation mathématique à évaluer. En fonction des considérations précédentes, et à titre d'exemples, on mentionnera ici la courte liste suivante, évidemment non exhaustive :

Critère d'identification. – Les types de tâches T_i sont-ils clairement *dégagés* et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus K_i effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?

Critère des raisons d'être. – Les *raisons d'être* des types de tâches T_i sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

Critère de pertinence. – Les types de tâches considérés fournissent-ils un *bon découpage* relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des « isolats » sans lien véritable – ou explicite – avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ?

Pour illustrer le troisième critère, considérons un *genre* de tâches – *vérifier un calcul* – dont la pertinence paraît génériquement évidente, mais dont la concrétisation sous la forme de *types de tâches déterminés* est en général mal prise en charge dans le curriculum secondaire français.

1. Un type de tâches que l'on peut considérer à cet égard est relatif au thème θ_1 des écritures fractionnaires : *vérifier le résultat d'un calcul de fractions* – telle par exemple l'égalité $\frac{7}{9} + \frac{4}{6} = \frac{13}{9}$. En l'espèce, une technique peut consister à vérifier, *à l'aide d'une calculette*, l'égalité du produit de chacun des deux membres de l'égalité obtenue par le produit des dénominateurs des fractions ; ainsi aura-t-on : $(9{\cdot}6)\left(\frac{7}{9}+\frac{4}{6}\right) =_c 78$ & $(9{\cdot}6)\,\frac{13}{9} =_c 78$.

2. Un deuxième type de tâches consiste à *vérifier le résultat d'un calcul algébrique* – telle par exemple l'égalité $(x-3)(2x+1) = 2x^2-5x-3$. En l'espèce on peut, à la main ou par calcul mental, vérifier l'égalité obtenue pour deux valeurs simples de x $(0, \pm 1, \pm 2$, etc.) ; et/ou on peut, à l'aide d'une calculette, vérifier l'égalité pour $x = \pi$ ou $x = \sqrt{2}$, etc. On obtient ainsi par exemple : $(x-3)(2x+1)_{|x=0} = -3$ & $2x^2-5x-3_{|x=0} = -3$; $(x-3)(2x+1)_{|x=3} = 0$ & $2x^2-5x-3_{|x=3} = 18-15-3$; $(x-3)(2x+1)_{|x=\pi} =_c 1{,}031245534$ & $2x^2-5x-3_{|x=\pi} =_c 1{,}031245534$. Une autre technique consiste à choisir une valeur c pour x et à remplacer *certaines* occurrences de x par cette valeur, avant de résoudre l'équation ainsi obtenue pour vérifier qu'elle admet bien la solution $x = c$. Ainsi a-t-on, pour $x = 4$: $2x+1 = 29-5x \Leftrightarrow 7x = 28 \Leftrightarrow x = 4$; pour $x = 2$: $-(2x+1) = 5-5x \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = 2$.

3. Un troisième type de tâches consiste à *vérifier le résultat d'un calcul avec radical* – telle l'égalité $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = 18+8\sqrt{5}$. On peut ici remplacer le radical $\sqrt{c}$ par x et résoudre l'équation ainsi obtenue pour vérifier qu'elle admet la solution $x = \sqrt{c}$. On a ainsi : $\frac{(3+x)^2}{3-x} = 18+8x \Leftrightarrow (3+x)^2 = (3-x)(18+8x) \Leftrightarrow x^2+6x+9 = -8x^2+6x+54 \Leftrightarrow 9x^2 = 45 \Leftrightarrow x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{5}$.

1.3. Évaluer des techniques. – L'évaluation des techniques supposent de même des critères, dont quelques-uns seulement seront évoqués ici. Ainsi, les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées, ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur *portée* est-elle satisfaisante ? Leur *fiabilité* est-elle acceptable étant donné leurs conditions d'emploi ? Sont-elles suffisamment intelligibles ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenables ? On donne ci-après, s'agissant de ces critères, quelques exemples illustratifs.

① Une technique proposée peut être *insuffisamment travaillée et mise au point*, de sorte que, non seulement sa *portée* soit indûment limitée, mais encore que son *intelligibilité* soit obscurcie. La technique d'optimisation élémentaire vue plus haut permet par exemple de résoudre le problème suivant : *Déterminer le rectangle d'aire maximale qu'on peut inscrire dans un cercle de rayon r*. En désignant par x et $y = \sqrt{(2r)^2-x^2}$ les mesures des côtés du rectangle cherché, on a en effet : aire maximale $\Leftrightarrow$ xy maximale $\Leftrightarrow$ $(xy)^2$ maximale $\Leftrightarrow$ $x^2(4r^2-x^2)$ maximale $\Leftrightarrow x^2 = 4r^2-x^2 = 2r^2 \Leftrightarrow x = y = r\sqrt{2}$. Considérons alors le problème suivant : *Dans un rectangle de carton de 50 cm par 80 cm, on veut construire une boîte sans couvercle en retranchant, à chaque coin du carton, un carré de côté x cm ; déterminer x pour que la boîte obtenue ait une capacité maximale*. La technique déjà mise en œuvre conduit ici au constat suivant : $V = (50-2x)(80-2x)x$ maximal $\Leftrightarrow$ $4V = (50-2x)(80-2x)(4x)$ maximal $\Leftrightarrow$ $50-2x = 80-2x = 4x = 130/3$. L'égalité impossible $50-2x = 80-2x$ semble indiquer qu'il n'y a pas de solution. Où est donc la faille ?...

② Une technique peut être insuffisamment *fiable*. C'est ainsi que le calcul, traditionnel en France, non sur des *grandeurs* (comme 5 km, 32 cm², 18 m/s², 12 g/dm³, etc.), mais sur les seules *mesures* de ces grandeurs (5, 32, 18, 12, etc.), c'est-à-dire en excluant les unités des calculs pour ne les réintroduire qu'à la fin, constitue une technique peu fiable, si on la compare avec la technique, sans doute plus « lourde », consistant à calculer directement sur les grandeurs, c'est-à-dire avec les unités. Soit ainsi à calculer la masse linéique M, en g/cm, d'un barreau d'acier de section constante, de 4 dm de longueur, qui pèse 2,85 kg ; on a : $M = \frac{2{,}85\text{ kg}}{4\text{ dm}} = \frac{2{,}85\,(10^3\text{ g})}{4\,(10\text{ cm})} = \frac{285\text{ g}}{4\text{ cm}} = \frac{285}{4}\text{ g/cm} = 71{,}25\text{ g/cm}$. De même, soit à déterminer la masse M, en grammes, de 9 cm³ de zinc, sachant que la masse volumique du zinc est de 7,29 kg/dm³ ; on a : $M = (7{,}29\text{ kg/dm}^3)(9\text{ cm}^3) = (7{,}29\text{kg}\cdot\text{dm}^{-3})(9\text{cm}^3) = 7{,}29(10^3\text{g})(10\text{cm})^{-3}(9\text{cm}^3) = 7{,}29\cdot 9\text{ g} \approx 65{,}6\text{ g}$.

③ Bien d'autres cas peuvent être cités pour illustrer le caractère défectueux de certaines techniques mises entre les mains des élèves, qui révèle surtout l'absence de techniques adéquates, parfois parfaitement disponibles « en théorie » (ou plutôt : « en technologie »), mais que la tradition d'enseignement ignore. En géométrie élémentaire, ainsi, les résultats (disponibles aujourd'hui en Seconde) exprimant le fait que le plan pointé est un espace vectoriel de dimension 2, ne sont pas employés pour fabriquer une technique à l'emploi beaucoup plus sûr, fondée sur la notion de repère du plan. À titre d'exemple considérons le problème suivant : *Soit un triangle ABC et soit I, J, K les milieux de [BC], [CA], [AB]. Est-il vrai que les segments [AI] et [JK] ont toujours le même milieu ?* Appelons M le milieu de [AI] et N le milieu de [JK], et exprimons $\vec{AM}$ et $\vec{AN}$ dans le repère $(A,\vec{AB},\vec{AC})$. On a : $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AI} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$ & $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AJ} + \frac{1}{2}\vec{AK} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AC}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$: on a donc bien M = N. On notera encore qu'une variante (« barycentrique ») de cette technique est possible qui fait gagner en fiabilité tout en allégeant les calculs. On peut en effet écrire, d'un côté, $M = \frac{1}{2}(A+I) = \frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{2}(B+C)\right) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$, de l'autre $N = \frac{1}{2}(J + K) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(C+A) + \frac{1}{2}(A+B)\right) = \frac{1}{2}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C$. D'où M = N. On peut encore aller plus loin en écrivant (« vectoriellement ») : $4(M-N) = 2(A+I)-2(J+K) = 2A+2I-2J-2K = 2A+(B+C)-(C+A)-(A+B) = 0$: d'où...

④ Certaines des techniques précédentes ont plus d'avenir que d'autres, et satisfont davantage les besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui et, le cas échéant, pour demain. Semblablement, la technique de commençant consistant à « mettre des flèches » pour développer une expression comme $(x-3)(2x+1)$ n'a guère d'avenir, moins en tout cas que la technique qui consisterait à poser $y = 2x+1$ et à écrire : $(x-3)(2x+1) = (x-3)y = xy - 3y = x(2x+1) - 3(2x+1) = 2x^2 + x - (6x+3) = 2x^2 - 5x - 3$. Même si, en effet, il deviendra (en principe) rapidement inutile de recourir à l'une et l'autre technique dans le type de calcul envisagé ici, la seconde technique, en effet, est celle-là même qu'on emploiera chaque fois qu'un calcul deviendra localement trop complexe.

1.4. Évaluer des technologies. – Des remarques analogues aux précédentes peuvent être faites à propos du bloc technologico-théorique. Ainsi, étant donné un énoncé, le problème de sa justification est-il seulement *posé* ? Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme allant de soi, évident, naturel, ou encore bien connu ("folklorique") ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ? Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités ? Là encore on donnera quelques exemples.

① Un résultat effectivement utilisé peut n'avoir même pas fait l'objet d'une interrogation. Ainsi en va-t-il fréquemment s'agissant de l'*unicité* des écritures canoniques utilisées, par exemple quand on doit écrire sous la forme $u+v\sqrt{e}$ une expression du type $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ (où $a, b, c, d, u, v \in \mathbf{Q}$ et où $e \in \mathbf{N}$ est un entier non carré parfait). L'unicité est, ici comme en d'autres cas, pragmatiquement impliquée par le « postulat pédagogique » selon lequel existe *une* bonne réponse – ce qui seul justifie que le professeur rejette comme nécessairement erronée la réponse de l'élève ayant obtenu *une autre expression*. Dans le cas évoqué, la justification est en fait relativement peu coûteuse : si $u+v\sqrt{e} = s+t\sqrt{e}$ et si $v \neq t$, alors $\sqrt{e} = \frac{u-s}{t-v} \in \mathbf{Q}$, etc.

② La justification d'un « théorème en acte » dans la classe peut en outre mettre en jeu des éléments technologiques non seulement disponibles mais encore au cœur même des mathématiques étudiées. Ainsi en va-t-il pour ce « postulat implicite » selon lequel, quels que soient $a, b, c, d \in \mathbf{Q}$ et $e \in \mathbf{N}$ non carré parfait, il *existe* $x, y \in \mathbf{Q}$ tels que $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e}$. On a ici : $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = x+y\sqrt{e} \Leftrightarrow a+b\sqrt{e} = (c+d\sqrt{e})(x+y\sqrt{e}) \Leftrightarrow cx + dey = a \;\&\; dx+cy = b$. Le système obtenu a pour déterminant $c^2-d^2e \neq 0$. Le système possède donc une solution (x,y). Ici comme dans le cas précédent, la clé de la démonstration est le fait que $\sqrt{e} \notin \mathbf{Q}$ – auquel il faudra donc faire une (petite) place dans l'histoire de la classe…

③ Le résultat technologique évoqué dans ce qui précède – l'existence et l'unicité d'une certaine écriture canonique – n'a pas pour unique fonction de *justifier* des pratiques existantes. Il peut être exploité en vue de *produire* de nouvelles techniques. On peut ainsi envisager de déterminer l'écriture canonique d'une expression de la forme $\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}}$ par la technique mise en œuvre ci-après:: $\frac{(3+\sqrt{5})^2}{3-\sqrt{5}} = x+y\sqrt{5} \Leftrightarrow (3+\sqrt{5})^2 = (3-\sqrt{5}$ $(x+y\sqrt{5}) \Leftrightarrow 14 + 6\sqrt{5} = (3x-5y) + (-x+3y)\sqrt{5} \Leftrightarrow 3x - 5y = 14 \;\&\; -x + 3y = 6 \Leftrightarrow x = 18 \;\&\; y = 8$.

Des questions analogues devront bien entendu être soulevées à propos des éléments *théoriques* de l'organisation mathématique examinée : y a-t-il des éléments théoriques explicites ? Implicites ? Que permettent-ils d'éclairer ? De justifier ? Etc.

1.5. Évaluer une organisation didactique ? – La question de l'évaluation d'une organisation didactique OD_θ constitue un point de convergence de l'ensemble des études en didactique des mathématiques, en même temps qu'elle est, de manière explicite ou implicite, l'un des moteurs les plus puissants du progrès des recherches didactiques. Un traitement même sommaire de cette question appellerait donc de longs développements, qui ne peuvent trouver place dans le cadre de ces leçons : une nouvelle suite de leçons serait ici nécessaire ! Faute de pouvoir proposer mieux, on laissera donc le lecteur s'inspirer des quelques développements consacrés plus haut à l'analyse d'une organisation didactique pour élaborer ses critères d'évaluation (existence d'un *topos* pour l'élève, prise en charge des différents moments de l'étude, etc.).

2. Développer

Plus encore sans doute que l'étape de l'évaluation, la question du *développement* doit être située dans un prolongement à venir du travail réalisé dans ces leçons. Sur ce sujet on se contentera donc d'énoncer deux principes « théoriques », susceptibles d'éclairer le travail technologico-technique ultérieur.

Le premier principe est celui de l'*hétérogénéité historique et institutionnelle* des « matériaux » constitutifs d'une praxéologie existante ou à construire. De ce point de vue, il n'existe pas par exemple d'organisation didactique qu'on pourrait dire *d'époque*, de part en part *datée*, ou, à l'autre extrême, entièrement *moderne* en chacun de ses composants. Les activités de développement doivent prendre en compte cette nécessité d'un « métissage historique » de toute production possible : toute « novation » est partiellement conservatrice, en ce qu'elle réutilise – de manière parfois inédite –des matériaux anciens, que l'on pourrait autrement juger « obsolètes ».

Comme le souligne Michel Serres, aucune création n'est véritablement de *telle* époque : « Considérez une voiture automobile d'un modèle récent : elle forme un agrégat disparate de solutions scientifiques et techniques d'âges différents ; on peut la dater pièce à pièce : tel organe fut inventé au début du siècle, l'autre il y a dix ans et le cycle de Carnot a presque deux cents ans. Sans compter que la roue remonte au néolithique. L'ensemble n'est contemporain que par le montage, le dessin, l'habillement, parfois seulement par la vanité de la publicité » (Michel Serres, *Éclaircissements* (entretiens avec Bruno Latour), François Bourin, Paris, 1992, p. 72).

Cette observation s'applique à l'évidence aux organisations mathématiques – tel résultat date de la fin du XVII^{e} siècle, tel autre n'apparaît publiquement qu'en 1821, tel autre encore n'a été démontré qu'en 1965, etc. Mais le panachage historique est plus évident encore s'agissant du didactique : la solution d'hier, fût-elle aujourd'hui oubliée, sera demain peut-être partiellement reprise, dans une combinaison nouvelle, novatrice. En conséquence, les activités de développement devront, en la matière, reposer sur une *enquête qualitativement large*, aussi bien *en diachronie* qu'*en synchronie*, enquête à laquelle le développement récent de moyens de communication et d'information puissants (Internet, etc.) peut donner aujourd'hui une nouvelle vigueur.

Le second principe que l'on énoncera ici introduit la notion de *proche développement* en se référant pour cela à la *problématique écologique*, constitutive de l'approche anthropologique en didactique. D'une manière générale, la problématique écologique – « Pourquoi ceci ? », « Pourquoi pas cela ? », etc. – conduit à questionner le réel observable pour se déprendre de l'évidence du fait établi, vécu comme naturel. L'illusion de « naturalité » de l'ordre institutionnel est, dans le registre de l'action, la racine de beaucoup de conservatismes et le fourrier de beaucoup d'impuissances : si les choses sont comme elles sont parce qu'elles se conforment à un ordre naturel, toute modification que l'on voudrait leur imprimer apparaît comme une subversion de cet ordre du monde, ce qui justifie aussi bien le conformisme du quotidien qui est le lot de la plupart que la religion de l'exceptionnel dont quelques-uns se font les grands prêtres.

Par contraste, le questionnement écologique permet de réinterroger l'ordre de choses existant : s'il est vrai que, généralement, le réel est comme il est parce que de fortes contraintes l'imposent, on peut toujours se proposer d'examiner les modifications qui, *pour un coût acceptable*, par exemple en laissant inchangé l'essentiel des conditions prévalantes, pourraient créer un *nouvel état stable*, tenu pour plus approprié. L'ensemble de ces états « proches » (et viables) de la réalité à développer constitue la *zone de proche développement* de cette réalité.

La problématique écologique apparaît ainsi comme le fondement d'un *art du possible*. La réalité observée peut être en fait instable, faiblement robuste, et ne perdurer que parce que des conditions rarement réalisées se trouvent localement satisfaites. À l'inverse, le « simplement possible » peut parfois advenir et persister, par un changement limité dans les conditions prévalantes. À côté donc d'états écologiquement très improbables, il existe toute une zone où le virtuel peut s'actualiser et l'actuel devenir virtuel au gré de variations de faible ampleur. Des configurations seulement imaginées peuvent demain être une banalité du quotidien, tandis que d'autres, depuis toujours inscrites dans le paysage institutionnel familier, peuvent en un moment disparaître sans retour. De là un effacement de la frontière entre l'existant et le possible, et l'ouverture d'une zone assez large où l'on passe sans discontinuité marquée du virtuel au réel et inversement – zone « de proche développement » qui est en elle-même une invitation à travailler.

ANALYSE DES PRATIQUES ENSEIGNANTES ET DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES :

LA THEORIE ANTHROPOLOGIQUE

ATELIERS ET TRAVAUX DIRIGES

Présentation

A l'issue du cours d'Yves Chevallard, les participants étaient séparés en trois groupes, chaque groupe travaillant sur un thème mathématique du collège différent à partir d'un corpus de données : *Ecritures fractionnaires, Nombres relatifs* et *Equations du 1^er degré et modélisation algébrique*. Chaque corpus de données était constitué pour l'essentiel de deux types de documents : des comptes rendus d'observation, d'une part, des traces écrites de l'activité d'une classe, d'autre part[1].

> Un compte rendu d'observation est le récit d'une séance de classe observée lors de la visite d'un élève-professeur dans le cadre de sa formation à l'IUFM, récit anonymé tant en ce qui concerne le professeur que les élèves. Les traces écrites de l'activité d'une classe sont extraites de corpus constitués par les élèves-professeurs sur un thème donné, appelés « corpus B » ; ces corpus contiennent la photocopie (anonymée) des cahiers, des devoirs surveillés et à la maison de trois élèves de la classe, des documents donnés par le professeur aux élèves lors de l'étude du thème, ainsi qu'une présentation de ces données par l'élève-professeur.

Le type de travail réalisé à partir de ces corpus était identique dans les trois groupes : il s'agissait d'abord de déterminer l'organisation mathématique (premier jour) et l'organisation didactique (deuxième jour) mises en place – ou du moins ce que les données permettaient d'en déterminer – puis d'évaluer l'organisation mathématique identifiée (troisième jour), ce travail s'effectuant selon deux modalités : d'abord un atelier, où les responsables présentaient l'analyse d'un fragment du corpus de données, puis des travaux dirigés dans lesquels les participants analysaient un autre fragment du corpus.

Plutôt que de donner un compte rendu fidèle de ce qui s'est passé lors des ateliers et des travaux dirigés dans chaque groupe, nous avons choisi de présenter l'analyse d'une partie significative du corpus de chaque thème du point de vue des trois dimensions citées plus haut – organisation mathématique, organisation didactique, évaluation de l'organisation mathématique –, en mettant en lumière, autant que possible, la technique utilisée pour effectuer l'analyse. Nous espérons que ce travail constituera pour le lecteur un outil efficace d'étude de la théorie anthropologique.

[1]Outre ces deux types de documents, on trouvait également des extraits des programmes de mathématiques du collège correspondant au thème travaillé ainsi qu'une liste de questions posées par des élèves-professeurs sur ce même thème.


Moment de la première rencontre!
Serge.
09/07/98.

ÉCRITURES FRACTIONNAIRES : étude de traces écrites de l'activité d'une classe de cinquième.

Michel Jullien & Jacques Tonnelle
IUFM d'Aix-Marseille

Le corpus consacré au thème de l'enseignement des écritures fractionnaires au collège se compose de cinq parties. La première partie est consacrée à des « questions ombilicales » (voir le cours) de professeurs stagiaires sur ce thème.

Les deuxième et troisième parties contiennent chacune un compte rendu d'observation en classe. La quatrième partie est consacrée à des « traces écrites de l'activité d'une classe » sur le thème des fractions (pour les conditions de constitution de ces comptes rendus et de ces traces écrites, voir la présentation générale). Enfin, les programmes en vigueur des classes concernées clôturent ce corpus.

Le travail en atelier et en travaux dirigés a consisté à produire des analyses de ces différentes observations à l'aide des outils théoriques présentés dans les différentes parties du cours, notamment la notion centrale « d'organisation praxéologique ».

Ce texte ne présente pas une chronique du travail du groupe sur cette question, mais a l'ambition de mettre par écrit l'essentiel des analyses produites au cours de ce travail. De plus, et bien que les analyses aient porté sur chacune des trois observations du corpus, nous avons choisi de décrire celles ayant trait aux « traces écrites de l'activité d'une classe ». Ce type d'observation a le mérite de couvrir une assez longue période d'étude et de parcourir ainsi l'ensemble des activités de la classe sur ce thème. C'est seulement cette partie de l'ensemble du corpus proposé aux participants de l'Université d'Eté que nous avons reproduit en annexe. Le lecteur pourra, le cas échéant, s'y reporter.

Le travail d'analyse a été découpé en deux grandes parties. Dans un premier temps, il consistait à mettre à jour l'organisation (praxéologique) mathématique mise en place dans cette classe à propos de ce thème d'enseignement, ou tout au moins ce qu'on peut en voir à travers l'étude des traces écrites d'un élève de la classe. La deuxième partie a porté sur l'analyse de l'organisation (praxéologique) didactique qui a servi à mettre en place l'organisation mathématique. C'est dans cet ordre que nous allons présenter les résultats de ce travail d'analyse.

Nous évoquerons sommairement dans une troisième partie la question de la valeur de ces organisations praxéologiques.

Mais, dans le but de se familiariser avec ce corpus, il convient de commencer par une description événementielle et linéaire, de l'ensemble des activités de la classe.

1. Structure et contenu de l'ensemble de la séquence observée

Comme il est indiqué dans l'en-tête de la chronique de l'étude (page 140 en annexe), cette séquence constitue le tout de l'étude du thème des écritures fractionnaires dans cette classe de cinquième. Elle s'est déroulée d'un seul tenant, entre le 28 novembre 1996 et le 16 janvier 1997 durant environ dix-sept heures. Le programme de référence est donc celui qui était en vigueur jusqu'en 1997 et qui a subi des modifications depuis.

Le cahier de l'élève dont les traces écrites sont reproduites se divise classiquement en une partie « Cours » et une partie « Exercices ». Le cours fait l'objet du troisième chapitre de l'année. Il s'intitule, en conformité avec les textes officiels, « Nombres en écritures fractionnaires » et est bâti selon le plan suivant :

I. Comparaison des fractions
   1. Les fractions
   2. Égalité de fractions
   3. Simplification
   4. Comparaison de fractions
   5. Utilisation de la simplification
   6. Comparaison à 1
II. Opérations sur les fractions
   1. L'addition des fractions
   2. La multiplication des fractions
   3. Fraction et partie entière

La partie « Exercices » s'ouvre sur les énoncés des exercices proposés (essentiellement issus du manuel en vigueur dans la classe), se poursuit par les traces écrites de l'élève concernant ces exercices et se termine par les énoncés et les copies (corrigées) relatifs à un devoir à la maison et un devoir en classe.

Le détail du contenu de chacune des séances est indiqué dans la chronologie de la page 140 et on s'y reportera au fur et à mesure, si nécessaire.

2. L'organisation mathématique

Il s'agit de donner une description de l'organisation mathématique mise en place dans cette classe de 5^{e}, c'est-à-dire de décrire le plus précisément possible la réalité mathématique qui s'est construite dans cette séquence.

On peut comparer, selon une métaphore qu'on aura l'occasion de reprendre, le travail de la classe (du professeur et des élèves) à la construction d'une maison. Ce qu'on regarde, en essayant d'identifier l'organisation mathématique mise en place, c'est le résultat final en dehors des aléas du chantier.

L'organisation mathématique que l'on peut observer dans ce corpus est une organisation mathématique régionale qui correspond au secteur d'études des écritures fractionnaires.

Un premier travail consiste à identifier les *types de problèmes* qui ont été travaillées et tels qu'on peut les identifier à travers les traces écrites qui sont à la disposition de l'élève K.

2.1. Les types de problèmes

C'est d'abord dans les exercices qu'on va essayer de les identifier.

Les énoncés des exercices se trouvent pour la plupart aux pages 154 et 155 du corpus. La reproduction du cahier d'exercices commence à la page 156.

Le travail d'analyse permet d'identifier huit types de problèmes qui peuvent s'énoncer de la façon suivante :

- T_0 : Étant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer s'il s'agit d'un nombre entier, d'un nombre décimal, ou si ce n'est ni l'un ni l'autre.
- T_1 : Simplifier une fraction $\frac{a}{b}$, avec a et b entiers strictement positifs donnés.

• T_2 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, déterminer si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; plus généralement, étant donné les fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$, déterminer celles d'entre elles qui sont égales.

• T_3 : Étant donné les fractions $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, ..., \frac{a_n}{b_n}$, les ranger par ordre croissant (resp. décroissant).

• T_4 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, calculer $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ et mettre le résultat sous forme simplifiée.

• T_5 : Étant donné deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, calculer $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ et mettre le résultat sous forme simplifiée.

• T_6 : Étant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer les entiers n, p et q tels que $\frac{a}{b} = n + \frac{p}{q}$, avec $p < q$.

• T_7 : Étant donné une grandeur g_0 dont on connaît la mesure par rapport à une unité u, trouver la mesure, dans cette même unité, d'une grandeur g dont on connaît la mesure par rapport à g_0 prise comme unité.

Une remarque complémentaire s'impose. Dès le début du cours, la définition différencie les « fractions » des « écritures fractionnaires » en réservant cette dernière expression aux cas ou l'un au moins des numérateurs et dénominateurs ne sont pas entiers. Ce distinguo posé et en dépit du titre du chapitre (d'ailleurs en conformité avec les textes officiels), il ne sera plus guère question dans la suite des activités mathématiques de la classe que des fractions d'entiers excepté dans quelques exemples illustrant la simplification des fractions (l'occurrence , dans le cours, d'une telle écriture est d'ailleurs accompagnée d'une mise en garde, cf. pages 144 et 145) et... dans le devoir en classe.

2.2. Les techniques et les éléments technologiques associés

Il s'agit, à travers ces traces écrites, d'identifier et de décrire les techniques mises à la disposition de la classe pour étudier ces types de problèmes. Ce travail nécessite en fait un examen approfondi des diverses activités de la classe afin d'exhiber des manières de faire laissées largement implicites dans la plupart des cas. Pour ne pas multiplier les renvois, nous étudions à la suite les technologies de ces techniques.

Le type de problèmes T_0

Le problème T_0 est rencontré par l'intermédiaire d'un seul spécimen qui comporte sept fois le même travail. Il constitue le premier exercice du chapitre. Mais, la toute première rencontre a lieu en fait dans le cours. En effet, au détour de la remarque : « une fraction peut être égale à un nombre entier, un nombre décimal, ou bien ni l'un ni l'autre » - formulation un peu maladroite qui pourrait laisser entendre une intersection vide entre l'ensemble des entiers et celui des décimaux - P propose cinq exemples de fractions, mentionne leur appartenance à l'une des catégories précédentes et accompagne ce résultat de l'indication, entre parenthèses, d'une écriture décimale exacte ou approchée (selon le cas) de cette fraction, sans qu'aucun lien causal ne soit clairement explicité. L'exercice correspondant que l'on trouve dans le cahier d'exercices est bâti exactement sur le même modèle, ce qui laisse à penser qu'il s'agit d'un exercice fait en classe. Ce type de problèmes, rencontré au tout début du chapitre ne semble plus évoqué par la suite et ne fait l'objet d'aucune évaluation.

On peut en déduire que la technique τ_0 mise en oeuvre est de manière évidente l'effectuation de la division, sans doute à l'aide d'une calculatrice. Autrement dit, elle repose sur l'idée que la recherche de l'écriture décimale du nombre (s'il en a une) permet de résoudre la question de sa nature. Cet élément technologique est resté implicite, en tout cas il ne figure pas dans les traces écrites dont on dispose.

Deux points méritent d'être ici soulignés. D'une part, comme toute technique, elle a son domaine de validité et on devine que dans certains cas d'autres connaissances seront nécessaires pour savoir si l'écriture décimale est finie ou pas. Mais P évite complètement cette difficulté en ne proposant que des exemples de nombres rationnels non décimaux dont la longueur de la période est 1[1]. D'autre part, on sait qu'une autre technique existe et a existé dans l'enseignement : elle consiste à regarder la présence ou l'absence d'autres facteurs que 2 et 5 dans la décomposition primaire du dénominateur de la fraction irréductible. Les connaissances que sa mise en oeuvre nécessite ne sont pas disponibles aujourd'hui à ce niveau des études, mais il n'en a pas été toujours ainsi.

C'est ainsi que dans un manuel d'arithmétique de l'enseignement primaire supérieur[2] on trouve l'exercice : "La fraction 7/64 peut-elle être convertie exactement en fraction décimale ? Justifier la réponse par un raisonnement ". L'examen du cours montre que l'élève dispose d'un théorème : "Pour qu'une fraction ordinaire irréductible puisse être convertie en nombre décimal, il faut et il suffit que son dénominateur ne contienne pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5 ". Ce théorème est dûment démontré dans le cours.

Le type de problèmes T_1

On dénombre trois exercices (il s'agit des exercices n° 5, 6 et 7) qui portent exclusivement sur le type de problèmes T_1, ce qui représente 33 spécimens de ce problème. C'est un signe de l'importance que P lui a accordé.

La technique mise en oeuvre par l'élève K, et que l'on peut repérer à travers ses exercices, consiste à trouver un diviseur commun au numérateur et au dénominateur et à effectuer la division. Un élément de preuve intervient dans ce schéma : il consiste à matérialiser l'opération de division par deux flèches surmontées du diviseur commun (voir pages 156, 157 et 158).

L'élément technologique sur lequel se fonde cette technique se trouve dans le cours, à la page 144. On y énonce la propriété $\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}$ dans un paragraphe intitulé « Egalité de fractions ». Cet énoncé est précédé lui-même d'une brève expérimentation de cette égalité pour deux couples de fractions. L'aspect sommaire du compte rendu de cette expérimentation (en particulier, il manque la mise en évidence de l'existence d'un multiplicateur k et le fait qu'elle

[1] Ce critère ne suffit pas, à lui tout seul, à assurer la réussite de la technique. L'écriture décimale que la plupart des calculatrices donne du nombre 2469133333/2000000000 est 0.1234566667, ce qui laisse à penser que le 6 se répète indéfiniment...

[2] A. Millet, *Arithmétique*, 1re, 2e, 3e Années du Brevet Élémentaire (programme de 1920), Hachette, 1923.

ne porte que sur des décimaux ne doivent pas occulter qu'il s'agit d'une tentative de justification de la propriété. Dans le paragraphe suivant, intitulé « Simplification », on peut lire la phrase « la règle précédente permet de 'fabriquer' différentes écritures fractionnaires d'un même nombre ». L'exemple qui illustre cette remarque n'utilise pas formellement la « règle » énoncée, mais l'égalité des fractions est justifiée par la mise en évidence à l'aide de flèches d'un multiplicateur commun, le jeu sur le sens des flèches permettant d'éviter d'écrire des divisions. C'est sans doute dans cet exemple qu'il faut voir l'origine de la technique utilisée par l'élève K. Une utilisation plus stricte de la règle amènerait la technique plus classique suivante :

$$\frac{15}{20}=\frac{5\times 3}{5\times 4}=\frac{3}{4}.$$

Le paragraphe se termine par la définition de la forme irréductible d'une fraction comme la « forme la plus simple sous laquelle peut s'écrire une fraction ». L'aspect peu mathématique de cette définition est d'abord le signe du manque d'une notion adéquate et est, bien évidemment, un effet du curriculum. L'absence, à ce niveau, des notions élémentaires d'arithmétique, n'autorise pas que vive, de manière mathématiquement contrôlée, la notion de forme irréductible d'une fraction ni l'idée, pourtant fondamentale, d'écriture standard d'un nombre dont l'intérêt saute aux yeux dès lors que l'on se pose la question de l'égalité de deux résultats, par exemple.

En fait, dans la plupart des exemples proposés, l'élève obtient la forme irréductible en un seul « coup » (le PGCD du numérateur et du dénominateur est un nombre premier ou est facilement repérable, comme 100 par exemple). Ce choix semble permettre d'éviter la rencontre avec la question de la meilleure simplification ce qui risquerait de montrer l'absence de critère.

Notons encore que, dans les traces écrites, on ne repère aucune indication sur la façon de trouver un diviseur commun et les quelques critères de divisibilité étudiés en classe de Sixième et qui sont largement employés pour la résolution de ce type d'exercices ne sont pas rappelés dans le cours à la page 147, au moment où la simplification va de nouveau entrer en scène pour la comparaison des fractions.

Le type de problèmes T_2

En lien étroit avec la technique précédente, la technique τ_2 relative au type de problèmes T_2 est utilisée dans deux exercices : les numéros 11 et 12.

n°11. *Marions-les.* Trouver les paires de fractions égales :

$$\frac{9}{39};\frac{12}{9};\frac{3}{13};\frac{35}{10};\frac{12}{17};\frac{4}{3};\frac{35}{27};\frac{77}{56};\frac{60}{85};\frac{3{,}5}{2{,}7};\frac{11}{8};\frac{7}{2}.$$

n°12. *Chasse l'intrus !* Dans chaque ligne, chasser la fraction qui n'est pas égale aux autres :

a) $\frac{50}{60};\frac{60}{48};\frac{10}{8};\frac{6}{4};\frac{15}{12};\frac{25}{20};\frac{5}{4}.$

b) $\frac{5}{30};\frac{1}{6};\frac{4}{24};\frac{10}{60};\frac{2}{12};\frac{3}{18};\frac{5}{3}.$

c) $\frac{24}{36};\frac{6}{9};\frac{10}{15};\frac{14}{21};\frac{1{,}2}{1{,}8};\frac{3}{2};\frac{8}{12}.$

Dans l'exercice n°11, il s'agit de la même technique. Pourtant, dans l'exercice n°12, qui consiste à identifier l'intrus dans une suite de fractions, se pose le problème d'une technique permettant de dire si deux nombres écrits sous forme fractionnaire sont différents. L'élève K explique en une phrase écrite en début d'exercice (« On cherche la forme irréductible de chaque fraction ») la façon de s'y prendre, même si les calculs nécessaires à cette technique n'apparaissent pas dans ce qui suit. La technique utilisée se fonde donc sur l'unicité de la forme irréductible. Ce résultat n'est nulle part mentionné dans ces traces écrites. L'élément justificatif est donc une connaissance « folklorique ». Une autre technique alternative s'appuierait sur la proposition réciproque de la propriété énoncée dans le cours, à savoir que les seules fractions égales à $\frac{a}{b}$ sont de la forme $\frac{k\times a}{k\times b}$. Mais cette réciproque n'est pas énoncée elle non plus.

Le type de problèmes T_3

En ce qui concerne le type de problèmes T_3, on en trouve douze spécimens dans le cahier de l'élève. La difficulté de ces exercices varie en fonction de différents facteurs. Certaines fractions proposées ont toutes le même dénominateur : c'est le cas de quatre de ces exercices. La technique τ_3 consiste à ranger les fractions dans l'ordre de leur numérateur. Elle est explicitement indiquée dans le cahier de l'élève K. En effet, on peut y lire, à deux reprises, la phrase : « On classe ces fractions si les dénominateurs sont les mêmes dans l'ordre décroissant de leurs numérateurs ». C'est, à peu de choses près, l'énoncé de la propriété du cours à la page 146 :

> Propriété : Les fractions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs.

On peut remarquer incidemment que l'élève a écrit « fonctions » à la place de « fractions » (lapsus de P ?) sans que cela n'ait semblé troubler sa compréhension. La formulation même de cette propriété induit très fortement la technique qu'elle justifie. Comparer, par exemple, à un énoncé du type :

> Propriété : De deux fractions ayant le même dénominateur, la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Cette propriété est amenée par une « activité » faite en classe et dont l'énoncé est issu du manuel en vigueur. Les traces écrites relatives à cet exercice permettent de supposer qu'il s'agit de six grilles du type « grilles de mots croisés » auxquelles on associe la fraction ayant pour numérateur le nombre de cases noires et pour dénominateur le nombre total de cases. Chacune de ces grilles ayant le même nombre de cases, on obtient ainsi six fractions de même dénominateur. Le rangement de ces six fractions dans l'ordre croissant est alors indiqué sans qu'aucun élément justificatif ne l'accompagne. L'exercice apparaît davantage comme une « mise en scène » de la propriété que comme une expérimentation de celle-ci.

On peut noter par ailleurs que la réussite de l'accomplissement de cette tâche suppose la connaissance des ordres croissant et décroissant.

Dans six autres spécimens les fractions proposées n'ont pas toutes le même dénominateur et dans quatre de ces cas, l'énoncé mentionne entre parenthèses la consigne « trouver un dénominateur commun ».

On peut donc compléter la technique τ_3 mise en place pour résoudre le type de problèmes T_3 :

- si les fractions ont le même dénominateur, elles sont rangées dans le même ordre que leur numérateur ;

- sinon, on se ramène au cas précédent en trouvant des fractions égales aux précédentes et qui ont toutes le même dénominateur.

Mais comment trouver un dénominateur commun ? Quelle technique mettre en oeuvre pour accomplir cette sous-tâche du type de tâches T_3 lorsqu'on accomplit cette dernière suivant la technique τ_3 ?

On ne trouve guère de technique clairement exposée pour ce type de tâches. Sans doute parce que le programme alors en vigueur ne considère pas la comparaison de fractions de dénominateurs différents comme une « compétence exigible », le professeur n'a pas cru bon de mettre entre les mains des élèves une technique nettement identifiée. Dans le cours, il est seulement précisé que la technique de simplification des fractions permet, le cas échéant, de trouver des dénominateurs communs, encore que cela soit davantage suggéré (par un exemple) que véritablement montré. Les exigences du devoir en classe sont, de ce point de vue, tout à fait en accord aussi bien avec les textes qu'avec la pratique de la classe.

Le cahier d'exercices montre que l'élève K réduit effectivement les fractions au même dénominateur afin de les ranger, mais ne dit rien sur la façon de s'y prendre, et cela même dans les deux derniers cas où les dénominateurs en présence ne sont pas des multiples d'un même nombre :

> **n°17**. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :
> a) $\frac{13}{21}$; $\frac{152}{17}$; $\frac{13}{17}$; $\frac{5}{17}$.
> b) $\frac{3}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{5}{4}$.

Dans deux cas, l'énoncé donne un moyen de déterminer la série de fractions qu'il faut ensuite ranger :

> **n°19.** a) Ecrire les fractions inférieures ou égales à 1 qui ont pour dénominateur 7 (les dénominateurs *(sic)* étant des nombres entiers).
> b) Ranger par ordre croissant les fractions obtenues en a).
>
> **n°20.** Ranger par ordre décroissant les fractions comprises entre 1 et 2 dont le dénominateur est entier.

Ce dernier exercice a un énoncé est un peu mystérieux : fallait-il écrire que $2 > 3/2 > 4/3 > 5/4 > 6/5 > 7/6 >... > 1$? On peut en douter ! Mais alors que faire ? En fait, l'élève K a pris les fractions de dénominateur 7 et de numérateur entier comprises entre 1 et 2.

A propos de ce type de problèmes, on trouve dans le cahier d'exercices un travail fait apparemment en classe et qui consiste à comparer deux fractions dont la taille des numérateurs et dénominateurs impose l'aide d'une calculatrice. En effet, il s'agit de comparer $A = \frac{13860}{33461}$ et $B = \frac{33461}{80782}$. Dans un premier temps, on constate que les approximations décimales données par une calculatrice sont les mêmes pour les deux fractions. On ne peut donc conclure. C'est alors par la réduction au même dénominateur, en prenant le produit des dénominateurs comme dénominateur commun, que l'on parvient enfin à les comparer pour conclure que $A < B$. La conclusion de cet exercice est une mise en garde : « Se méfier de la machine »...

Notons enfin que le cahier de cours montre qu'un type de tâches un peu différent a été travaillé : il s'agit de la comparaison à 1 des fractions. Ce travail fait l'objet d'un paragraphe du cours (le sixième et dernier dans le chapitre consacré à la comparaison des fractions) qui se termine par l'énoncé d'une propriété :

> Propriété : Lorsque le numérateur d'une écriture fractionnaire est plus grand que le dénominateur, le nombre que représente cette écriture est plus grand que 1. Lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur, ce nombre est plus petit que 1.

Cependant, on ne trouve pas de trace d'exercices portant sur ce type de tâches.

Le type de problèmes T_4

On trouve 70 spécimens environ de ce type de tâches, de difficulté et de présentation variables. C'est un domaine extrêmement travaillé. La technique proposée est essentiellement basée sur la propriété énoncée dans le cours :

> Propriété fondamentale :
> Pour calculer une somme (ou une différence) de fractions ou d'écritures fractionnaires ont doit avoir le même dénominateur
>
> $\boxed{\frac{a}{d}+\frac{b}{d}=\frac{a+b}{d}}$ $\boxed{\frac{a}{d}-\frac{b}{d}=\frac{a-b}{d}}$
>
> - On additionne (ou on soustrait) les numérateurs
> - On conserve le dénominateur.

On voit comment la dernière partie de la propriété vient mettre en place la technique. Il n'y a d'ailleurs rien de plus dans le cours.

La première partie de la propriété constitue un élément technologique en même temps qu'elle fonde la technique. Elle n'est pas démontrée. Tout au plus est-elle introduite par la résolution de deux exercices qui l'ancre dans la résolution de problèmes « concrets » et qui justifie plutôt le fait qu'on puisse avoir besoin, à certains moments, de savoir additionner deux (ou plusieurs) fractions. Encore que les exemples choisis (ce sont tous des nombres décimaux) ne justifient guère cette nécessité : il suffirait de donner leurs écritures décimales respectives, ce qui fournirait, de surcroît une preuve de la propriété pour le cas des nombres décimaux.

La technique d'addition et de soustraction des fractions s'accompagne d'une exigence supplémentaire, mais qui n'est nulle part énoncée : celle de fournir le résultat sous forme irréductible. L'examen des pratiques de l'élève K le montre bien, comme il montre qu'une exigence justificative est satisfaite dans chacun des exercices en mettant chaque fois en oeuvre la propriété énoncée dans le cours. En voici un exemple :

$\frac{49}{3}-\frac{18}{3}=\frac{49-18}{3}=\frac{31}{3}$ on ne peut pas la simplifier

On notera enfin que, dans l'énoncé de la propriété, le terme « écritures fractionnaires » est de nouveau utilisé. Pourtant, comme cela a déjà été signalé, l'élève en aura très peu rencontré.

Le type de problèmes T_5

Le schéma d'ensemble de l'organisation mathématique pour le type de tâches T_5 est sensiblement le même que pour le type de tâches précédent : l'énoncé de la propriété suit une expérimentation et fonde la technique de multiplication des fractions. Dans les exercices, ce type de tâches aura été rencontré par l'intermédiaire de 6 spécimens seulement.

Le type de problèmes T_6

Ce type de tâches, clairement décrit dans le programme, apparaît dans 8 spécimens. la technique de résolution semble ici très peu précisée. Il s'agit de décomposer le numérateur en la somme de deux nombres « bien choisis », puis d'utiliser la propriété de la somme de deux fractions « à l'envers ». On obtient une nouvelle écriture de la fraction de départ sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction. L'entier obtenu est alors dénommé la partie entière :

$$\frac{17}{2} = \frac{16+1}{2} = \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8\times 2}{2} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}.$$

La partie entière est 8.

On voit que cette technique nécessite l'effectuation de sous-tâches d'un type nouveau (écrire que $\frac{16+1}{2}$ est égal à $\frac{16}{2} + \frac{1}{2}$, par exemple) et des sous-tâches déjà étudiées (simplifier la fraction $\frac{16}{2}$). Mais elle nécessite aussi l'effectuation de sous-tâches moins clairement définies : décomposer 17 en 16+1. Est-ce que écrire, par exemple, $\frac{17}{2} = \frac{14+3}{2} = \frac{14}{2} + \frac{3}{2} = \frac{7\times 2}{2} + \frac{3}{2} = 7 + \frac{3}{2}$ est juste ? Est-ce que ça répond à la question ? Cet aspect n'est pas pris en compte par la technique mise en place, tout au moins à travers les traces écrites dont on dispose.

Pourtant, dans le cours, on voit apparaître une division euclidienne. Mais le lien qu'il peut y avoir avec ce type de tâches (effectuer la division euclidienne du numérateur par le dénominateur) et le type de tâches T_6 est resté très implicite et l'élève K ne l'indique jamais dans la résolution de ses exercices.

A noter que le travail inverse, consistant à retrouver la fraction connaissant sa partie entière et sa partie fractionnaire, a été donné à faire 8 fois. On considère qu'il s'apparente au type de problèmes T_4.

Le type de problèmes T_7

Il faut reconnaître dans l'énoncé de ce type de problèmes celui qu'on désigne plus traditionnellement par l'expression « prendre une fraction d'une grandeur ». La formulation adoptée veut préciser le champ mathématique dont ce type de problèmes est issu. Elle permet de l'inclure dans le champ plus vaste des problèmes de changements d'unités et de justifier ainsi que l'on fasse une multiplication. Par conséquent, inclure cette tâche dans un type de tâches plus vaste va faire travailler la question de la technologie et de la technique.

Dans le cahier d'exercices on rencontre une « activité » et un exercice qui portent sur ce type de problèmes. Il apparaît ainsi dans le registre des *applications* du cours sur les fractions. Par exemple, on trouve dans le cahier d'exercices :

Les $\frac{2}{5}$ de 30 font : $30 \times \frac{2}{5} = \frac{30}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12.$

Puis, un peu plus loin :

Combien valent les $\frac{8}{5}$ des $\frac{3}{11}$ de 1100 ?

$$1100 \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{1100}{1} \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{26400}{55}.$$

Un type de problèmes est donc rencontré et une technique est mise en place qui pourrait ainsi s'énoncer : pour prendre une fraction d'une grandeur on multiplie la grandeur par cette fraction. Elle n'est pas énoncée par écrit et on ne trouve pas non plus d'éléments technologiques qui viendraient la justifier. On a donc l'exemple ici d'une organisation praxéologique à peine abordée où le type de tâches a été rencontré en deux occasions, et si un savoir-faire a été localement élaboré il ne s'est pas accompagné de la mise en place d'un savoir nettement identifié.

2.3. Les aspects théoriques

On ne trouve pas trace d'éléments théoriques dans ce corpus. Bien sûr, tout ce qui est dit sur les fractions repose essentiellement sur le fait que ce sont des *nombres* et donc qu'ils ont toutes les propriétés des nombres et qu'en particulier, les équations du type bx = a n'ont qu'une seule solution (b ≠ 0) dont une écriture est $\frac{a}{b}$. C'est sur cet élément de théorie que repose la définition d'une telle écriture que l'on adopte en classe de Sixième. Mais ce point théorique n'est absolument pas explicité ici.

3. L'organisation didactique

On s'intéresse ici à l'ensemble des dispositifs qui permettent la mise en chantier du thème des écritures fractionnaires. Ils constituent le cadre dans lequel les gestes de direction d'étude pourront être déployés par P. C'est le cas, par exemple, de la correction d'exercices. Ce geste suppose la dévolution d'énoncés plus ou moins problématiques que les élèves ont à traiter dans le cadre de ce que l'institution dénomme travail à la maison. Un bon fonctionnement du dispositif conduit normalement à un progès collectif dans l'étude du type de problèmes étudié au cours de la correction en classe. L'apparition récurrente d'un tel dispositif au cours du traitement didactique des différents thèmes étudiés durant l'année favorise une efficacité croissante de ce geste d'étude. Il doit posséder certaines caractéristiques parmi lesquelles la régularité favorise la robustesse du dispositif. Notons que le geste de correction d'exercices concourt à l'évaluation personnelle (affermissement de l'autonomie), favorise le traitement de l'erreur et conforte l'institutionnalisation de la praxéolologie mathématique étudiée.

On se donne donc pour objectif de procéder à un relevé systématique des dispositifs didactiques qui organisent et structurent l'étude. L'enquête peut être menée au moyen des *moments didactiques*. Celle-ci permet de dégager les fonctions didactiques des différentes phases de l'étude qui se donnent à voir dans le corpus. On repère ainsi certains dispositifs peu apparents si l'on s'en tient à une lecture strictement chronologique.

Ces dispositifs peuvent aussi être situés sur l'axe spécificité-généricité. Il s'agit de mettre en relation les moyens de l'étude construits dans l'interaction régulière entre les acteurs - P et élèves - avec l'organisation mathématique élaborée simultanément. Une question fondamentale apparaît en toile de fond de cette enquête : dans quelle mesure le montage didactique va-t-il favoriser (ou non) un apprentissage heureux ?

3.1. La structure de l'étude dans ses aspects les plus génériques

Une description sommaire de l'étude est fournie dans le tableau de la page 140. Elle permet quelques premières observations.

a) On constate une segmentation du thème dont l'étude se réalise pendant 17 heures, en périodes d'égale importance ;

b) Chaque période est l'occasion d'introduire un sous-thème nouveau relevant du thème principal. Par exemple : égalité de fractions; simplification; comparaison de fractions; utilisation de la simplification; comparaison à 1, etc. ;

c) Des exercices *d'application directe* sont systématiquement donnés en classe et à la maison ;

d) Ces derniers sont corrigés lors de la séance suivante ;

e) La séquence s'achève par une séance d'exercices, la réponse à des questions d'ordre général et un temps de *mise au point* (laquelle mise au point ne se traduit pas formellement dans les traces écrites) ;

f) Un contrôle en classe suivi d'une séance de correction de ce contrôle clôturent la séquence ;

Ces observations peuvent être affinées à la lumière des notes de l'élève K.

a) Séparation entre une partie *Cours* et une partie *Exercices.*Toutefois, une rubrique intitulée *Activités* figure tantôt dans la partie *Cours* et tantôt dans la partie *Exercices.*

b) Dans la section *Exercices*, tout nouvel exercice est indiqué par son numéro et la page où on peut trouver son énoncé dans le manuel de la classe.

c) Les énoncés d'exercices ne figurent jamais parmi les notes de correction de ces exercices. Ils affleurent toutefois, mais pas toujours, et souvent de manière concise, dans les exercices intégrés dans le *Cours*. Quant aux énoncés des exercices intitulés Activités, ils sont à de rares exceptions, totalement absents.

d) La prise de notes, faite au titre des exercices, ne permet que très rarement une observation sur la nature de la correction qui en a été faite collectivement. Cela empêche de distinguer ce qui relève du travail propre de l'élève de ce qui est produit par le professeur lui-même : aucun corrigé n'apparaît ainsi systématiquement différencié. Cette contrainte intrinsèque à l'objet observé pose une question : comment penser des dispositions générales qui assureraient une plus grande efficacité ? En l'espèce, cette absence d'information sur le dispositif *correction d'exercices* n'a probablement que peu d'incidences immédiates sur les résultats de l'élève K qui s'avère être un très bon élève,.réussissant tous ses exercices. Mais si le travail personnel d'un élève moins performant n'est pas formellement distingué de ce qui est produit par le professeur lui-même, on peut craindre que le travail réalisé au titre des exercices corrigés en classe ne favorise pas chez cet élève l'*autonomie* effective que P est en droit d'attendre de lui dans le travail à la maison.

e) Le relevé systématique des énoncés des exercices empruntés au manuel de la classe indique que la progression dans la complexité est dosée de manière à permettre, a priori tout au moins, un *travail de la technique* de qualité. Sans chercher à préciser cette dimension, on enregistre toutefois deux énoncés marginaux. Il y a tout d'abord un énoncé équivoque (Ex n°20) pour lequel l'analyse mathématique fournit de nombreuses réponses possibles, et dont la correction ne marque pas l'ambiguïté. Bien que cet énoncé soit unique en son genre, on peut s'interroger sur ce que peut objectivement faire un élève soucieux d'utiliser les techniques standard rencontrées. En second lieu, on trouve un énoncé qui convoque au passage la notion de volume sans qu'une réelle technique ait été clairement installée à l'égard des grandeurs. L'interrogation précédente peut dans ce cas être reconduite. Le dispositif qui est concerné ici est la sélection des exercies à donner aux élèves. Selon quelle technique établir cette liste de manière à assurer un bon usage d'une technnique donnée ?

f) Parmi les cinq énoncés du contrôle en classe, deux sont problématiques sur le plan du contrat didactique. L'exercice n°2 invite à compléter une série de six égalités de fractions pour lesquelles il y a un place laissée libre (exercice à trou). Ce type de tâche, en apparence proche de la tache T_2, n'a jamais été rencontré par les élèves dans les exercices en tant que tel. De la même façon l'exercice n°5 pose deux petits problèmes de modélisation et fait simultanément référence à l'idée de grandeur, notion qui n'est pas travaillée dans le corpus d'exercices. C'est un témoignage supplémentaire du fait que les notions de fractions et de grandeurs ne sont pas dialectiquement construites.

3.2. La prise d'information sur les besoins des élèves

a) On rappellera qu'en classe de Sixième la fraction $\frac{a}{b}$ est le nombre qui multiplié par b donne a (avec b non nul). Le premier chapitre du cours concerne la *comparaison des fractions*. L'exposition choisie impose de « présenter » l'objet fraction. Cette entreprise est réalisée au moyen d'un tout premier exercice qui consiste en une modélisation qui conduit à relier les côtés d'un rectangle et son aire.

> Exercice : L'aire d'un pré rectangulaire est égale à 1875 m2. Sachant que la largeur de ce pré fait 25 m, calculer sa longueur (on pourra l'appeler x). Donne sa valeur exacte.

La recherche du côté manquant, désigné par x (dont l'unité n'est pas précisée), conduit à poser une équation, puis une autre égalité qui incorpore cette fois les unités (x en mètres) et enfin une troisième ligne où x apparait comme le résultat d'une division $x = 1875 \div 25$, ce qui fournit une longueur égale à 75 m.

Un autre calcul, répondant à une question d'un type similaire, donne $x = 200 \div 30$ puis $x = \dfrac{200}{30}$. Dans cette phase introductive, la réalisation didactique observée néglige dans les faits (ici dans les traces écrites) les connaissances des élèves. En tout cas le montage didactique ne les interroge pas. La transition didactique avec le rapport ancien des élèves aux fractions n'est pas l'objet d'un travail spécifique permettant d'activer cette notion abordée dans la classe précédente.

La question qui est ici posée est celle de la reprise de l'étude d'un thème ou encore la question des transitions didactiques : comment, par quels gestes et dans quels dispositifs, assurer une reprise de l'étude d'un thème qui fasse droit et qui prenne en compte les connaissances, réelles ou supposées, des élèves ? Il existe un dispositif qu'on appelle *test d'entrée* dans l'étude d'un thème, qui s'intègre facilement dans l'environnement ordinaire d'une classe. Il consiste en une courte interrogation portant sur les savoirs exigibles à l'issue de la classe précédente, et plus précisément sur les types de tâches associés. Ce dispositif est destiné à redéfinir un espace à l'élève dans le cadre de l'activité de la classe. Il contribue en outre, psychologiquement, à le mettre en confiance. Un second ordre de bénéfices concerne le directeur d'étude. Cela lui permet de repérer plus précisément les difficultés, lacunes, erreurs qui ne manqueront pas de freiner tôt ou tard l'avancée du temps didactique. Et d'y remédier éventuellement au moyen d'un matériel approprié et sous des formes diverses permettant d'éviter l'épreuve douloureuse des révisions systématiques.

b) Cette absence effective conduit P à un agencement de l'étude de facture classique. Le chapitre commence par un premier titre I. Comparaison de fractions : 1° Les fractions ; 2° Egalités de fractions ; 3° Simplification ; 4° Comparaison de fractions, etc... L'exposé linéaire est déroulé au gré des titres, sans articulation nette entre ceux-ci et surtout sans l'énonciation claire des questions mathématiques qui justifieraient ce qui est introduit. A quel besoin mathématique répond la tâche de comparaison des fractions ? On ne peut en dire grand chose.

c) Certes, les traces écrites, organisées sous la conduite du directeur d'étude, ne font pas ressortir l'enveloppement oral et gestuel qui accompagne la prise de notes. On peut toutefois, et de manière raisonnable, faire l'hypothèse que les élèves reproduisent sur leur cahier ce qui est inscrit au tableau. Si ces traces tendent à participer à la fonction de mémorisation de l'activité collective (c'est une routine dont l'enjeu peut être débattu avec les élèves), on ne peut éviter de s'interroger sur l'efficacité de ces notes dans la poursuite de l'étude, charge qui revient à l'élève dans son activité privée : comment peut-il s'emparer du matériel qui lui est ainsi fourni sur le thème ? Les éléments objectifs de la réponse doivent se trouver dans le document final. Mais sous quelles espèces ?

d) Les types de problèmes dégagés au titre de l'analyse de l'organisation mathématique n'apparaissent pas toujours explicitement dans les traces écrites. Cependant, les techniques ébauchées ou en voie d'élaboration incorporent des savoirs et des savoir-faire qui les justifient et/ou les produisent. Les élèves sont conduits à identifier ces techniques et à s'en rendre maîtres, tout au moins dans un cadre mathématique contrôlé et adapté à la situation d'apprentissage. Les exercices permettent d'identifier les techniques mises en oeuvre, on l'a vu. Mais ces techniques doivent-elles faire l'objet d'une institutionnalisation, c'est-à-dire d'un exposé qui montre l'usage qui en est fait sur un specimen simple du type de problème concerné ? Une réponse en actes est repérable pour la tache T_3, par exemple : la propriété énoncée dans le cours suggère fortement la technique elle-même.

> Propriété : Les fractions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs.

De manière générale, il n'y a guère de dispositifs particuliers permettant une prise d'information sur le rapport des élèves aux objets étudiés dans l'environnement créé. Et même lorsque le dispositif existe, par exemple avec le devoir à la maison sur le Tangram, les nouveaux enjeux de savoirs apparaissent assez éloignés de la tâche à réaliser. La production sollicitée met en jeu des capacités dont le lien avec les tâches et techniques étudiées est peu lisible. En outre, la fréquence de ces devoirs à la maison est faible : un seul sur toute la période d'étude. Comme on l'a signalé, le statut même de ce dispositif semble incertain au travers des documents examinés.

3.3. La problématisation

Le texte qui reste entre les mains de l'élève fournit aussi des informations sur la dynamique cognitive qui a permis la constitution des synthèses successives regroupées dans la section *Cours*. Certes, les évènements qui constituent l'histoire intellectuelle de la classe sont gommés de la prise de notes : le processus didactique laisse la place au produit de l'activité.

Toutefois, l'absence de traces écrites des questions dévolues à la classe, ainsi que des éléments de relance pour la communauté d'étude, n'est-il pas sans conséquences sur les futures réorganisations de savoirs que l'élève est appelé à réaliser ? C'est un véritable problème didactique si on fait l'hypothèse que la trame de l'histoire collective qui s'est nouée et dénouée dans la classe sous forme de questions, de tentatives, de succès et/ou d'échecs peuvent favoriser l'efficacité du travail personnel ?

Cela dit, comment débute l'étude ? On se contentera d'examiner uniquement la tâche T_3. C'est, semble-t-il, l'évocation de la notion de grandeur (ici les surfaces) qui fournit un sens naïf à la comparaison des fractions. L'intention didactique pourrait s'inspirer du principe suivant : deux quadrillages identiques comportant un nombre différent de cases noircies sont « comparés ». Le système invoqué, concrètement soumis à l'observation de l'élève par l'intermédiaire du manuel de la classe, se présente brutalement comme un ensemble de deux fractions. Le quadrillage qui possède le plus de cases noircies correspond à une fraction supérieure à l'autre. Cette approche fournit certes un sens à la comparaison, bien que les fractions invoquées représentent des proportions, non désignées comme telles par manque de prise en charge technologique.

On notera toutefois que la problématisation de la comparaison n'est pas vraiment abordée. Pourtant, les problèmes associés au thème des fractions en classe de sixième fournissent de la matière sur ce point. Par exemple, prendre les trois cinquièmes d'une somme de 1000F revient à prendre la moitié de 1200F. A la lumière de cet exemple, la problématisation de la comparaison des fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$ est posé. Peut-on alors comparer les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$, et comment ? Cela dit, on peut aussi constater que le montage didactique sollicite deux définitions des fractions, l'une comme quotient (définition utilisée effectivement dans la classe précédente), l'autre comme proportion, sur laquelle se greffe la rencontre avec la question de la comparaison des fractions. Les conséquences de cette coexistence de nature théorique pourraient être analysées en termes d'effet sur la construction mathématique en cours.

3.4. Comment se matérialisent les moments de l'étude ?

En ciblant toujours nos observations sur la tâche T_3 examinons maintenant les différents moments de l'étude de celle-ci :

a) La <u>première rencontre</u> avec la tâche T_3 est notifiée dans le cours au quatrième point du premier chapitre par le truchement du manuel (Activité 2, page 24) dont l'énoncé n'est pas reproduit, mais qui sollicite l'élève à partir de six grilles. Six fractions (des proportions en fait) sont ainsi produites puis comparées au moyen d'un montage simple et suggestif. La première rencontre est ainsi organisée autour d'une tentative de problématisation de la comparaison des fractions.

b) Dès la première rencontre, une technique de comparaison est mise en place, même si elle est restée largement implicite. Cette technique est encore largement embryonnaire par rapport à la question générale de la comparaison de deux fractions quelconques. <u>L'exploration de la tâche T_3</u> se poursuit au moyen de deux disques d'aire égales (sans que cette qualité soit formellement signalée) partagés en huit parties égales, à la manière d'un camembert. On en déduit que 3/8 < 6/8 ; le signe « < »est utilisé comme tel entre les disques. L'émergence de la technique est

« réalisée » par la comparaison visuelle des objets graphiques mis en regard l'un de l'autre dont l'élément pertinent retenu est l'importance de la surface hachurée. Le rangement de fractions nécessitant parfois leur transformation en fractions de même dénominateur, un specimen de rangement est fourni dans le *Cours* , sous la rubrique *Utilisation de la simplification.* Voici cet exercice

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$

La technique n'est pas explicitée, mais est montrée de la manière suivante :

On simplifie les fractions : $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$; $\frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$; $\frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$.

On les range : $\frac{3}{8} < \frac{10}{8} < \frac{14}{8}$.

$\frac{9}{24} < \frac{25}{20} < \frac{14}{8}$.

Bien que l'intention ne soit pas notée, on trouve à la suite l'énoncé des critères de divisibilité par 2, par 3, par 5 et par 9. Mais aucun exemple ne vient montrer l'usage qui peut être fait de ces critères, ni dans le cours, ni dans aucun des exercices.

c) Le travail de la technique est amorcé dans le cours. Dès la première rencontre avec la technique ι_3 , la fraction $\frac{6}{8}$ qui est de manière « évidente »plus grande que la fraction $\frac{3}{8}$, fournit une autre inégalité qui contient - mais cela n'est pas explicité ici - une amélioration du champ d'application de la technique, de la manière suivante $\frac{3}{8} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. Suit immédiatement une version classique de la tâche T_3 :

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$.

Cette situation est proposée dix fois dans les exercices de deux manières différentes : soit sur des séries de six à sept fractions ayant des dénominateurs communs (ceux-ci étant respectivement 36, 24, 60, 48) ; soit sur des séries de quatre ou cinq fractions ayant deux, trois, quatre ou cinq dénominateurs différents, mais qui présentent entre eux une relation de proportionnalité simple. Le plus souvent le plus grand dénominateur est le dénominateur commun cherché. Dans deux cas ce dénominateur commun est le produit des dénominateurs (17×21 dans un cas et $5\times4\times3$ dans l'autre). La technique installée précédemment s'enrichit alors d'une propriété des fractions rappelée antérieurement, et faisant l'objet du titre de ce paragraphe : *Utilisation de la simplification.*

d) La mise en place par P de certains éléments technologico-théoriques se réalise d'abord par l'énoncé d'une propriété. La seule tentative de justification de cette propriété semble être de type expérimental, et elle apparaît dans l'activité décrite plus haut. L'exigence justificative de P se poursuit lors du deuxième exemple dans lequel la comparaison des fractions 21/13 et 357/13 est accompagnée de la phrase " *Comme les deux fractions ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur. 21 est plus petit 357. Donc 21/13 est plus petit que 357/13* ". Cette phrase participe tout autant de l'institutionnalisation de la technique que de sa justification. L'élève K, en bon élève et de manière assez remarquable, fait droit à cette exigence dans tous les exercices de comparaison.

e) Le moment de l'évaluation du type de tâche T_3 se réalise notamment dans d'un exercice (parmi cinq) du contrôle en classe. La technique de comparaison est sollicitée ainsi :

Ranger par ordre croissant, après avoir cité la règle utilisée : $\frac{3}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{10}{70}$.

L'élève dont on peut examiner le devoir a répondu ceci : *Pour pouvoir classer les fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur*. Cette réponse est jugée insuffisante par P qui commente sur la copie : *Comment les classes-tu ensuite ?* La réponse complète attendue est notée par l'élève, sur la copie même, à l'issue de la correction du devoir en classe : *Et lorsqu'elles ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur.* L'effectuation du rangement provoque d'abord une simplification par 10 de la dernière fraction, puis un classement gouverné par le dénominateur commun 7, puis un dernier classement où $\frac{10}{70}$ vient remplacer la fraction $\frac{1}{7}$.

f) Le document qui constitue le cours fait une large part à la tâche T_3 , qui y est exposée de manière simple et opératoire. La présentation de cette tâche est accompagnée d'une technique de traitement déployée en quelques spécimens suggestifs. Ce travail d'institutionnalisation est soutenu par d'autres spécimens présentés en exercices, en nombre suffisant pour permettre la mise en place d'un rapport solide à la tâche, même si celle-ci n'est pas présentée sous toutes les facettes possibles en classe de quatrième (par exemple la comparaison de fractions de même numérateur). Le contrôle en classe fournit enfin l'occasion de tester la technique tout en participant du moment de l'institutionnalisation. Par exemple, il n'en est pas de même de la sous-tâche « comparaison d'une fraction à 1 » qui, à cet égard, est restée très marginale.

Un travail semblable peut être accompli à propos de l'organisation didactique mise en oeuvre à propos de la tâche T_6 :

Etant donné une fraction $\frac{a}{b}$, déterminer les entiers n, p et q tels que $\frac{a}{b} = n + \frac{p}{q}$, avec $p < q$.

a) Un « problème » est proposé aux élèves pour aborder ce type de tâches.

Problème : Quatre enfants se partagent vingt-cinq gâteaux. Quel est la part de chacun ?

On observe ici de nouveau le souci d'ancrer la tâche mathématique à étudier dans la catégorie de la résolution de problèmes « concrets », souci qui répond à une demande explicite et insistante des textes officiels. Par ailleurs, la tâche que cet énoncé désigne apparaît comme un alibi en ce sens où, elle se présente comme routinière pour des élèves à ce niveau (un élève de la classe de Sixième serait sans doute capable de fournir la réponse 6,25 après avoir effectué la division de 25 par 4), mais c'est l'interprétation et l'écriture de la réponse qui va nécessiter en fait la mise en oeuvre de la tâche visée. P organise donc cette première rencontre en imposant une exigence nouvelle sur la forme même de la réponse. En effet, la réponse commence par « *la part de chacun sera de 25/4 des gâteaux* » qui pourrait suffire (dans une autre *institution*, la classe de Sixième par exemple) à la résolution du problème posé. P poursuit, à partir de cette première réponse :

$$\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6\times 4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}.$$

Chaque enfant aura 6 gâteaux entiers plus un quart de gâteau.

La première rencontre a ainsi eu lieu avec T_6, par le truchement d'un exemple.

b) A cette occasion, une technique émerge, bien qu'elle reste encore implicite. Elle le restera en dépit d'une description sommaire « *6 : partie entière* » ; « 1 / 4 *: fraction plus petite que 1* », à laquelle est adjointe la mention « On pose la division » (suivie de l'effectuation de cette division qui est arrêtée à la virgule, sans mention particulière). Un commentaire au statut incertain ajoute : " Avec la machine : $25 \div 4 = 6{,}25$

c) Le travail de cette technique embryonnaire est néanmoins repérable dans deux exercices (n°79, n°80) dans lesquels huit fractions doivent être écrites sous la forme $a + \frac{b}{c}$ où $\frac{b}{c}$ est « *la partie fractionnaire (fraction inférieure à 1)* ». Une seule fraction donnée est déjà inférieure à 1. Dans chacun des cas traités, la décomposition est réalisée à la manière de l'exemple princeps décrit lors de la première rencontre. Chaque étape nouvelle dans la succession des écritures menant au résultat final semble relever, au niveau des décisions prises, de la division euclidienne de a par b. Aucun indice ne permet toutefois d'en avoir la certitude absolue. L'usage de cette technique met en valeur, à chaque traitement, la partie entière de la fraction initiale. Aucun commentaire n'est fait sur la partie fractionnaire.
Les deux derniers exercices du cahier d'exercices (n°81, n°82) fournisssent l'occasion de retrouver une fraction donnée sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Ici encore huit exemplaires sont à traiter. La technique n'est pas tout-à-fait la même, puisqu'il s'agit de transformer un entier sous forme de fraction dont le dénominateur est donné dans la partie fractionnaire. Le traitement juxtaposé des exercices n°79, 80, 81 et 82 semble toutefois indiquer deux démarches permettant de passer d'un écriture à l'autre et inversement.

d) La technique ι_6 ne reçoit pas véritablement de validation technologique, si on écarte un commentaire fait sur le cahier de cours:

> *A retenir :*
> *On peut toujours décomposer une fraction plus grande que 1 en la somme d'un nombre entier et d'une fraction plus petite que 1.*

La grande concision des notations écrites dans le cahier de l'élève K - lequel ne fournit sans doute qu'un tableau très partiel des situations vécues dans la classe - ne fournit pas d'information sur le travail effectué en matière de justification. Le domaine mathématique où on se situe est probablement envahi par la familiarité culturelle, familiarité qui tend à remplacer des constructions explicites

e) Le type de tâche T_6 n'est pas l'objet d'évaluation . Son institutionnalisation est bien repérée non seulement dans le cahier de cours, mais aussi dans le cahier d'exercices. Ce qui semble devoir être retenu par l'élève constitue un savoir-faire, qui n'a pas une importance majeure (savoir-faire qui n'apparaît pas dans le contrôle en classe) et dont la portée demeure incertaine.

4. Evaluation de l'organisation mathématique observée

Il s'agit, dans ce chapitre, de proposer quelques éléments permettant de porter un jugement sur ce que vaut une organisation mathématique donnée. La tâche est éminemment complexe et le travail effectué avec les stagiaires de l'Université d'été a mis en évidence cette difficulté, dès lors que l'on s'impose un effort de justification de ses jugements.

4.1. Les types de tâches

Les types de tâches rencontrés dans ce corpus sont en général *bien identifiés*. Seul, peut-être, le type de tâches T_7 reste-t-il un peu flou, car insuffisamment travaillé. Cela peut s'expliquer par le fait que la question de l'emploi des écritures fractionnaires demeure très lié à la classe de Sixième.

Si le type de tâche T_6 a été bien identifié, il semble en revanche être resté relativement marginal et la question de savoir pourquoi on s'intéresse à l'écriture d'une fraction sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à l'unité est restée très confidentielle si même elle est apparue dans la classe.

D'une manière générale, si les types de tâches proposés sont a priori *pertinents*, la nécessité d'apprendre à calculer avec des écritures fractionnaires n'a jamais été mise en perspective avec les connaissances des élèves. Pourquoi, en effet, mobiliser un savoir-faire particulier pour ajouter $\frac{11}{20}$, $\frac{3}{20}$ et $\frac{6}{20}$ alors que l'on sait que $\frac{11}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{55}{100} + \frac{15}{100} + \frac{30}{100} = 0{,}55 + 0{,}15 + 0{,}3 = 1$? Cette nécessité doit apparaître en mettant en oeuvre des nombres qui n'ont pas d'écriture décimale. Et, corrélativement, la technique utilisée pour ces nombres se verra justifiée de manière irréfutable (en justifiant au passage des techniques opératoires anciennes) dans le cas où on sait déjà calculer, c'est -à-dire dans le cas des nombres décimaux.

Enfin, et cela a été déjà été signalé ci-dessus, l'organisation mathématique mise en place s'est pratiquement restreinte aux fractions d'entiers. Ce choix, en désaccord avec les textes officiels qui étendent les écritures fractionnaires aux quotients de décimaux, peut certainement s'expliquer par l'énorme prégnance du chapitre « Fractions » tel qu'il a existé dans les curriculums précédents. Mais cette restriction de fait va empêcher que vivent des techniques alternatives : soit à comparer, par exemple $\frac{15}{20}$ et $\frac{8}{10}$; on a $\frac{15}{20} = \frac{7{,}5}{10} < \frac{8}{10}$.

4.2. Les techniques

On a constaté à plusieurs reprises que, si les types de tâches ont été souvent abondamment travaillés, les techniques n'ont pas toujours été nettement institutionnalisés. C'est en particulier le cas pour le type de tâches T_6 pour lequel on a signalé ci-dessus le grand flou laissé par les traces écrites de l'élève K sur cette question : comment décompose-t-on le numérateur ? comment sait-on que la décomposition est bien la bonne ? Etc.

En revanche, en ce qui concerne les techniques relatives aux tâches plus classiques (somme, différence, produit) on a constaté des efforts de mise en mots. Par exemple, à propos de la somme on peut lire dans le cahier de cours : « On additionne les numérateurs et on conserve le dénominateur ». De plus, les exigences de P semblent porter sur une rédaction de la technique qui la rende auto-justificative. Ainsi, pas une seule fois l'élève K n'écrit directement le résultat de la somme de deux fractions et passe toujours par l'étape montrant qu'il effectue la somme des numérateurs et si les dénominateurs sont différents, mention est faite de cette situation.

Pour le type de tâches T_3, le travail de la technique est resté un peu court. En effet, P s'en est tenu à la comparaison de fractions ayant le même dénominateur conformément au programme. Mais les inégalités auraient pu être rencontrées d'un point de vue dynamique : quand on augmente le numérateur, on augmente la fraction. On sait que ce type de techniques a de l'avenir mathématique. De même la comparaison de fractions de même numérateur n'a pas été évoquée, non plus que son corollaire : quand on diminue le dénominateur, on augmente la fraction.

4.3. Les technologies

C'est sans doute dans cette partie que les insuffisances apparaissent les plus importantes. D'une manière générale, le problème de la justification d'un énoncé n'est pas vraiment posé. Les « activités » qui introduisent les énoncés ne jouent pas de ce point de vue le rôle de preuve expérimentale que l'on s'attendrait à leur voir jouer, même si leur présence laisse tout de même à penser que P n'ose pas « asséner » ces énoncés ni les considérer comme bien connus (« folkloriques »). C'est seulement dans le cas de la multiplication que l'activité joue vraiment son rôle exprimental. En effet, on y considère un rectangle de dimensions $\frac{2}{3}$ de mètre et $\frac{4}{5}$ de mètre. On complète alors ce rectangle afin d'obtenir un carré de 1 m de côté. En partageant l'un des côtés en trois parties égales et l'autre en cinq parties égales, le carré se trouve découpé en $3 \times 5 = 15$ rectangles de mêmes dimensions, donc de même aire. Ainsi, l'aire d'un de ces rectangles est-elle $\frac{1}{15}$ m^2. Constatant alors que le rectangle initial est composé de huit de ces rectangles, on en déduit que son aire est $\frac{8}{15}$ m^2. Par conséquent, si l'on veut que l'aire d'un rectangle soit toujours donnée par le produit de ses dimensions, on en déduit que $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ ne peut pas être égal à autre chose qu'à $\frac{8}{15}$.

En revanche, aussi bien dans le cas de la comparaison que dans celui de la somme, les activités choisies ne jouent pas aussi bien ce rôle expérimental. On peut d'ailleurs s'interroger sur leur rôle exact dans la rencontre avec un type de problèmes.

Ainsi, de manière générale, les tentatives de justification des propriétés énoncées apparaissent un peu évanescentes. De même, la dimension démonstrative de l'activité mathématique n'a pas toute la place méritée, bien que des possibilités existent. On donnera ici un seul exemple. Dans la question de la comparaison à 1, il figure dans le cours l'équivalence $a/b < 1 \Leftrightarrow a < b$. Une démonstration de cette propriété peut être donnée en exploitant le travail effectué à propos de la simplification des fractions et de la comparaison des fractions de même dénominateur en observant (sur des exemples numériques) que $1 = b/b$ et que, par suite, $a/b < 1 \Leftrightarrow a/b < b/b \Leftrightarrow a < b$.

ANNEXE

Traces écrites de l'activité d'une classe

La séquence didactique dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les "archives" d'un élève d'une classe de cinquième – l'élève K – a occupé environ 17 heures, entre le jeudi 28 novembre 1996 et le jeudi 16 janvier 1997. Cette séquence constitue le tout de l'étude du thème des écritures fractionnaires, lequel a ainsi été traité d'un tenant, selon un choix dont, *a posteriori*, le professeur de la classe doute qu'il soit judicieux. La chronique de l'étude, telle qu'il l'a établie, est reproduite ci-dessous.

Date	*Durée*	*Contenu*
28 novembre	1 heure	I. Comparaison de fractions 1) Les fractions. Définitions : fraction, numérateur, dénominateur Exercices d'application directe en classe 2) Égalité de fractions. Propriétés : $b \neq 0$, $k \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
2 décembre	1 heure	Correction des exercices 3) Simplification. La méthode de simplification. Définition : fraction irréductible Exercices d'application directe en classe et à la maison.
5 décembre	2 heures	Correction des exercices 4) Comparaison de fractions. Critère de comparaison. Rangement de fractions Exercices d'application directe en classe et à la maison.
9 décembre	1 heure	Correction des exercices 5) Utilisation de la simplification. Critères de divisibilité Exercices d'application directe en classe et à la maison.
12 décembre	1 heure	Correction des exercices 6) Comparaison à 1 Exercices d'application directe en classe et à la maison.
16 décembre	2 heures	Correction des exercices Exercice sur les limites de la calculatrice II. Opérations sur les fractions 1) L'addition. Propriété fondamentale : $\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}$; $\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
19 décembre	1 heure	Correction des exercices 2) La multiplication de fractions. Propriété fond. : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ Exercices d'application directe en classe et à la maison.
20 décembre	1 heure	Correction des exercices Exercices supplémentaires
6 janvier	1 heure	Exercices de rappel pour redémarrer
9 janvier	2 heures	Correction des exercices Exercices de traduction de phrases 3) Fraction et partie entière. Règle Exercices d'application directe en classe et à la maison.
10 janvier	2 heures	Séance d'exercices Réponses aux questions d'ordre général Mise au point
13 janvier	1 heure	Contrôle
16 janvier	1 heure	Correction du contrôle

On trouvera plus loin les énoncés de la plupart des exercices faits en classe, tel que le professeur les a reconstitués, ainsi que les énoncés des devoirs à la maison et en classe.

ELEVE K : COURS

NDLR : Le lecteur pourra constater que certaines annexes ne sont pas très lisibles et nous le prions de bien vouloir nous le pardonner. Cela tient au recueil de données qui sont des photocopies de matériau brut, lesquelles, on le comprendra, n'étaient pas a priori faites pour la diffusion.

8/11

CHAPITRE 3

Les nombres en écriture fractionnaire

I Comparaison de fractions.

1) Les fractions.

Exercice : L'aire d'un près rectangulaire est égale à 1875 m² _ Sachant que la largeur de ce près fait 25 mètres, calculer sa longueur (on pourra l'appeler x) Donne sa valeur exacte.

Equation : $25 \times x = 1875$

[illegible] $\div$ [illegible] m²

$x =$ [illegible] 75 $\div$ 25 m

Donc la longueur fait 75 mètres.

Reprendre le calcul précédent avec une aire de 200 m² et une large de 30 mètres
Donner la longueur.

Equation : $30 \times x = 200$

$$x = 200 \div 30$$

$$x = \frac{200}{30}$$

Définition : Une fraction est le quotient d'un nombre entier par un nombre entier.

Exemples : ① $\frac{2}{3}$ est une fraction (2 et 3 sont des entiers)

② $\frac{2,3}{4,5}$ est un quotient ou bien une écriture fractionnaire.

Remarque : une fraction peut-être égale à un nombre entier, nombre décimal, ou bien il n'est ni l'un ni l'autre.

Exemples : ① $\frac{1}{2}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal (0,5)

② $\frac{1}{4}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre décimal (0,25)

③ $\frac{4}{2}$ est une fraction (2)

④ $\frac{9}{3}$ est une fraction (3)

⑤ $\frac{31}{6}$ est l'écriture fractionnaire ni d'un nombre entier ni d'un nombre décimal (= 5,166)

A retenir : Portrait d'une fraction

$\frac{a}{b}$ — a : numérateur ; b : dénominateur

2) Egalité de fractions.

Calculer, à l'aide de la calculatrice,

$\frac{3}{5} = 0,6$ $\qquad\qquad$ $\frac{21}{35} = 0,6$

même chose avec

$\frac{11}{8} = 1,375$ $\qquad\qquad$ $\frac{22}{16} = 1,375.$

Propriété :

Si $\frac{a}{b}$ est une fraction ($b \neq 0$), et si k est un nombre non nul

alors :

$$\boxed{\frac{k \times a}{k \times b} = \frac{a}{b}}$$

3) Simplification

La règle précédente permet de "fabriquer" différentes écritures fractionnaires d'un même nombre.

$$\frac{1,8}{4,2} \xrightarrow{\times 10} \frac{18}{42} \xleftarrow{\times 6} \frac{3}{7} \xrightarrow{\times 5} \frac{15}{35} \xrightarrow{\times 3} \frac{45}{105} \xleftarrow{\times 10} \frac{4,5}{10,5} \xrightarrow{\times 2} \frac{9}{21}$$

$$\frac{1,8}{4,2} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7} = \frac{15}{35} = \frac{45}{105} = \frac{4,5}{10,5} = \frac{9}{21} = \text{etc}$$

Attention !
La 1ère et la 6ème expressions sont des écritures fractionnaires.

Remarque : de toutes ces expressions, $\frac{3}{7}$ est la "plus simple"

Définition : La forme la plus simple sous laquelle on peut écrire une fraction s'appelle la forme irréductible de cette fraction

4) Comparaison de fractions

Activité 2 page 24

Grille A : $\frac{19}{36}$ 19 cases noires
36 cases en tout.

Grille B : $\frac{20}{36}$ 20 cases noires
36 cases en tout.

Grille C : $\frac{16}{36}$ 16 cases noires
36 cases en tout.

Grille D : $\frac{18}{36}$ 18 cases noires
36 cases en tout.

Grille E : $\frac{15}{36}$ 15 cases noires
36 cases en tout.

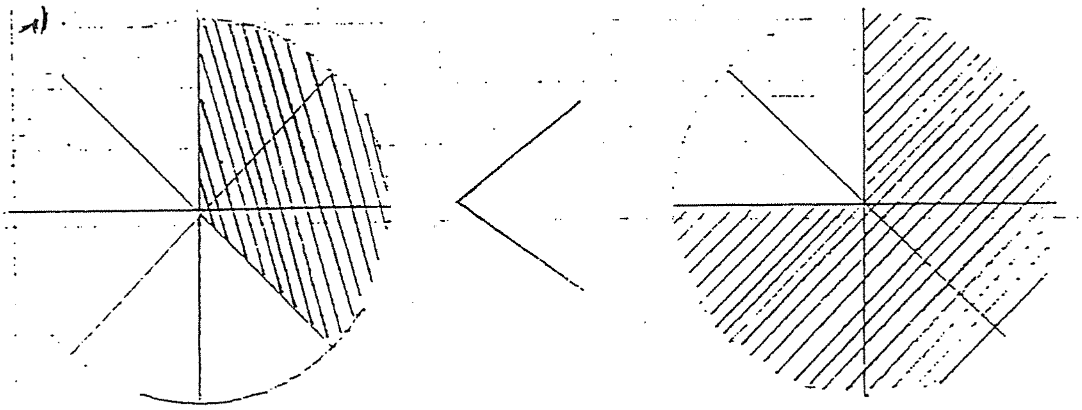
Grille F : $\frac{21}{36}$ 21 cases noires
36 cases en tout.

6) $\frac{15}{36} < \frac{16}{36} < \frac{18}{36} < \frac{19}{36} < \frac{20}{36} < \frac{21}{36}$

Propriété : Les fonctions se rangent, si les dénominateurs sont égaux, dans l'ordre des numérateurs

…mples :

1)



$\frac{3}{8} < \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

2) $\frac{21}{13} < \frac{357}{13}$ Comme les deux fractions ont le même dénominateur, on les classe dans l'ordre de leur numérateur.

21 est plus petit 357
donc $\frac{21}{13}$ est plus petit que $\frac{357}{13}$

9/12.

5) Utilisation de la simplification

Ranger de la plus petite à la plus grande les fractions suivantes : $\frac{9}{24}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{14}{8}$

On simplifie les fractions.

$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$ $\frac{25}{20} = \frac{5}{4} = \frac{10}{8}$ $\frac{14}{8} = \frac{7}{4} = \frac{14}{8}$

On les range

$\frac{3}{8} < \frac{10}{8} < \frac{14}{8}$

$\frac{9}{24} < \frac{25}{20} < \frac{14}{8}$

A retenir : (critères de divisibilité)

- un nombre entier est divisible par 2 lorsqu'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8)

- un nombre entier est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est un multiple de 3

- un nombre entier est divisible par 5 lorsqu'il se termine par 0 ou 5.

- un nombre entier est divisible par 9 lorsque la somme des chiffres est un multiple de 9

12/12

6) Comparaison à 1 :

Comparer $\frac{3}{5}$; 1 et $\frac{5}{3}$

$\frac{3}{5} < 1 < \frac{5}{3}$

Comparer $\frac{12}{7}$; $\frac{14}{25}$ et 1.

$\frac{14}{25} < 1 < \frac{12}{7}$

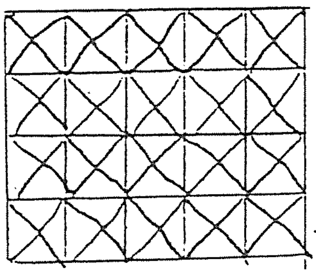
Propriété : Lorsque le numérateur d'une écriture fractionnaire est plus grand que le dénominateur, le nombre que représente cette écriture est plus grand que 1.

Lorsque le numérateur est plus petit que le dénominateur, ce nombre est plus petit que 1

II) Opérations sur les fractions.

1) L'addition de fractions

ercice : Résoudre les deux problème A et B en s'aidant éventuellem. du quadrillage.



× les parents d'élèves
× le collège
× le foyer

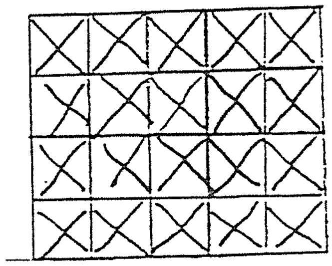
Pb me A, $\frac{11}{20} + \frac{3}{20} + \frac{6}{20} = \frac{20}{20}$

Pour acheter un nouveau magnétoscope, le collège accepte de payer les $\frac{11}{20}$ du prix, les parents d'élèves les $\frac{3}{20}$ et le foyer offre le double des parents d'élèves.

Cela suffit-il ?

On aura assez d'argent pour l'acheter.

Problème B : Pour acheter une photocopieuse, le collège accepte de payer $\frac{3}{4}$ du prix, les parents d'élèves $\frac{1}{20}$ du prix, et le foyer participe pour 20%.
Cela suffit-il ?



x le collège
x les parents d'élèves
x le foyer

$$\frac{3}{4} \overset{\times 5}{=} \frac{15}{20} \qquad \frac{1}{20} \qquad \frac{20}{100} \overset{\div 5}{=} \frac{4}{20}$$

$$\frac{15}{20} + \frac{1}{20} + \frac{4}{20} = \frac{20}{20}$$ ça suffit.

<u>Propriété fondamentale</u> :

Pour calculer une somme (ou une différence) de fractions d'écritures fractionnaires, on doit avoir <u>les mêmes dénomina-</u>

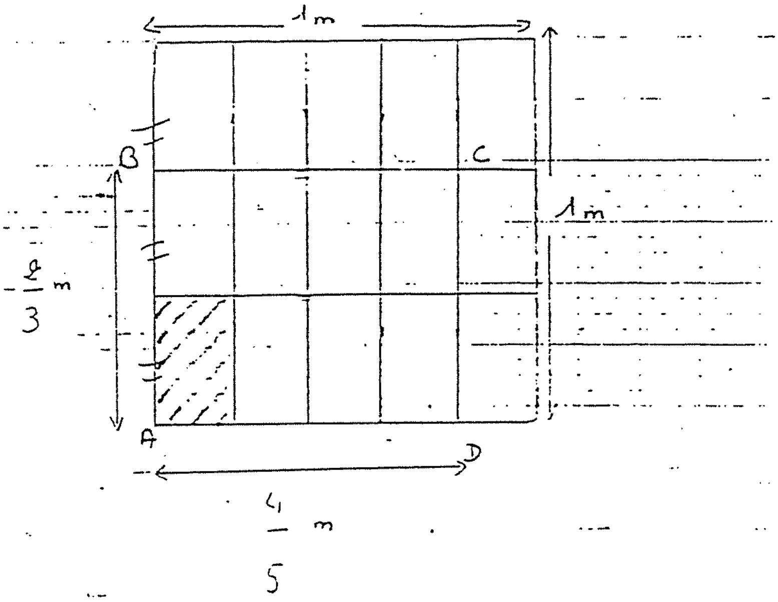
$$\boxed{\frac{a}{d} + \frac{b}{d} = \frac{a+b}{d}} \qquad \boxed{\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}}$$

- On additionne (ou on soustrait) les numérateurs.
- On conserve le dénominateur

2) La multiplication de fractions :

Activité 8 p 40

a)



L'aire de ABCD est $AB \times BC = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ m²

D'autre part, l'aire du petit rectangle hachuré est $\frac{1}{20}$ m²

L'aire de ABCD est égale à 8 fois celle du rectangle hachuré, soit $\frac{8}{15}$ m². Donc $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

Propriété fondamentale :

Pour calculer un produit de fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

b) L'aire de ABCD est $AB \times BC = \frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\ m^2$

l'aire du rectangle hachuré $= \frac{1}{20}\ m^2$

L'aire de ABCD est égale à 6 fois celle du rectangle hachuré, soit $\frac{6}{20}\ m^2$. Donc $\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$

c) Exemples:

$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$; $\frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{9 \times 5} = \frac{12}{45}$.

$\frac{7}{3} \times \frac{3}{7} = \frac{7}{7} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{4}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{4}{5}$

3) Fraction et partie entière.

Problème : Quatre enfants se partagent vingt-cinq gâteaux. Quelle est la part de chacun ?

Réponse : la part de chacun sera de $\frac{25}{4}$ des gâteaux

$\frac{25}{4} = \frac{24+1}{4} = \frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6 \times 4}{4} + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$

Chaque enfant aura 6 gâteaux entiers plus un quart de gâteau.

$$\frac{25}{4} = 6 + \frac{1}{4}$$

partie entière

Fraction plus petite que 1

On pose la division

$$\begin{array}{r|l} 25 & 4 \\ \hline 1 & 6 \end{array}$$

Avec la machine :
25 : 4 = 6,25

A retenir : On peut toujours décomposer une fraction plus grande que 1 en la somme d'un nombre entier et d'une fraction plus petite que 1.

ELEVE K : EXERCICES

Énoncés des exercices pris dans le manuel de la classe

page 30

n° 5. Simplifier les fractions :

$a)\ \frac{4}{6};\frac{16}{14};\frac{3}{9};\frac{10}{12};\frac{2}{4};\frac{3}{6};\frac{12}{8}.$

$b)\ \frac{16}{18};\frac{12}{9};\frac{6}{12};\frac{15}{6};\frac{14}{21};\frac{9}{6};\frac{25}{15}.$

n° 6. Simplifier les fractions :

$a)\ \frac{15}{20};\frac{9}{12};\frac{6}{8};\frac{33}{44};\frac{30}{40};\frac{5}{10}.$

$b)\ \frac{2500}{300};\frac{70}{200};\frac{50000}{9000}.$

n° 7. Simplifier les fractions :

$a)\ \frac{6}{18};\frac{24}{30};\frac{12}{6};\frac{42}{36};\frac{240}{300}.$

$b)\ \frac{4}{1480};\frac{27}{24};\frac{12}{15};\frac{14}{16};\frac{8}{18}.$

n° 11. *Marions-les.* Trouver les paires de fractions égales : $\frac{9}{39};\frac{12}{9};\frac{3}{13};\frac{35}{10};\frac{12}{17};\frac{4}{3};\frac{35}{27};\frac{77}{56};\frac{60}{85};\frac{3{,}5}{2{,}7};\frac{11}{8};\frac{7}{2}.$

n° 12. *Chasse l'intrus !* Dans chaque ligne chasser la fraction qui n'est pas égale aux autres :

$a)\ \frac{50}{40};\frac{60}{48};\frac{10}{8};\frac{6}{4};\frac{15}{12};\frac{25}{20};\frac{5}{4}.$

$b)\ \frac{5}{30};\frac{1}{6};\frac{4}{24};\frac{10}{60};\frac{2}{12};\frac{3}{18};\frac{5}{3}.$

$c)\ \frac{24}{36};\frac{6}{9};\frac{10}{15};\frac{14}{21};\frac{1{,}2}{1{,}8};\frac{3}{2};\frac{8}{12}.$

page 31

n° 13. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant :

$a)\ \frac{7}{36};\frac{24}{36};\frac{13}{36};\frac{1}{36};\frac{43}{36};\frac{36}{36}.$

$b)\ \frac{15}{24};\frac{36}{24};\frac{2}{24};\frac{7}{24};\frac{72}{24};\frac{97}{24}.$

n° 14. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :

$a)\ \frac{71}{60};\frac{13}{60};\frac{21}{60};\frac{12}{60};\frac{60}{60};\frac{1}{60};\frac{8}{60}.$

$b)\ \frac{5}{48};\frac{11}{48};\frac{7}{48};\frac{13}{48};\frac{9}{48};\frac{27}{48}.$

n° 15. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant (trouver un dénominateur commun) :

$a)\ \frac{18}{16};\frac{15}{16};\frac{13}{16};\frac{5}{8};\frac{7}{8}.$

$b)\ \frac{3}{10};\frac{31}{100};\frac{297}{1000};\frac{3056}{10000}.$

n° 16. Ranger les fractions suivantes par ordre croissant (trouver un dénominateur commun) :

$a)\ \frac{13}{20};\frac{7}{10};\frac{9}{4};\frac{2}{5};\frac{1}{2}.$

$b)\ \frac{37}{100};\frac{17}{50};\frac{13}{25};\frac{7}{10};\frac{2}{5}.$

n° 17. Ranger les fractions suivantes par ordre décroissant :

$a)\ \frac{13}{21};\frac{152}{17};\frac{13}{17};\frac{5}{17}.$

$b)\ \frac{3}{5};\frac{1}{5};\frac{3}{4};\frac{5}{3};\frac{5}{4}.$

n° 19. *a)* Écrire les fractions inférieures ou égales à 1 qui ont pour dénominateur 7 (les dénominateurs étant des nombres entiers).

b) Ranger par ordre croissant les fractions obtenues en *a)*

n° 20. Ranger par ordre décroissant les fractions comprises entre 1 et 2 dont le dénominateur est entier.

page 43

n° 10. Calculer : $\frac{1}{5}+\frac{2}{5};\frac{2}{15}+\frac{4}{15};\frac{1}{2}+\frac{4}{2};\frac{13}{14}+\frac{9}{14};\frac{3}{4}+\frac{1}{4};\frac{3}{20}+\frac{5}{20}+\frac{9}{20}.$

n° 11. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{3}{6}+\frac{5}{6};\frac{21}{24}+\frac{8}{24};\frac{5}{10}+\frac{3}{10};\frac{3}{5}+\frac{2}{5};\frac{2}{7}+\frac{12}{7};\frac{1}{3}+\frac{3}{3}+\frac{5}{3}.$

n° 12. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{7}{12}-\frac{3}{12};\frac{17}{25}-\frac{12}{25};\frac{45}{76}-\frac{27}{76};\frac{7}{9}-\frac{5}{9};\frac{3}{4}-\frac{1}{4};\frac{4}{12}-\frac{4}{12}.$

n° 13. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{4}{7}-\frac{2}{7};\frac{7}{9}-\frac{5}{9};\frac{5}{12}-\frac{1}{12};\frac{7}{8}-\frac{3}{8};\frac{5}{6}-\frac{3}{6};\frac{7}{8}-\frac{4}{8}-\frac{2}{8}.$

n° 14. Calculer (on donnera un résultat simplifié) :
$\frac{3}{2}-\frac{1}{2};\frac{49}{3}-\frac{18}{3};\frac{56}{5}+\frac{34}{5};\frac{40}{7}-\frac{19}{7};\frac{47}{20}-\frac{15}{20};\frac{604}{30}-\frac{193}{20}.$

n° 15. Effectuer les soustractions suivantes :
$\frac{17}{12}-\frac{2}{12};\frac{17}{5}-\frac{3}{5};\frac{45}{6}-\frac{27}{6};\frac{3}{4}-\frac{5}{8};\frac{4}{9}-\frac{5}{18};\frac{13}{20}-\frac{2}{5}.$

page 44

n° 16. Compléter le tableau :

a	$\frac{7}{25}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{4}$	
b	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
$a+b$		$\frac{11}{31}$				$\frac{11}{5}$

n° 17. Compléter le tableau et simplifier le résultat lorsque c'est possible :

$+$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{3}$				
$\frac{5}{6}$				
$\frac{1}{24}$				
$\frac{7}{12}$				

n° 21. Effectuer et donner les résultats sous forme simplifiée :

$\frac{55}{77}+\frac{4}{7}$; $\frac{5}{10}-\frac{1}{2}$; $\frac{4}{33}+\frac{6}{11}$; $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}$; $\frac{25}{1}-\frac{61}{21}$; $\frac{5}{6}+\frac{1}{3}$.

n° 22. Calculer :

$\frac{4}{9}+\frac{20}{27}$; $\frac{3}{5}+\frac{4}{15}$; $7-\frac{2}{3}$; $5-\frac{1}{5}$; $3-\frac{2}{5}$; $\frac{7}{9}-\frac{2}{27}$.

n° 24. Effectuer et simplifier :

$\frac{2}{3}\times\frac{6}{5}$; $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}$; $\frac{7}{8}\times\frac{16}{14}$; $\frac{1}{100}\times\frac{1000}{55}$; $\frac{2}{5}\times\frac{5}{2}$; $\frac{4}{3}\times 0$.

page 48

n° 63. *Négoce.* Une pièce de vin contenait 125 litres ; on a vendu les $\frac{3}{5}$ de la pièce. Combien contient-elle encore de litres ?

page 50

n° 79. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\frac{b}{c}$, où a est la partie entière et $\frac{b}{c}$ la partie fractionnaire (fraction inférieure à 1) : $\frac{17}{2}$; $\frac{13}{10}$; $\frac{45}{7}$; $\frac{355}{113}$.

n° 80. Même exercice que le n° 79 avec : $\frac{25}{12}$; $\frac{100}{31}$; $\frac{49}{7}$; $\frac{4}{17}$.

n° 81. *a)* Trouver la fraction dont la partie entière est 1 et la partie fractionnaire $\frac{3}{5}$.

b) Même question avec 3 et $\frac{8}{9}$; puis avec 2 et $\frac{2}{3}$; enfin avec 7 et $\frac{3}{8}$.

n° 82. Même exercice avec 4 et $\frac{9}{10}$; 2 et $\frac{4}{9}$; 13 et $\frac{1}{2}$; 100 et $\frac{1}{100}$.

8-11 CHAPITRE 3 : Les nombres en écriture fractionnaire.

Exercice : Dire si les fractions suivantes sont l'écriture fractionnaire d'un nombre entier, d'un nombre décimal, ou bien ni l'un ni l'autre :

$\frac{3}{4}$ est une écriture fractionnaire d'un nombre décimal (0,75)

$\frac{5}{9}$ est ni l'un ni l'autre (= 0,55555 ...)

$\frac{18}{6}$ est l'écriture fractionnaire d'un nombre entier (3)

$\frac{23}{12}$ est ni l'un ni l'autre (= 1,91666 ...)

$\frac{30}{45}$ est ni l'un ni l'autre (= 0,6666 ...)

$\frac{5687}{234}$ ~~est ni l'un ni l'autre (= 24,3034 17 ...)~~ c'est un nombre décimal.

$\frac{555}{5}$ est un nombre entier (111)

Exercice 11 p 30

$\frac{9}{39} = \frac{3}{13}$ (÷3) $\qquad \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ (÷3) $\qquad \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$ (÷5)

$\frac{12}{17} \xrightarrow{\times 5} \frac{60}{85}$; $\frac{35}{27} \xrightarrow{\times 10} \frac{350}{270}$; $\frac{77}{56} \xrightarrow{\div 7} \frac{11}{8}$

Exercice 12 p 30 : On cherche la forme irréductible de chaque fraction

1 Intrus : $\frac{50}{40}$; $\frac{60}{48}$; $\frac{10}{8}$; $\frac{6}{4}$; $\frac{18}{12}$; $\frac{25}{20}$; $\frac{5}{4}$

2 Intrus : $\frac{5}{30}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{24}$; $\frac{10}{60}$; $\frac{2}{12}$; [illegible] ; $\frac{5}{3}$

3 Intrus : $\frac{24}{36}$; $\frac{6}{9}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{14}{21}$; $\frac{1,2}{1,8}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{8}{12}$

Exercice 5 p 30.

a) $\frac{4}{6} \xrightarrow{\div 2} \frac{2}{3}$; $\frac{16}{14} \xrightarrow{\div 2}$ [illegible] ; $\frac{3}{9} \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3}$; $\frac{10}{12} =$

$\frac{2}{4} \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}$; $\frac{3}{6} \xrightarrow{\div 3} \frac{1}{2}$; $\frac{12}{8} \xrightarrow{\div 4} \frac{3}{2}$

b) $\frac{16}{18} \xrightarrow{\div 2} \frac{8}{9}$; $\frac{12}{9} \xrightarrow{\div 3} \frac{4}{3}$; $\frac{6}{12} \xrightarrow{\div 3} \frac{8}{4}$; $\frac{15}{6} =$

$\frac{14}{21} \xrightarrow{\div 2} \frac{7}{11} = \frac{2}{3}$; $\frac{9}{6} \xrightarrow{\div 3} \frac{3}{2}$; $\frac{25}{15} \xrightarrow{\div 5} \frac{5}{3}$

4/11/96

Exercice 6 p 30

a) $\frac{15}{20} \xrightarrow{:5} \frac{3}{4}$; $\frac{9}{12} \xrightarrow{:3} \frac{3}{4}$; $\frac{6}{8} \xrightarrow{:2} \frac{3}{4}$; $\frac{33}{44} \xrightarrow{:11} \frac{3}{4}$;

$\frac{30}{40} \xrightarrow{:10} \frac{3}{4}$; $\frac{5}{10} \xrightarrow{:5} \frac{1}{2}$;

b) $\frac{2500}{300} \xrightarrow{:100} \frac{25}{3}$; $\frac{70}{200} \xrightarrow{:10} \frac{7}{20}$; $\frac{50000}{9000} \xrightarrow{:1000} \frac{50}{9}$

Exercice 7 p30

a) $\frac{6}{18} \xrightarrow{:3} \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{24}{30} \xrightarrow{:2} \frac{12}{15} \xrightarrow{:3} \frac{4}{5}$ ($:6$) ; $\frac{12}{6} \xrightarrow{:6} \frac{2}{1}$

$\frac{42}{36} \xrightarrow{:2} \frac{21}{18} \xrightarrow{:3} \frac{7}{6}$ ($:6$) ; $\frac{240}{300} \xrightarrow{:10} \frac{24}{30} \xrightarrow{:2} \frac{12}{15} \xrightarrow{:3} \frac{4}{5}$ ($:60$)

b) $\frac{4}{1980} \xrightarrow{:4} \frac{1}{495}$; $\frac{27}{24} \xrightarrow{:3} \frac{9}{8}$; $\frac{12}{15} \xrightarrow{:3} \frac{4}{5}$;

$\frac{14}{16} \xrightarrow{:2} \frac{7}{8}$; $\frac{8}{18} \xrightarrow{:2} \frac{4}{9}$

11/96

Exercice 13 p30

a) $\frac{1}{36} < \frac{7}{36} < \frac{13}{36} < \frac{24}{36} < \frac{36}{36} < \frac{43}{36}$

On classe les fractions et les dénominateurs sont [illegible]

b) $\frac{2}{24} < \frac{7}{24} < \frac{15}{24} < \frac{36}{24} < \frac{72}{24} < \frac{97}{24}$,

Exercice 14 p 30

a) $\frac{71}{60} < \frac{60}{60} < \frac{21}{60} < \frac{13}{60} < \frac{12}{60} < \frac{8}{60} < \frac{1}{60}$,

On classe ces fractions, si les dénominateurs sont les mê[mes]

b) $\frac{27}{48} < \frac{13}{48} < \frac{11}{48} < \frac{9}{48} < \frac{7}{48} < \frac{5}{48}$ dans l'ordre de leur numérateur

Exercice 15 p 30

a) $\frac{5}{8} = \frac{10}{16}$ $\frac{7}{8} = \frac{14}{16}$

Comme ces fractions n'ont pas le même dénominateur, on cherche un dénominateur commun

$\frac{10}{16} < \frac{13}{16} < \frac{14}{16} < \frac{15}{16} < \frac{18}{16}$

Maintenant toutes les fractions ont le même dénominateur on

b) $\frac{3}{10} = \frac{3.000}{10.000}$ $\frac{31}{100} = \frac{3100}{10.000}$ $\frac{297}{1000} = \frac{29[illegible]}{10[illegible]}$

peut donc les classer dans l'ordre de leur numérateur.

$\frac{2970}{10\,000} < \frac{3\,000}{10.000} < \frac{3056}{10.000} < \frac{3\,100}{10.000}$

$\frac{297}{1.000} < \frac{3}{10} < \frac{3056}{10.000} < \frac{31}{100}$

9/12 exercice 16 p 30

Comme ces fractions n'ont pas le même dénominateur, on cherche un dénominateur commun à ces fractions :

a) $\frac{13}{20}$ — $\frac{7}{10} = \frac{14}{20}$ — $\frac{9}{4} = \frac{45}{20}$ — $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$ — $\frac{1}{2}$ $\frac{10}{20}$

…n'ellesont un …minateur commun … …nge dans l'ordre … …sant les numérateurs.

$\frac{8}{20} < \frac{10}{20} < \frac{13}{20} < \frac{14}{20} < \frac{45}{20}$,

$= \frac{2}{5} < \frac{1}{2} < \frac{13}{20} < \frac{7}{10} < \frac{9}{4}$,

b) Idem que le a

$\frac{37}{100}$ — $\frac{17}{50} = \frac{34}{100}$ — $\frac{13}{25} = \frac{52}{100}$ — $\frac{7}{10} = \frac{70}{100}$ — $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$

Idem que le a

$\frac{34}{100} < \frac{37}{100} < \frac{40}{100} < \frac{52}{100} < \frac{70}{100}$,

$= \frac{17}{50} < \frac{37}{100} < \frac{2}{5} < \frac{13}{25} < \frac{7}{10}$,

Exercice 17 p 31

Idem que le a ex 16

a) $\frac{13}{21} = \frac{221}{357}$ $\frac{152}{17} = \frac{3192}{357}$ $\frac{13}{17} = \frac{273}{357}$ $\frac{5}{21} = \frac{85}{357}$

$\frac{3192}{357} > \frac{273}{357} > \frac{221}{357} > \frac{85}{357} = \frac{152}{17} > \frac{13}{17} > \frac{13}{21} > \frac{5}{21}$

b) $\frac{3}{5} = \frac{36}{60}$ - $\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$ - $\frac{3}{4} = \frac{45}{60}$ - $\frac{5}{3} = \frac{100}{60}$ - $\frac{5}{4} = \frac{75}{60}$

$\frac{100}{60} > \frac{75}{60} > \frac{45}{60} > \frac{36}{60} > \frac{12}{60}$

$= \frac{5}{3} > \frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$

Ex 18 p 31.

a) et b)

$\frac{0}{7}$; $\frac{1}{7}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{6}{7}$; $\frac{7}{7}$.

ex 17 p 31

b)

$\frac{3}{4} < \frac{5}{4}$ $\frac{1}{5} < \frac{3}{5}$ $\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3} > \frac{5}{4} > \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{1}{5}$

16/12

exercice On veut comparer A et B avec une calculatrice.

$A = \dfrac{13\,860}{33\,461}$; $B = \dfrac{33\,461}{80\,782}$.

1°) Compare A et B à l'aide de la machine, conclure.

$A = \dfrac{13860}{33461} = 0,41421356\,2$

$B = \dfrac{33\,461}{80\,782} = 0,41421356\,82$

Les deux fractions ont le mêmes résultats. Donc on ne peut pas les classer.

$\boxed{A = B}$

2°) Multiplier le numérateur et le dénominateur de A par 80 78.

$A = \dfrac{1\,119\,638\,520}{2\,703\,046\,502}$

$A = \dfrac{13\,860}{33\,461} \xrightarrow{\times 80782} = \dfrac{1\,119\,638\,520}{2\,703\,046\,502}$

3) Multiplier le numérateur et le dénominateur de B par 33 4

$B = \dfrac{33\,461}{80\,782} \xrightarrow{\times 33461} = \dfrac{1\,119\,638\,521}{2\,703\,046\,502}$.

4°) Comparer A et B

$$\boxed{A < B}$$

ATTENTION

Se méfier de la machine

Exercice 20 p 31.

$$\frac{7}{7} ; \frac{8}{7} ; \frac{9}{7} ; \frac{10}{7} ; \frac{11}{7} ; \frac{12}{7} ; \frac{13}{7} ; \frac{14}{7}.$$

$$\frac{14}{7} > \frac{13}{7} > \frac{12}{7} > \frac{11}{7} > \frac{10}{7} > \frac{9}{7} > \frac{8}{7} > \frac{7}{7}$$

16/12 Ex 10 p 43.

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{1+2}{5} = \frac{3}{5} \quad ; \quad \frac{2}{15} + \frac{4}{15} = \frac{2+4}{15} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \quad ; \quad \frac{13}{14} + \frac{9}{14} = \frac{13+9}{14} = \frac{22}{14} = \frac{1}{}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad ; \quad \frac{3}{20} + \frac{5}{20} + \frac{9}{20} = \frac{3+5+9}{20} = \frac{17}{20}$$

Exercice 11 p 43.

$$\frac{3}{6} + \frac{5}{6} = \frac{3+5}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \quad ; \quad \frac{21}{24} + \frac{8}{24} = \frac{21+8}{24} = \frac{29}{24} = \text{rien.}$$

onne, jao la

$\frac{5}{10} + \frac{3}{10} = \frac{5+3}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; $\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3+2}{5} = \frac{5}{5} = \frac{1}{1} = 1$

$\frac{2}{7} + \frac{12}{7} = \frac{2+12}{7} = \frac{14}{7} = \frac{2}{1} = 2$; $\frac{1}{3} + \frac{3}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1+3+5}{3} = \frac{9}{3} = \frac{3}{1} = 3$

exercice 12 p43

$\frac{7}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7-3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{17}{25} - \frac{12}{25} = \frac{17-12}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$\frac{45}{76} - \frac{27}{76} = \frac{45-27}{76} = \frac{18}{76} = \frac{9}{38}$; $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$ = on ne peut pas la simplifier.

$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $\frac{4}{12} - \frac{4}{12} = \frac{4-4}{12} = \frac{0}{12} = 0$

Exercice 12 p43.

$\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{4-2}{7} = \frac{2}{7}$ = on ne peut pas la simplifier ; $\frac{7}{9} - \frac{5}{9} = \frac{7-5}{9} = \frac{2}{9}$ = on ne peut pas la simplifier.

$\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{5-1}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{7-3}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $\frac{7}{8} - \frac{4}{8} - \frac{2}{8} = \frac{7-4-2}{8} = \frac{1}{8}$ = on ne peut pas la simplifier

Exercice 14 p43

$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1} = 1$; $\frac{49}{3} - \frac{18}{3} = \frac{49-18}{3} = \frac{31}{3}$ = on ne peut pas la simplifi

$\frac{56}{5} + \frac{34}{5} = \frac{56+34}{5} = \frac{90}{5} = \frac{18}{1} = 18$; $\frac{40}{7} - \frac{19}{7} = \frac{40-19}{7} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1} = 3$

$\frac{47}{20} - \frac{15}{20} = \frac{47-15}{20} = \frac{\cancel{32}}{20} = \frac{\cancel{11}}{\cancel{10}} = \frac{8}{5}$; $\frac{604}{30} - \frac{193}{30} = \frac{604-193}{30} = \frac{411}{30} = \frac{137}{10}$

exercice 15 p 43.

$\frac{17}{12} - \frac{2}{12} = \frac{17-2}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$; $\frac{17}{5} - \frac{3}{5} = \frac{17-3}{5} = \frac{14}{5}$

$\frac{45}{6} - \frac{27}{6} = \frac{45-27}{6} = \frac{18}{6} = \frac{3}{1} = 3$; $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} = \frac{6}{8} - \frac{5}{8} = \frac{6-5}{8} = \frac{1}{8}$

$\frac{4}{9} - \frac{5}{18} = \frac{8}{18} - \frac{5}{18} = \frac{8-5}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$; $\frac{13}{20} - \frac{2}{5} = \frac{13}{20} - \frac{8}{20} = \frac{5}{20} = \frac{13-8}{20}$.

20/12 ex 24 p 44.

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{12}{15}$; $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1 \times \cancel{2}}{\cancel{2} \times 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\frac{7}{8} \times \frac{16}{14} = \frac{7 \times 16}{8 \times 14} = \frac{112}{112}$;

$\frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{2 \times 3}{5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3}}{5 \times \cancel{3}} = \frac{2 \times 2}{5} = \frac{4}{5}$

$$\frac{1}{100} \times \frac{1\,000}{55} = \frac{1 \times 1\,000}{55 \times 100} = \frac{1\,000}{5\,500}$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$$

$$\frac{7}{8} \times \frac{16}{14} = \frac{7}{8} \times \frac{8 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = 1$$

/01/97 exercice 16 p 44

a	$\frac{7}{25}$	$\frac{7}{31}$	$\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$	$\frac{9}{14}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{[illegible]}{5}$
b	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{31}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{7} = \frac{4}{14}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$
a + b	$\frac{11}{25}$	$\frac{11}{31}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{13}{14}$	$\frac{[illegible]}{4} = 2$	$\frac{11}{5}$

ex 17 p 44.

$+$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$
$\frac{5}{6}$	$\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$	$\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$	$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$	$\frac{17}{12} =$
$\frac{1}{24}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$
$\frac{7}{12}$	$\frac{15}{12} = \frac{5}{4}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$	$\frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$

$\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12} + \frac{8}{12} = \frac{15}{12}$; $\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6}$

$\frac{1}{24} + \frac{5}{6} = \frac{1}{24} + \frac{20}{24} = \frac{21}{24}$; $\frac{7}{12} + \frac{5}{6} = \frac{7}{12} + \frac{10}{12} = \frac{17}{12}$

$\frac{2}{3} + \frac{1}{24} = \frac{16}{24} + \frac{1}{24} = \frac{17}{24}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{24} = \frac{20}{24} + \frac{1}{24} = \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

$\frac{7}{12} + \frac{1}{24} = \frac{14}{24} + \frac{1}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$; $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} = \frac{7}{12} + \frac{8}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

$\frac{5}{6} + \frac{7}{12} = \frac{10}{12} + \frac{7}{12} = \frac{17}{12}$; $\frac{1}{24} + \frac{7}{12} = \frac{1}{24} + \frac{14}{24} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$

exercice 21 p 44.

$\frac{5}{77} + \frac{4}{7} = \frac{5}{77} + \frac{44}{77} = \frac{49}{77} = \frac{7}{11}$; $\frac{5}{10} - \frac{1}{2} = \frac{5}{10} - \frac{5}{10} = \frac{0}{10} = 0$

$\frac{4}{33} + \frac{6}{11} = \frac{4}{33} + \frac{18}{33} = \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$; $\frac{2}{3} + \frac{5}{6} = \frac{4}{6} + \frac{5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$\frac{25}{7} - \frac{61}{21} = \frac{75}{21} - \frac{61}{21} = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$; $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$

exercice 22 p 44.

$\frac{4}{9} + \frac{20}{27} = \frac{12}{27} + \frac{20}{27} = \frac{32}{27}$; $\frac{3}{5} + \frac{4}{15} = \frac{9}{15} + \frac{4}{15} = \frac{13}{15}$.

$7 - \frac{2}{3} = \frac{7}{1} - \frac{2}{3} = \frac{21}{3} - \frac{2}{3} = \frac{19}{3}$; $5 - \frac{1}{5} = \frac{5}{1} - \frac{1}{5} = \frac{25}{5} - \frac{1}{5} =$

$3 - \frac{2}{5} = \frac{3}{1} - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}$; $\frac{7}{9} - \frac{2}{27} = \frac{21}{27} - \frac{2}{27} = \frac{19}{27}$

01/97 = Activité 9 p 41.

a) Les $\frac{2}{5}$ de 30 font : $30 \times \frac{2}{5} = \frac{30}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{60}{5} = 12$

Les $\frac{9}{4}$ de 42 font : $42 \times \frac{9}{4} = \frac{42}{1} \times \frac{9}{4} = \frac{378}{4} = \frac{189}{4}$

b) Combien valent les $\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{7}$ de 56 ?

$56 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{56}{1} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{336}{28}$

Combien valent les $\frac{8}{5}$ des $\frac{3}{11}$ de 1100 ?

$1100 \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{1100}{} \times \frac{8}{5} \times \frac{3}{11} = \frac{26400}{55}.$

c) $120 \times \frac{3}{4} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{10} \times \frac{3}{4} \times 120 = \frac{9 \times 3 \times 120}{10 \times 4}$

$\frac{9 \times 3 \times \cancel{10} \times 12}{\cancel{10} \times 4} = \frac{9 \times 3 \times 12}{4} = \frac{9 \times 3 \times 3 \times 4}{4} = \frac{9 \times 3 \times 3}{} = 8-$

exercice 53 p 48

$125 \times \frac{3}{5} = \frac{120 \times 3}{5} = \frac{14 \times \cancel{5} \times 3}{\cancel{5}} = \frac{14 \times 3}{} = 42$

125 litres de vin

On vend $\frac{3}{5}$ de 125 litres de vin. On a vendu $\frac{3 \times 125}{5} = 75$ l

donc : $125 - (\frac{3}{5} \times 125)$

il reste 125 litres − 75 litres = 50 litres.

exercice 79 p 50

$\frac{17}{2} = \frac{16+1}{2} = \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8 \times 2}{2} + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2}$

La partie entière est 8.

$$\frac{13}{10} = \frac{10+3}{10} = \frac{10}{10} + \frac{3}{10} = 1 + \frac{3}{10}.$$

La partie entière est 1

$$\frac{45}{7} = \frac{42+3}{7} = \frac{42}{7} + \frac{3}{7} = \frac{6\times 7}{7} + \frac{3}{7} = 6 + \frac{3}{7}.$$

La partie entière est 6.

$$\frac{355}{113} = \frac{339+16}{113} = \frac{113\times 3}{113} + \frac{16}{113} = 3 + \frac{16}{113}.$$

La partie entière est 3.

exercice 80 p 50

$$\frac{25}{12} = \frac{24+1}{12} = \frac{12\times 2}{12} + \frac{1}{12} = 2 + \frac{1}{12};$$

La partie entière est 2

$$\frac{100}{31} = \frac{93+7}{31} = \frac{31\times 3}{31} + \frac{7}{31} = 3 + \frac{7}{31},$$

La partie entière est 3

$$\frac{49}{7} = \frac{49}{7} + \frac{0}{7} = \frac{7\times 7}{7} + \frac{0}{7} = 7,$$

La partie entière est 7

$$\frac{4}{17} = \frac{0}{17} + \frac{4}{17} = 0 + \frac{4}{17}$$

La partie entière est 0

ex 81 p 50

a) $1 + \frac{3}{5} = \frac{5}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$

b) $3 + \frac{8}{9} = \frac{27}{9} + \frac{8}{9} = \frac{35}{9}$

$2 + \frac{2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

$7 + \frac{3}{8} = \frac{56}{8} + \frac{3}{8} = \frac{59}{8}$

ex 82 p 50

1) $4 + \frac{9}{10} = \frac{40}{10} + \frac{9}{10} = \frac{49}{10}$ 3) $13 + \frac{1}{2} = \frac{26}{2} + \frac{1}{2} = \frac{27}{2}$

2) $2 + \frac{4}{9} = \frac{18}{9} + \frac{4}{9} = \frac{22}{9}$ 4) $100 + \frac{1}{100} = \frac{10\,000}{100} + \frac{1}{100} = \frac{10}{10}$

10/01/97

ex 8 p 30

a) $\frac{5}{2} = \frac{5 \times 6}{2 \times 6} = \frac{30}{12}$; $\frac{1}{3} = \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12}$; $\frac{7}{6} = \frac{7 \times 2}{6 \times 2} = \frac{14}{12}$

$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4 \times 3} = \frac{15}{12}$; b) $\frac{2}{7} = \frac{2 \times 9}{7 \times 9} = \frac{18}{63}$; $\frac{9}{2} = \frac{9 \times 2}{2 \times 2} = \frac{18}{4}$

$\frac{6}{5} = \frac{6 \times 3}{5 \times 3} = \frac{18}{15}$; $\frac{3}{11} = \frac{3 \times 6}{11 \times 6} = \frac{18}{66}$

[illegible]

$\frac{26}{14} \overset{:2}{=} \frac{13}{7}$; $\frac{15}{39} \overset{:3}{=} \frac{5}{13}$; $\frac{45}{35} \overset{:5}{=} \frac{9}{7}$

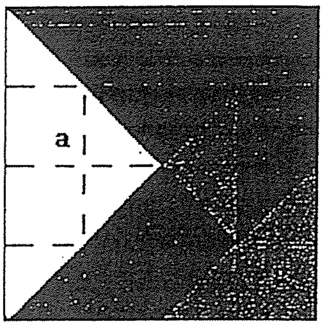
$\frac{72}{63} \overset{:9}{=} \frac{8}{7}$; $\frac{50}{30} \overset{:10}{=} \frac{5}{3}$; $\frac{300}{200} \overset{:100}{=} \frac{3}{2}$

$\frac{5}{15} \overset{:5}{=} \frac{1}{3}$

1- Devoir à la maison, résultats et commentaires

Le Tangram

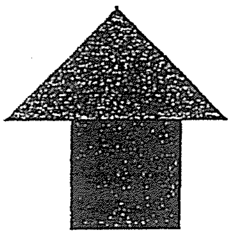
a/ Dans un carré en carton de 8cm (ou 8 carreaux) de coté, dessiner et colorier les sept pièces qui forment le jeu appelé tangram.



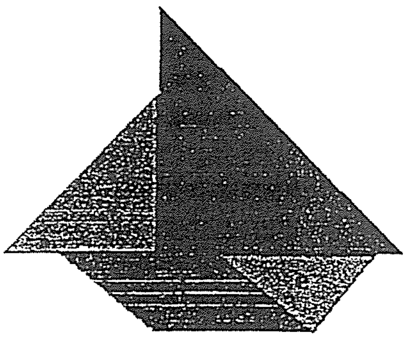
b/ Ecrire l'aire de chaque morceau sous forme de fraction (par rapport à l'aire du grand carré).

a=...	b=...	c=...	d=...
e=...	f=...	g=...	

c/ Avec les morceaux du tangram, on peut réaliser des dessins très variés. Quelle fraction (du grand carré) représente le dessin ci-dessous ?



Et celui-ci ?



d/ Inventer une nouvelle figure et donner la fraction quelle représente.

09/12

5°H

Devoir à la maison

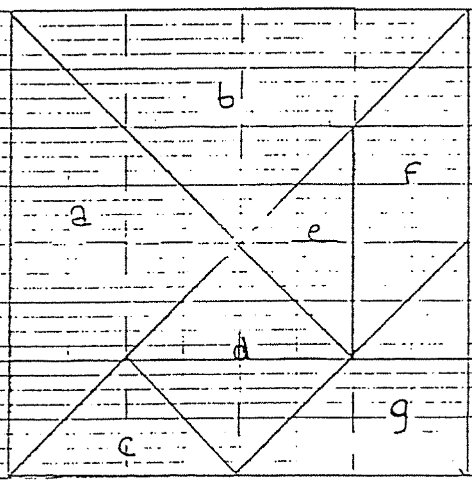
à rendre le 16/12/96

Note	Observations	signature
20/20	Travail sérieux et soigné.	

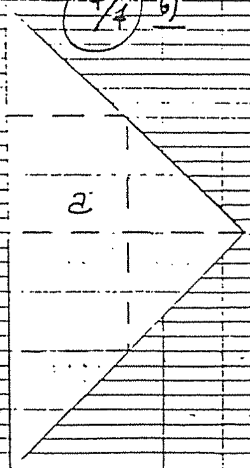
Activité 7 p40

2)

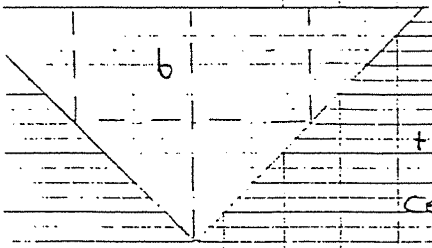
1/1



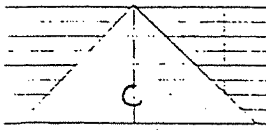
1/1 b)



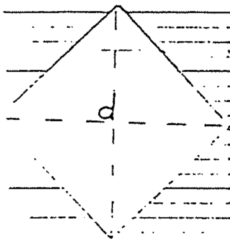
a a comme aire la fraction $\frac{4}{16}$ car il y a 2 carrés + 4 demi carrés ce qui est égal à 2 carrés + 2 carrés ce qui fait 4 carrés sur 16 carrés en tout



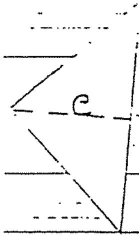
b a comme aire la fraction $\frac{4}{6}$ car il y a 2 carrés + 4 demi carrés ce qui est égal à 2 carrés + 2 carrés ce qui fait 4 carrés sur 16 carrés en tout.



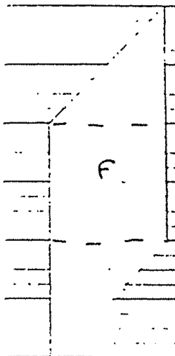
c a comme aire la fraction $\frac{1}{16}$ car il y a 2 demi carrés qui ajoutés en font 1 entier



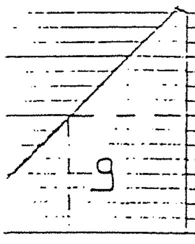
d a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 4 demi carrés qui ajoutés en font 2 entiers



e a comme aire la fraction $\frac{1}{16}$ car il y a 2 demi carrés ce qui fait 1 carré entier



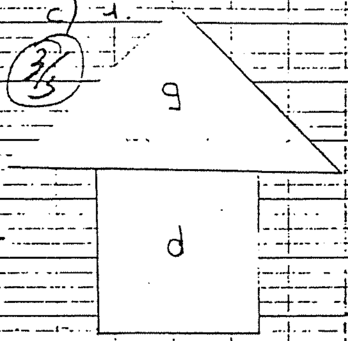
f a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 1 carré entier + 2 demi carrés ce qui est égal à 1 carré entier + 1 carré e. c'est à dire 2 carrés entiers



g a comme aire la fraction $\frac{2}{16}$ car il y a 1 carré entier 2 demi carrés ce qui est égal à 1 carré entier + 1 carré entier ce qui fait 2 carrés entiers sur 16 carrés

c) 1. La figure représente : la forme d + la forme g

3/3



$(d) = \frac{2}{16} + (g) = \frac{2}{16}$

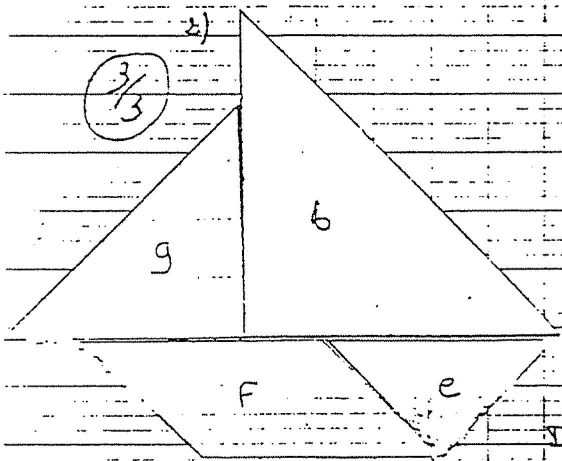
n pourrait mpter le ombre de carreaux)

Donc la figure a pour aire la fraction $\frac{4}{16}$ ca

on a mis la forme d et la forme g dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les deux formes appartiennent au même carré, on ajoute les numérateurs et pas les dénominateurs.

2) cette figure représente : la forme g + la forme b + la forme F + la forme e.

3/3

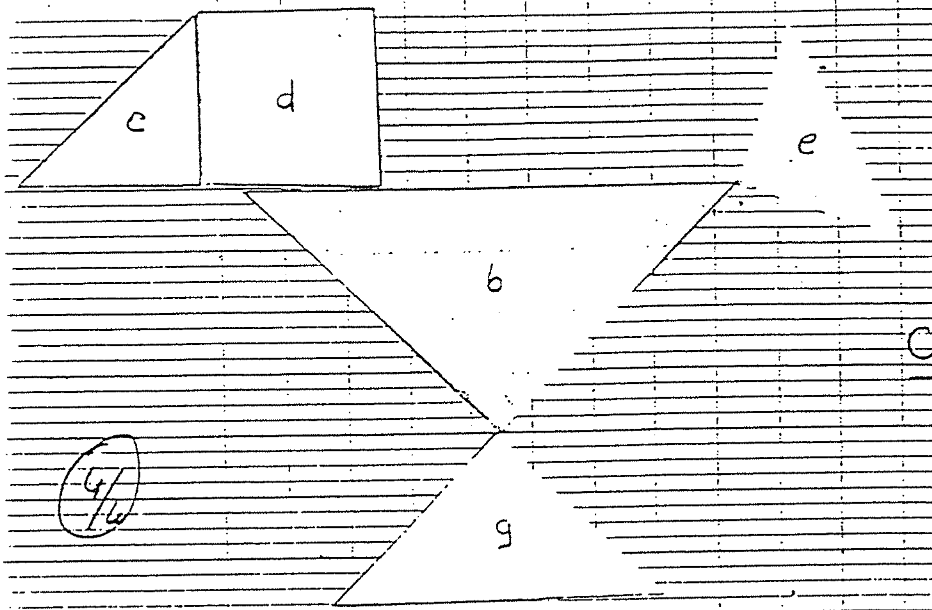


$(g) = \frac{2}{16} + (b) = \frac{4}{16} + (F) = \frac{2}{16} + (e) = \frac{1}{16}$

Donc la figure a pour aire la fraction $\frac{9}{16}$ ca

on a mis la forme g + la forme b + la forme e + la forme f dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les quatre formes appartiennent au même carré : on ajoute que les numérateurs

d) Inventez une figure et dites la fraction qu'elle représente



4/4

Bien

C'est une cocotte en papier

cette figure représente la forme e + la forme g + la forme b + la forme d + la forme c.

$$e = \frac{1}{16} + g = \frac{2}{16} + b = \frac{4}{16} + d = \frac{2}{16} + c = \frac{1}{16}$$

Donc la figure a pour aire la fraction $\frac{10}{16}$ car on a pris la forme d + la forme c + la forme b + la forme e + la forme g dans un carré qui a pour aire la fraction $\frac{16}{16}$ et comme les cinq formes appartiennent au même carré, on ajoute les numérateurs.

Bien

2- Contrôle, résultats et commentaires

Classe de $5^{\text{ième}}$ H lundi 13 janvier 1997

Contrôle de mathématiques

Calculatrice interdite

Exercice n°1 : Ranger par ordre croissant, après avoir cité la règle utilisée :

$$\frac{5}{7} ; \frac{2}{7} ; \frac{4}{7} ; \frac{3}{7} ; \frac{10}{70}$$

Exercice n°2 : Compléter les séries d'égalités (Ne pas oublier les étapes nécessaires):

a) $\frac{5}{7} = \frac{15}{...}$ c) $\frac{4}{5} = \frac{36}{...}$ e) $\frac{17}{12} = \frac{51}{...}$

b) $\frac{2{,}4}{3} = \frac{24}{...}$ d) $\frac{7}{2} = \frac{...}{10}$ f) $\frac{9}{4} = \frac{...}{28}$

Exercice n°3 : Remplacer chaque fraction par la fraction la plus simple :

$$\frac{100}{400} ; \frac{500}{30} ; \frac{140}{220} ; \frac{2}{6} ; \frac{63}{36} ; \frac{45}{60}$$

Exercice n°4 : Ecrire sous forme d'une seule fraction la plus simple possible :
(ne pas oublier de citer les règles !)

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5}$ *c)* $\frac{2}{5} \times \frac{7}{5}$ *e)* $\frac{5}{4} + 3$

b) $\frac{7}{4} - \frac{5}{4}$ *d)* $\frac{3}{2} \times \frac{8}{9}$ *f)* $\frac{5}{4} \times 3$

Exercice n°5 : Patrick et Sébastien

Sébastien : « *Après l'achat d'un disque pour la fête des pères, il me reste les trois septièmes de mes économies.* »
Quelle fraction de ses économies Sébastien a-t-il dépensé ?

Patrick : « *J'ai dépensé les deux tiers de mes économies pour la Fête des Mères et le douzième pour l'achat d'une cassette* »
Quelle fraction de ses économies reste-t-il à Patrick?

13/01/9

Contrôle de Maths

Note :	Observations :
19/20	Excellent Devoir

Exercice 1 :

Pour pouvoir classer des fractions, il faut qu'elles aient le même dénominateur. et alors, comment les classes-tu ensuite ?

Et lorsqu'elles ont le même dénominateur on les classe dans l'ordre de leur numérateur.

$$\frac{10}{70} \overset{:10}{=} \frac{1}{7}$$

1,5

$$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} \quad ; \quad \frac{10}{70} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7}$$

Exercice 2 :

a) $\frac{5}{7} = \frac{5 \times 3}{7 \times 3} = \frac{15}{21}$; b) $\frac{2,4}{3} = \frac{2,4 \times 10}{3 \times 10} = \frac{24}{30}$; c) $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 9}{5 \times 9} =$

4

d) $\frac{7}{2} = \frac{7 \times 5}{2 \times 5} = \frac{35}{10}$; e) $\frac{17}{12} = \frac{17 \times 3}{12 \times 3} = \frac{51}{36}$; f) $\frac{9}{4} = \frac{9 \times 7}{4 \times 7} =$

Exercice 3 :

$\frac{100}{400} = \frac{100 \div 100}{400 \div 100} = \frac{1}{4}$; $\frac{500}{30} = \frac{500 \div 10}{30 \div 10} = \frac{50}{3}$

$\frac{140}{220} = \frac{140 \div 10}{220 \div 10} = \frac{14}{22} = \frac{14 \div 2}{22 \div 2} = \frac{7}{11}$

4

$\frac{2}{6} = \frac{2 \div 2}{6 \div 2} = \frac{1}{3}$; $\frac{63}{36} = \frac{63 \div 9}{36 \div 9} = \frac{7}{4}$

$\frac{45}{60} = \frac{45 \div 5}{60 \div 5} = \frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$

Exercice 4

a) $\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4+3}{5} = \frac{7}{5}$; b) $\frac{7}{4} - \frac{5}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

6,5

c) $\frac{2}{5} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{5 \times 5} = \frac{14}{25}$; d) $\frac{3}{2} \times \frac{8}{9} = \frac{3 \times 8}{2 \times 9} = \frac{24}{18} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

e) $\frac{5}{4} + 3 = \frac{5}{4} + \frac{3}{1} = \frac{5}{4} + \frac{12}{4} = \frac{17}{4}$; f) $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{5}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{5 \times 3}{4 \times 1} = \frac{15}{4}$

Exercice 5 :

Sébastien a dépensé les $\frac{4}{7}$ de ses économies

9

La fraction qui représente ce que Sébastien a dépensé de ses économies est : $\frac{4}{7}$ car ses économies représentent $\frac{7}{7}$ et $\frac{7}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$

ses économies − ce qu'il lui reste = ce qu'il a dépensé

Patrick a dépensé

$\frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12}$

Il a dépensé les $\frac{9}{12}$ de ses économies.

Il lui reste : Ses économies représentent $\frac{12}{12}$. Il en a dépensé les

$\frac{12}{12} - \frac{9}{12} = \frac{3}{12}$ deux tiers plus le douzième

Il lui reste les $\frac{3}{12}$ de ses économies $\left(= \frac{1}{4}\right)$

Règles : Pour pouvoir additionner deux fractions, il faut que les fractions ai le même dénominateur. Comment les additionnes tu alors ?

Pour soustraire deux fractions ou plus, il faut qu'elles aient le même dénominateur

Lorsqu'on multiplie deux fractions, il faut multiplier le dénominateur et le numérateur par le même nombre

Pour classer des fractions dans un ordre croissant, si elles ont le même dénominateur, on les classe selon le numérateur. oui + 0,5

Groupe de Michèle

Théorie antropologique.

Théorie typiquement Marseillaise

LES NOMBRES RELATIFS

ÉTUDE D'UN COMPTE RENDU D'OBSERVATION D'UNE CLASSE DE CINQUIEME

Michèle Artaud
IUFM d'Aix-Marseille

Préambule

Nous avons choisi de présenter cette étude d'une part en distinguant l'analyse des praxéologies mathématique et didactique de l'évaluation de l'organisation mathématique, d'autre part en abordant cette analyse de deux points de vue, l'un « dynamique », et l'autre « statique ». Le point de vue dynamique, par lequel nous commencerons, montre l'organisation mathématique en train de se construire et la praxéologie didactique qui en permet la construction en suivant le déroulement du compte rendu étudié. Le point de vue statique présente l'organisation mathématique qui a été construite ainsi que certains éléments de l'organisation didactique qui en a permis la construction, notamment les éléments génériques de cette organisation.

1. Organisation mathématique et organisation didactique : un point de vue dynamique

Le professeur commence par présenter le programme de la séance du jour :

> On va terminer l'activité sur les nombres relatifs faite lundi. On va en déduire des règles de comparaison qu'on marquera sur le cahier de cours. Vous prenez votre cahier d'exercices, on va corriger...

On trouve là une première mention de l'organisation mathématique à étudier, il s'agit de la *comparaison des nombres relatifs*. La voie d'étude choisie est une activité, commencée précédemment, et que l'on va maintenant corriger.

ACTIVITÉ

On a mesuré la température dans plusieurs villes :

Ville	A	B	C	D	E	F
Température en degrés	–3	1	–4	–1	6	2

1) Représenter les températures sur une droite graduée (un carreau représentant une unité).
2a) Fait-il plus froid dans la ville A ou dans la ville B ? Comparer leur température.
2b) Comparer les températures des villes B et C.
2c) Même question avec les villes D et F.
3a) Comparer les températures des villes A et C.
3b) Même question avec les villes C et D.
3c) Même question avec les villes A et D.
4a) Comparer les températures des villes B et E.
4b) Même question avec les villes E et F.
5) Ranger les températures de la plus basse à la plus haute.
6a) Compléter par < ou >

–2 ... 5   –3,2 ... –6,8   7 ... –5,2   6,5 ... 4,7
–14 ... –2,5   5,3 ... –6,9   3,3 ... 8,2   –1,1 ... –1,01

6b) Ranger par ordre croissant :

–1 ; 4,5 ; –2,6 ; –3,4 ; 7,8 ; 9 ; –12,5

L'activité propose donc de comparer des températures de villes ; les questions 1 et 2 ont été traitées.

Après avoir rappelé les réponses à la question 2, P précise qu'il s'agissait de répondre aux questions 3 à 6 ; il désigne un élève pour corriger la question 3 et commente : « Il s'agissait de comparer les villes A et C. Où est-ce qu'il fait plus froid ? » P parle d'une voix forte et distincte qui s'impose comme une chape sonore. Entre-temps l'élève a écrit les réponses demandées :

3a) $-4 < -3$
3b) $-4 < -1$
3c) $-3 < -1$

Un nouvel élève est appelé pour traiter la question 4 : il donne des réponses correctes, en utilisant systématiquement la question « Où est-ce qu'il fait plus froid ? »

P fait alors un bilan : « Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous. Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? » Une élève : « Un nombre sans signe c'est plus grand qu'un nombre négatif. » Un élève rappelle le cas particulier de zéro ; P reprend cette remarque : « On a vu que *moins* zéro et *plus* zéro, c'est égal. » P : « À la question 2, après avoir fait la comparaison, on obtient la règle... à mettre sur le cahier de cours... » À la demande de P, des élèves énoncent la règle en question. P reprend leur formulation et l'écrit au tableau :

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

Nous voyons apparaître ici deux types de tâches mathématiques : il s'agit des types de tâches T_1 « Soit a un nombre positif et b un nombre négatif ; comparer a et b » et T_2 « Soit a et b deux nombres négatifs ; comparer a et b ». Ces types de tâches ont été accomplis dans l'activité en mettant en œuvre une technique que l'on peut décrire ainsi. On considère que a et b sont les températures respectives des deux villes A et B ; s'il fait plus froid dans la ville A que dans la ville B, alors $a < b$; sinon $a > b$. Ce n'est pas cette technique qui sera associée aux types de tâches T_1 et T_2 dans l'organisation mathématique. Elle est là pour faire surgir les éléments technologiques qui fonderont les techniques relatives à T_1 et T_2. Le professeur commence par utiliser les résultats de la question 2, dans laquelle il s'agissait de comparer des nombres négatifs et des nombres positifs. Les résultats obtenus ($-3 < 1$, $-4 < 1$, $-1 < 2$) font apparaître que « De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif », résultat technologique dont la technique relative à T_1 se déduit immédiatement comme le montre l'exemple suivant.

Tâche $t_1 \in T_1$: comparer -3 et 1
Technique : -3 et 1 sont de signes contraires ; -3 est négatif donc $-3 < 1$.

Notons qu'à cet énoncé technologique s'ajoute l'énoncé « *moins* zéro égal *plus* zéro », qui permet de régler le cas où l'un des deux nombres est nul.

La question 3 permet, de même, de faire émerger le résultat technologique relatif au type de tâche T_2 :

On passe à la question 3. P : « Qu'est-ce qu'on compare ? » Des élèves : « Des nombres négatifs. » P : « Et alors ? » Un élève : « Le chiffre le plus près de 0, ça donne la distance. » Un élève, avec l'aide de P : « Celui qui a la distance à 0 la plus petite est le plus grand. » Un autre élève intervient : « C'est l'ordre inverse de la distance à 0. » P approuve : « On peut écrire la propriété de deux manières. » Des élèves : « La première, c'est plus facile ! » P : « On va écrire la première... » Après une petite préparation orale, P met au tableau la formulation attendue, tout en signalant aux élèves qu'ils doivent l'écrire « à droite des réponses de la question 3 » :
De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Un débat s'ensuit. « On pourrait dire *le plus grand est celui qui a la plus petite distance à* 0 » affirment plusieurs élèves. P approuve mais ajoute : « Comme dans la règle précédente on a dit *le plus petit*, on continue ici. » Les élèves notent. P : « On pourrait dire aussi, comme l'a dit votre camarade, que les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. »

Par contraste avec le travail effectué à propos de la question 2, l'étude des résultats de la question 3 fait apparaître deux énoncés technologiques considérés comme équivalents : « De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro » et « les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro ». Celui qui est choisi par les élèves est le premier. Il permet de justifier et produire la technique suivante, relative au type de tâches T_2 « Soit a et b deux nombres négatifs ; comparer a et b » : si a a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$; sinon $a > b$. Signalons que la technique ainsi produite comporte un sous-type de tâches « Déterminer parmi deux nombres négatifs celui qui a la plus grande distance à zéro », sous-type de tâches qui est considéré ici comme non problématique. Notons également que le deuxième énoncé technologique aurait conduit à une variante de la technique τ que nous exemplifions ci-après :

Tâche $t_2 \in T_2$: comparer -4 et -3.
Technique : la distance à zéro de -4 est 4 ; celle de -3 est 3. On a $3 < 4$ et donc $-4 < -3$.

La question 4, dont l'objet est de comparer des nombres positifs – nouveau type de tâches que nous noterons T_3 – est mentionnée par P et reconnue par les élèves comme non problématique :

> « Pour la question 4, est-ce que c'est quelque chose de nouveau pour vous ? » Les élèves : « Non ! » P : « Est-ce que nous sommes capables de comparer les nombres relatifs ? » Les élèves : « Oui. ».

Un nouveau type de tâches, T, « Soit a et b deux nombres relatifs ; comparer a et b » est nommé ici par le professeur et les élèves conviennent qu'ils disposent d'une technique pour l'accomplir. Cette technique, qui n'est pas décrite par le professeur, peut être reconstituée sans mal.

Technique τ relative à T
Si a et b sont positifs, c'est une tâche routinière qu'on sait accomplir.
Si a et b sont de signes contraires, alors :
  si a est négatif, alors $a < b$;
  sinon, $a > b$.
Si a et b sont négatifs, alors :
  si a a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$;
  sinon $a > b$.

On voit ainsi les trois types de tâches précédemment identifiés, T_1, T_2 et T_3, apparaître comme sous-tâches dans l'accomplissement de T par la technique τ.

Cette phase de correction apparaît comme participant de plusieurs moments de l'étude. Il y a d'abord un *moment de la première rencontre* avec le type de tâches T, et donc les types de tâches T_1, T_2 et T_3 : en effet, bien que T_3 ait déjà été rencontré par les élèves à l'école primaire, il s'agit là de la première rencontre en tant qu'ingrédient dans l'accomplissement du type de tâches T. C'est également un *moment d'exploration* du type de tâches T et de l'élaboration de la technique τ relative à T, ainsi qu'un *moment d'élaboration de l'environnement technologico-théorique.* C'est enfin un *moment d'institutionnalisation* du type de tâches qu'il s'agit d'étudier, d'éléments de la technique qui va permettre d'accomplir T – notamment les trois sous-types de tâches qui la composent –, et d'éléments technologiques qui justifient la technique proposée. Signalons ici, sans que cela ait une coloration positive ou négative, qu'il n'y a pas d'institutionnalisation complète de la technique τ. On peut noter enfin que les éléments technologiques sont écrits par les élèves sur le cahier d'exercices, en regard des réponses qui ont permis leur production, et que le travail s'effectue d'abord en interrogeant un élève, qui vient au tableau corriger l'exercice, puis en interaction avec l'ensemble des élèves de la classe.

La correction de l'activité se poursuit :

> « Question 5... Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs... » P appelle un élève au tableau, l'interroge. L'élève indique qu'on commence par les nombres négatifs. P lui demande de préciser. L'élève écrit –4. P commente : « Il commence par le plus petit... » L'élève a continué d'écrire :
>
> $-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$
>
> P commente : « Une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs.... » Puis : « Ranger les températures de la plus basse à la plus haute, ça correspond à ranger les nombres... Dans quel ordre ? » Un élève : « Croissant. » P reprend cette réponse, en l'explicitant à l'intention d'un élève qui semble ne pas comprendre : « Du plus petit au plus grand. » Il l'écrit :
>
> rangement dans l'ordre croissant
> (du plus petit au plus grand)

Voici donc un autre type de tâches, T', « Ranger une suite finie de nombres relatifs dans l'ordre croissant ». Le professeur le relie d'emblée au type de tâches précédent, T : « Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs », signifiant par là que, dans la technique τ' relative à T', T apparaîtra comme sous-type de tâches. D'autres indications portant sur la technique mise en œuvre sont données par P : « on commence par le plus petit », « une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs ». La technique initiale, qui consistait à interpréter les nombres en jeu comme des températures de villes, n'est pas utilisée directement ici, mais ce sont les résultats qu'elle a permis de produire qui permettent d'arriver à la réponse demandée. On avait en effet :

$$\begin{array}{lll} -4 < -3 & -3 < 1 & 1 < 6 \\ -4 < -1 & -4 < 1 & 2 < 6 \\ -3 < -1 & -1 < 2 & \end{array}$$

Il vient donc que –4 est le plus petit des négatifs, puis viennent –3 et –1. On passe ensuite aux nombres positifs[1] et l'on obtient : $-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$. Notons qu'il « manque » le résultat intermédiaire $1 < 2$, signe sans doute que le type de tâches T_3 est considéré comme routinier.

Trois des quatre moments cités précédemment sont réalisés ici à propos du type de tâches T' : moment de la première rencontre avec T', moment d'exploration de T' et d'élaboration d'une technique permettant de l'accomplir, moment d'institutionnalisation du type de tâches T' et d'éléments constituant la technique τ'.

Le travail se poursuit avec la correction de la question 6.

> « Ensuite, pour les questions 6a) et 6b), ce sont des applications de ce qu'on vient de voir... » Il appelle un élève au tableau. Celui-ci indique que $-2 < 5$; P lui fait expliquer pourquoi. On passe alors à –3,2 et –6,8 ; l'élève au tableau répond correctement, mais un élève conteste : 6,8 c'est plus grand que 3,2 ! P explique que les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0].
> L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

---

[1] Le résultat intermédiaire $-1 < 1$ n'est pas nécessaire ici en raison du résultat technologique « Tout nombre négatif est inférieur à un nombre positif donné », résultat qui se déduit immédiatement de celui énoncé : « De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif ».

P enchaîne sur la question 6b), demandant qui n'est pas passé au tableau. Une élève se propose. Elle vient, s'acquitte de sa tâche, pendant que P commente (après les négatifs on passe aux positifs, etc.). P : « Est-ce que tout le monde est d'accord avec ce rangement ? » Les élèves : « Oui ! »

Ainsi que l'indique P, la question 6 comporte des spécimens des types de tâches T et T', et on se situe ici dans un moment exploratoire des blocs pratico-techniques. On voit notamment, à propos du type de tâches T, coexister la technique τ et la variante que nous avions signalée plus haut, comme en témoigne le passage suivant :

L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

Ainsi que l'explication donnée par le professeur à la suite de l'intervention d'un élève : les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0]. On apprend également que les nombres relatifs à comparer seront des décimaux et pas uniquement des entiers comme le travail effectué jusqu'à présent pouvait le laisser penser.

Il s'agit aussi d'un moment d'évaluation de la praxéologie mathématique constituée, qui apporte réponse – partiellement sans doute – aux questions suivantes : les techniques élaborées à partir de spécimens portant sur les nombres entiers sont-elles encore valables ou doit-on les modifier ? A-t-on les éléments technologiques permettant de justifier les techniques mises en place et de les rendre intelligibles ? Sait-on les mettre en œuvre ?

Le travail se poursuit :

P : « Vous prenez votre cahier de cours. Vous rangez l'activité, on s'en resservira demain – il reste des choses à voir dessus. » Après quelques secondes : « Vous sautez une ligne, et vous écrivez... » :

2. Comparaison

Le silence s'est installé : les élèves écrivent. P reprend : « Pour la comparaison des nombres relatifs, on a vu qu'il nous manquait deux règles. Ce sont les règles qu'on a au tableau... Vous marquez ça sur votre cahier de cours. Vous écrivez en rouge, ou vous écrivez en bleu et vous encadrez en rouge *(il le fait au tableau, en encadrant en rouge)* »

Règle 1

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

Les élèves notent. P poursuit : « Avant de passer à la règle 2, on va mettre quelques exemples d'applications de cette règle... Tout le monde a fini de recopier ? » Des élèves : « Non !... » P : « On va mettre deux exemples d'application. Vous allez comparer... »

–2 ... 7,5
6,1 ... –4,7

P : « Vous comparez ces nombres avec les signes < et >. Alors qu'est-ce qu'on peut dire de –2 et 7,5 ? » Des élèves : « –2 est le plus petit. » P : « On est tous accord ! » De même pour le second couple.

P circule dans la classe, puis reprend : « Ensuite, il nous faut une deuxième règle. Vous écrivez donc en dessous *Règle 2*... Celle qui est écrite au tableau. Et vous encadrez en rouge ; ou vous écrivez en rouge. Comme vous voulez. » Le silence se fait. P commente : « Cette fois-ci ça concerne les nombres négatifs et comme tout à l'heure on mettra deux exemples d'application. » P reprend oralement la règle 2 pendant que les élèves la notent dans leur cahier de cours.

Petit répit. Puis, bien vite : « Vous avez terminé ? » En guise de réponse un petit brouhaha se fait entendre. « Alors dépêchez-vous !... » Bientôt P reprend, et fait un bilan : « Vous savez comparer tous les relatifs entre eux... » Un élève : « Alors elle est finie la leçon ? » P : « Il restera les opérations. Et sur la comparaison, on va faire des exercices d'application. Donc c'est pas terminé ! » Il poursuit : « Vous comparez... » :

–7,1 ... –12,6
–5,4 ... –1,7
Puis : « Alors, qu'est-ce qu'on peut dire ? » P dialogue avec un élève : on arrive à –7,1 > –12,6. « On les range dans l'ordre inverse de leur distance à 0 », commente P. Il sollicite un autre élève pour la deuxième comparaison, qui est rapidement menée à bien. P : « Bien... On a les deux règles qui permettent de comparer les nombres relatifs, je le répète. On va faire des exemples d'application que vous prenez sur votre cahier de cours. » Un élève demande confirmation : « Sur le cahier de cours », répète P, qui ajoute : « Vous prenez votre feuille d'exercices, exercices 5, feuille numéro 14 ».

Il s'agit là, clairement, d'un moment d'institutionnalisation de l'environnement technologico-théorique, ce que manifeste l'écriture dans le cahier de cours des deux règles de comparaison citées lors du travail à propos de l'activité, ainsi que des types de tâches T_1 et T_2 à travers deux tâches de chaque type. A la suite de la demande d'un élève, le professeur est amené à préciser que l'organisation mathématique relative à la comparaison des nombres relatifs est presque fixée, même si « on va faire des exercices d'application », annonçant ainsi sans doute un moment de travail des techniques mises en place qui fera vraisemblablement évoluer un peu la praxéologie mathématique constituée. Il annonce également la venue à l'existence d'une autre organisation mathématique locale, celle relative aux opérations sur les nombres relatifs.

Le processus d'étude de l'organisation mathématique se poursuit par des exercices qui seront faits sur le cahier de cours. Notons ici que ceci doit être assez inhabituel, car un élève en demande confirmation à P. Il s'agit de considérer la feuille numéro 14, et plus spécialement les exercices 5 et 6.

Les élèves découvrent l'exercice à faire : « C'est facile !... » P commente : « L'exercice 5, c'est un exercice de rangement dans l'ordre croissant [question 1], mais aussi dans l'ordre décroissant [question 2]. Alors, allez-y... » Le silence se fait. P : « N'oubliez pas de mettre des signes... » Une élève s'inquiète à nouveau de sa bonne compréhension de la consigne : « Dans le cahier de cours, à la suite ! », répète P. Un petit flottement se fait sentir, lié peut-être à des problèmes d'organisation. Les élèves s'affairent. P ne leur laisse guère de répit, et envoie un élève au tableau pour traiter la première question, le rangement des nombres –3, 5, –9, 0, –5, 8 dans l'ordre croissant. L'élève écrit :

5 f 14
–9 >

(La notation 5 f 14 désigne l'exercice 5 de la feuille d'exercices n°14.) Des élèves se récrient : « M'sieur, il s'est trompé ! » L'élève rectifie et continue. P commente, explique, justifie. Tout cela va très vite : une nouvelle élève est envoyée au tableau pour la deuxième question, le rangement des nombres –7, 6, –4, 0, –6, 5 dans l'ordre décroissant. P lui fait préciser le sens de cette expression (« Du plus grand au plus petit »), l'élève s'active en regardant sa feuille. Des élèves donnent à haute voix la suite des nombres à écrire. P leur demande de « laissez la personne au tableau faire l'exercice ». L'élève a fini. Elle retourne à sa place. P reprend : « Alors, ensuite vous allez faire le numéro 6, c'est la même chose mais cette fois-ci avec des nombres décimaux. Le numéro 6 en entier, 1 et 2 ». Le silence se fait. Les élèves s'affairent. Un élève appelle P, lui indique la différence qu'elle voit entre les exercices 5 et 6 : « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... » P approuve. Puis il arrête les élèves : « Vous allez noter également le travail à faire pour demain... »

Le travail effectué ici concerne le type de tâches T', qui se modifie et que l'on peut reformuler de la façon suivante : « Ranger (dans l'ordre croissant ou décroissant) une suite finie de nombres relatifs ». Il s'agit à la fois d'un moment de travail de la technique – on se met en main la technique τ' élaborée précédemment –, d'un moment d'évaluation de la technique et de ce qu'on est capable de faire à son propos : on retrouve ici ce que nous avions noté à propos du passage des entiers aux décimaux à travers la remarque d'un élève au professeur « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... ». Il s'agit encore d'un moment d'institutionnalisation du type de tâche *T'*, qui, on l'a vu, s'est un peu modifié à cette occasion.

Le professeur arrête l'étude en cours pour parler du travail à faire pour le lendemain :

> « Vous allez faire le 3 et le 4 de la feuille 14. Prenez votre feuille d'exercices, on va en dire un mot rapidement. » Il insiste : « S'il vous plaît ! Avant de passer à la correction du 6, on regarde ce qu'il y a à faire pour demain ! » Il explicite : « L'exercice 3, on a déjà fait ça. L'exercice 4, c'est différent... ». Il écrit :
>
> 3,2 <   < 3,3
>
> « Chaque fois il faut compléter par un nombre compris entre les deux. Ensuite, deuxième question, rapidement » :
>
> < 3,4 <
>
> « Il faut encadrer par deux entiers consécutifs. » P commente, explique, précise (« consécutifs », ça veut dire « qui se suivent »), conclut : « Je vous rappelle : pour demain, 3 et 4, et terminer le 6. » Il veut enchaîner avec la correction du début de l'exercice 6. Mais les élèves ont déjà commencé à ranger leurs affaires. La séance est terminée.

On voit apparaître dans l'exercice 4 deux nouveaux types de tâches, qui viendront enrichir l'organisation mathématique relative à la comparaison des nombres relatifs : il s'agit de « Déterminer un nombre compris entre deux entiers relatifs donnés » et « Encadrer un nombre relatif donné par deux entiers consécutifs ». Ces types de tâches sont simplement évoqués, et ce sera à l'élève de produire, à partir de l'organisation mathématique fabriquée en séance, une technique pour chacun des types de tâches cités, technique qui sera vraisemblablement justifiée et institutionnalisée lors de la correction des exercices.

2. Organisation mathématique et organisation didactique : un point de vue statique

2. 1. Organisation mathématique

L'organisation mathématique qui s'est mise en place sur le thème de la comparaison des nombres relatifs est une organisation *locale* comportant deux types de tâches, *T* « Soit *a* et *b* deux nombres relatifs ; comparer *a* et *b* » et *T'* « Ranger dans l'ordre croissant ou décroissant une suite finie de nombres relatifs ». Nous la présentons ci-après dans un tableau.

Types de tâches	Soit a et b deux nombres relatifs ; comparer a et b	Ranger dans l'ordre croissant ou décroissant une suite finie de nombres relatifs
Techniques	Si a et b sont positifs, c'est une tâche routinière qu'on sait accomplir. Si a et b sont de signes contraires, alors : si a est négatif, alors $a < b$; sinon, $a > b$. Si a et b sont négatifs, alors si a a la plus grande distance à zéro, alors $a < b$; sinon $a > b$.	Dans l'ordre croissant, on considère les nombres négatifs $a_1, \dots a_p$. On détermine celui qui a la plus grande distance à zéro, a_{i_1}, c'est le plus petit. On écrit $a_{i_1} <$. On recommence l'opération avec les nombres négatifs $\{a_1, \dots a_p\} \setminus \{ a_{i_1} \}$. Quand on a épuisé les nombres négatifs, on range les nombres positifs dans l'ordre croissant et on les écrit à la suite.
Technologie	De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif. Moins zéro égal plus zéro. De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro. Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro.	

On peut observer que le niveau de la théorie n'est pas apparu lors de la construction de cette praxéologie mathématique, que la technique relative au type de tâche *T'* est restée largement implicite, notamment en ce qui concerne le rangement dans l'ordre décroissant qui est considéré comme allant de soi, et que le résultat technologique « Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro » n'a pas été institutionnalisé par écrit.

2.2 Organisation didactique

Pour décrire d'un point de vue statique la praxéologie didactique observée, qui permet à la praxéologie mathématique décrite précédemment de se construire, nous partirons des moments de l'étude qui y sont réalisés (types de tâches didactiques) et de leur mode de réalisation (technique). Signalons que, de par la nature du corpus de données, nous n'avons pas accès ici au bloc technologico-théorique – bien que, sur certains points, il serait possible d'en restituer des fragments.

2.2.1. Le moment de la première rencontre – Nous avons vu ce moment apparaître en deux occasions à propos des types de tâches *T* et *T'* : c'est l'activité de comparaison des températures et son accomplissement par les élèves qui permet au professeur de faire rencontrer ces deux types de tâches. Ce moment de première rencontre est une tâche coopérative, le travail des élèves, représentés plus particulièrement par celui qui est au tableau, servant de support au professeur pour matérialiser ce moment : « P fait alors un bilan : "Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous." ».

2.2.2. Le moment exploratoire – Il apparaît dans un premier temps fortement lié au moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique, cet aspect « naturel » étant renforcé dans la praxéologie observée par le fait que les techniques ne sont que peu ou pas institutionnalisées par le professeur. C'est pour l'essentiel le travail de la question 6 de l'activité qui permet à ce moment de se réaliser, à partir d'un corpus constitué de huit spécimens du type de tâches *T* et d'un spécimen du type de tâches *T'*. Là encore, il y a coopération entre le professeur et les élèves, les élèves se situant nettement du côté du bloc pratico-technique (ils mettent en œuvre la – ou une des – technique(s) permettant d'accomplir le type de tâches) alors que le professeur est clairement du côté du bloc technologico-théorique (il intervient pour donner des éléments justificatifs des gestes techniques accomplis).

2.2.3. Le moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique – Encore une fois, ce type de tâches est coopératif : nous avons vu, par exemple, que la formulation des deux règles se fait par les élèves, sous la direction relativement souple du professeur qui reprend leurs énoncés. Mais c'est le professeur qui prend l'initiative de ce moment, ce que traduit notamment dans le travail sur la question 2 de l'activité son intervention : « Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? ». C'est là encore l'activité, et notamment l'étude des questions 2, 3, 4 et 5, qui sert de support à ce moment.
On peut supposer que ce mode de réalisation des trois moments précédents, qui prend appui sur la réalisation par les élèves d'une activité, est un trait générique de la praxéologie didactique observée.

2.2.4. Le moment de l'institutionnalisation – Nous pouvons presque dire que ce moment d'institutionnalisation est partout dense dans le travail effectué. C'est pour l'essentiel le professeur qui est l'acteur de ce moment, qu'il réalise à la fois par écrit et par oral. Ce sont, de façon privilégiée, les types de tâches et les techniques – ou plutôt des éléments des techniques, les techniques étant peu institutionnalisées – qui sont institutionnalisés oralement et les éléments technologiques qui le sont par écrit. Ces derniers sont d'ailleurs notés deux fois, on l'a vu : une première fois lors du travail sur l'activité qui en permet l'émergence, une deuxième fois dans le cours. La encore, on peut supposer que ce sont des traits génériques de l'organisation didactique mise en place par le professeur.

2.2.5. Le moment de l'évaluation – Ce moment apparaît réalisé lors de la correction de l'activité ou des exercices que les élèves ont à faire. Les commentaires du professeur lors de ces épisodes montrent que la fonction d'évaluation des rapports personnels des élèves à la praxéologie mathématique en construction est seconde par rapport à celle de l'évaluation de la praxéologie mathématique elle-même. Il est donc pour l'essentiel ici un sous-moment du moment de l'institutionnalisation.

2.2.6. Le moment du travail de la technique – Ce moment est peu présent dans le corpus étudié : il n'apparaît qu'en fin de séance, à propos du type de tâches *T'*, de manière trop brève pour que nous puissions en parler significativement.

Pour terminer cet instantané de la praxéologie didactique observée, nous noterons quelques aspects génériques, ou que l'on peut supposer tels, de cette praxéologie concernant les rôles respectifs du professeur et de l'élève. C'est le professeur qui dirige l'étude, en particulier c'est lui qui décide de la succession des moments, du passage d'un moment à l'autre ; les élèves suivent les directions du professeur, passent au tableau et plus généralement produisent l'activité mathématique qui servira de matière première dans l'étude engagée. Le professeur dirige également, à partir du système didactique principal constitué par la classe, le travail des élèves dans un des systèmes didactiques auxiliaires, représenté par le travail à la maison : on voit ainsi, à la fin de la séance, le professeur commenter les exercices à faire pour le lendemain.

3. Evaluation de l'organisation mathématique

Nous nous plaçons ici dans la perspective exposée par Yves Chevallard dans son cours[3], à savoir l'évaluation de l'organisation mathématique que nous avons observée et analysée précédemment en vue de développer une organisation mathématique à partir de celle qui nous était présentée. Ajoutons que cette évaluation prend appui sur les critères d'évaluation développés dans le cours, cités en italique ; qu'elle utilise, bien entendu, les éléments de l'analyse effectuée ; qu'elle est relative à l'observation effectuée : certaines des assertions se trouveraient peut-être infirmées si nous avions accès à l'ensemble du processus d'étude de cette organisation mathématique.

3.1. Evaluation des types de tâches

Critère d'identification. – Les types de tâches T_i sont-ils clairement dégagés et bien identifiés ? En particulier, sont-ils représentés par des corpus K_i effectivement disponibles de spécimens suffisamment nombreux et adéquatement calibrés ? Ou au contraire ne sont-ils connus que par quelques spécimens peu représentatifs ?

Nous avons mis en évidence dans l'analyse que les deux types de tâches considérés sont clairement identifiés : ils sont notamment nommés par le professeur. Les corpus K et K' sur lesquels on voit travailler les élèves paraît adéquatement calibré principalement quant aux ensembles de nombres concernés : les entiers et les décimaux (non entiers) sont représentés. On peut dénombrer douze spécimens du premier type de tâches, mais trois seulement du second type de tâches (deux dans l'ordre croissant et un dans l'ordre décroissant) : le corpus K' est donc trop peu important.

Critère des raisons d'être. – Les raisons d'être des types de tâches T_i sont-elles explicitées ? Ou au contraire ces types de tâches apparaissent-ils immotivés ?

Les raisons d'être des types de tâches *T* et *T'* ne sont pas explicitées. Les questions « A quoi

---

[3] Voir Leçon 3, paragraphe 1.1.

sert la comparaison de deux nombres relatifs ? » « A quoi sert le rangement (dans l'ordre croissant ou décroissant) d'une suite de nombres relatifs ?» en particulier ne sont pas posées et restent donc sans réponse. L'activité de comparaison de températures ne saurait constituer une réponse en acte à ces questions puisqu'elle sert, dans l'organisation didactique réalisée, à produire la technique mathématique de comparaison.

Critère de pertinence. – Les types de tâches considérés fournissent-ils un bon découpage relativement aux situations mathématiques les plus souvent rencontrées ? Sont-ils pertinents au regard des besoins mathématiques des élèves, pour aujourd'hui ? Pour demain ? Ou au contraire apparaissent-ils comme des « isolats » sans lien véritable – ou explicite – avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ?

La pertinence des types de tâches étudiés est étroitement liée aux raisons d'être de ces types de tâches dans la mesure où l'explicitation de raisons d'être permet de faire un « lien avec le reste de l'activité (mathématique et extramathématique) des élèves ». L'absence d'explicitation des raisons d'être ici conduit donc les types de tâches considérés à apparaître comme des isolats. Cependant, il n'en reste pas moins qu'ils sont pertinents au regard des besoins mathématiques, « immédiats » et à venir, des élèves. Citons, à cet égard, le titre **4. Initiation à la résolution d'équations** du paragraphe **B-Travaux numériques** du programme de cinquième :

Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.

Les programmes prévoient une initiation très progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter l'écueil connu d'apprentissages aboutissant à la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de 5e correspond à une étape importante dans l'acquisition du sens, avec la présentation d'égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner. Par exemple, dans l'étude d'une situation conduisant à une égalité telle que $3y = 4x + 2$, on sera amené à en tester la véracité pour diverses valeurs de x et y.
Les expressions qui figurent de part et d'autre du signe d'égalité jouent ici le même rôle. On travaillera aussi avec des inégalités dans des cas simples, sans pour autant que cette activité donne lieu à des compétences exigibles.

Plus généralement le travail algébrique, qui constitue l'un des principaux enjeux didactiques du collège, suppose que l'on sache comparer des nombres décimaux relatifs. Ce lien entre la comparaison des nombres décimaux relatifs et le travail algébrique n'est cependant pas présent dans la praxéologie mathématique mise en place par le professeur. On voit poindre ici une voie de développement de l'organisation mathématique considérée, qui permettrait à la fois d'en faire apparaître des raisons d'être et d'en rendre lisible la nécessité pour le travail mathématique mené en cinquième et à venir.

3.2. Evaluation des techniques

Les techniques proposées sont-elles effectivement élaborées, ou seulement ébauchées ? Sont-elles faciles à utiliser ? Leur portée est-elle satisfaisante ? Leur fiabilité est-elle acceptable étant *donné leurs conditions d'emploi ? Sont-elles suffisamment intelligibles ? Ont-elles un avenir, et pourront-elles évoluer de manière convenables ?*

La technique τ relative au type de tâche T apparaît effectivement élaborée, même si, on l'a noté, elle n'est pas institutionnalisée par écrit : le découpage en trois sous-types de tâches est clairement effectué, chacun des sous-types de tâches se voyant attribuer une technique. La technique τ repose dans une large mesure sur la technique de comparaison de deux décimaux positifs, que les élèves ont étudiée au primaire et qui est sans doute pour la grande majorité d'entre eux routinière. Elle apparaît dans l'observation effectuée facile à utiliser pour les élèves et sa portée ainsi que sa fiabilité apparaissent satisfaisante.

La technique τ' relative au type de tâche T' apparaît en revanche peu élaborée – et même pas du tout dans le cas du rangement décroissant : seuls des fragments de cette technique sont institutionnalisés. De plus, cette technique n'est pas très facile d'emploi ni très fiable : elle suppose, si on la suit à la lettre, dans le cas d'un rangement croissant, de déterminer le plus petit nombre négatif d'une suite de nombres négatifs en cherchant celui qui a la plus grande distance à zéro, et de répéter cette opération $n - 1$ fois si la suite comporte n termes. Une technique alternative, plus fiable parce qu'elle repose sur un type de tâche routinier « ranger des nombres positifs », aurait été de déterminer les distances à zéros des nombres négatifs en jeu, puis ranger ces distances à zéros dans l'ordre inverse de celui demandé, et inverser le rangement pour obtenir le rangement des nombres négatifs considérés comme le montre l'exemple suivant :

Tâche $t \in T'$: ranger dans l'ordre croissant –3, 5, –9, 0, –5, 8.
Technique : la distance à zéro de –3 est 3, celle de –9 est 9 et celle de –5 est 5.
On a $9 > 5 > 3$, donc $-9 < -5 < -3$.
Comme $0 < 5 < 8$, il vient $-9 < -5 < -3 < 0 < 5 < 8$.

3.3. Evaluation des technologies

Etant donné un énoncé, le problème de sa justification est-il seulement posé ? Ou bien cet énoncé est-il considéré tacitement comme allant de soi, évident, naturel, ou encore bien connu ("folklorique") ? Les formes de justification utilisées sont-elles proches des formes canoniques en mathématiques ? Sont-elles adaptées à leurs conditions d'utilisation ? Les justifications explicatives sont-elles favorisées ? Les résultats technologiques rendus disponibles sont-ils effectivement et optimalement exploités ?

S'il y a, dans la praxéologie mathématique considérée, des assertions technologiques, le problème de leur justification est peu posé : c'est l'activité de comparaison des températures qui permet de les produire sans qu'elle constitue une véritable justification expérimentale de ces énoncés. Ces assertions sont cependant utilisées pour justifier, expliquer, les techniques mises en place – et c'est le professeur, nous l'avons vu, qui prend en charge cette fonction. Cependant, l'assertion utilisée par le professeur pour justifier la comparaison de deux nombres négatifs est, principalement, l'assertion : « Les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. », qui n'a pas été institutionnalisée par écrit. Pourtant, c'est bien elle qui est la plus adaptée au travail effectué, notamment parce qu'elle produit des techniques reposant sur le rangement des nombres positifs, tâche routinière pour les élèves. En particulier, c'est ce résultat technologique qui permet de justifier la technique que nous avons exposée ci-dessus concernant le rangement des nombres relatifs.

4. Pour conclure

Nous avons mentionné, à propos de l'évaluation de l'organisation mathématique, le lien – manquant dans la praxéologie observée – avec le travail algébrique. Nous retrouvons ici un trait du processus de transposition didactique de l'algèbre et des systèmes de nombres au collège à propos duquel Yves Chevallard écrivait en 1989 [4] :

> Le problème didactique étudié – la place et le rôle du calcul algébrique au collège – conduit inévitablement à la question des systèmes de nombres. Nous verrons qu'il existe entre l'un et l'autre problèmes un lien nécessaire et incontournable, que la solution « empiriste actuelle tend simplement à occulter, en dépit des effets négatifs qui en résultent.
>
> Le problème didactique de la construction des différents systèmes de nombres est au cœur du curriculum du collège. C'est, objectivement, un problème difficile, devant lequel certains parmi les meilleurs ont pu reculer et dont on peut penser qu'il n'a pas reçu jusqu'à présent de solution satisfaisante. De cette pathologie du curriculum, la situation que nous avons évoquée à propos des systèmes numériques (leur prolifération, et cette « cancérisation » du corpus enseigné qu'elles réalisent) constitue l'un des symptômes les plus frappants.
>
> Nous essaierons de montrer que le problème du calcul algébrique, de sa construction formelle comme de ces emplois, lui est doublement lié. D'une part, en effet, les systèmes de nombres fournissent les domaines de calcul sur la base desquels s'élèvera le calcul algébrique, ainsi qu'on l'a déjà souligné. Mais, d'autre part, *le calcul algébrique constituera le **mobile** essentiel, et l'**outil** fondamental de la construction des systèmes de nombres successifs.*

A cet égard, le curriculum réel a peu changé depuis la fin des années 80, bien qu'aujourd'hui, dans les programmes de collège, l'initiation à l'algèbre soit inscrite dès la sixième et que, donc, rien n'interdise que les systèmes de nombres soient construits par le calcul algébrique. On peut noter, de plus, que, dans le cas des fractions, le programme de sixième écrit :

> Les activités poursuivies en sixième s'appuient sur deux idées :
>
> – le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre,
>
> – le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a.

Le lien entre système de nombres et calcul algébrique est donc ici signalé ($\frac{a}{b}$ est la solution de l'équation $bx = a$) mais il est insuffisamment explicité pour que, étant donné l'état du curriculum, les professeurs puissent l'exploiter pour la construction des fractions et la démonstration des propriétés de ce système de nombres. En ce qui concerne les nombres relatifs, rien de semblable n'est mentionné, alors que, semblablement, les nombres négatifs sont engendrés comme solution des équations $a + x = 0$, avec a positif. Cette construction des nombres négatifs à l'aide du calcul algébrique permettrait, comme dans le cas des fractions, de justifier les assertions technologiques que nous avons vu à l'œuvre dans l'organisation mathématique observée.

> Ainsi, considérons le résultat : de deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro. Soit donc les deux nombres négatifs définis par $a + x = 0$ et $b + x' = 0$ avec $a > b > 0$. Alors $a + x = b + x'$ et donc $a - b = x' - x$. Comme $a > b$, $a - b > 0$, et donc $x' - x > 0$, soit $x' > x$.

Bien entendu, cela supposerait la construction d'organisations didactiques adaptées : c'est précisément ce type de travail que l'on peut conduire dans une perspective de développement.

[4] Chevallard Y. (1989), « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie, Perspectives curriculaires : la notion de modélisation », *petit x n°19*, pp. 43-72, page 50. C'est nous qui soulignons.

ANNEXE

COMPTE RENDU D'OBSERVATION EN CLASSE

La classe observée est une Cinquième de 28 élèves, décrite par P comme disciplinée mais assez fortement hétérogène. La séance observée a eu lieu le jeudi 20 mars 1997, de 10h à 11h. Plusieurs élèves étaient ce jour-là absents pour préparer le spectacle de fin d'année (destiné notamment à attirer les parents d'élèves des CM2 des environs).

P rappelle que les mâcheurs de gomme doivent passer par la poubelle avant de rejoindre leur place – ainsi que le prévoit le règlement intérieur de l'établissement. Puis il présente la séance : « Bien ! Le programme de la séance d'aujourd'hui... On va terminer l'activité sur les nombres relatifs faite lundi. On va en déduire des règles de comparaison qu'on marquera sur le cahier de cours. Vous prenez votre cahier d'exercices, on va corriger... »

Des élèves arrivent. P poursuit : « Je vous rappelle au tableau les données de l'exercice, c'est-à-dire les températures des villes A, B, C, D, E, F » (voir l'encadré, page suivante). Il écrit :

A	B	C	D	E	F
–3	1	–4	–1	6	2

Après avoir rappelé les réponses à la question 2, P précise qu'il s'agissait de répondre aux questions 3 à 6 ; il désigne un élève pour corriger la question 3 et commente : « Il s'agissait de comparer les villes A et C. Où est-ce qu'il fait plus froid ? » P parle d'une voix forte et distincte qui s'impose comme une chape sonore. Entre-temps l'élève a écrit les réponses demandées :

3a) $-4 < -3$

3b) $-4 < -1$

3c) $-3 < -1$

Un nouvel élève est appelé pour traiter la question 4 : il donne des réponses correctes, en utilisant systématiquement la question « Où est-ce qu'il fait plus froid ? »

ACTIVITÉ

On a mesuré la température dans plusieurs villes :

Ville	A	B	C	D	E	F
Température en degrés	–3	1	–4	–1	6	2

1) Représenter les températures sur une droite graduée (un carreau représentant une unité).
2a) Fait-il plus froid dans la ville A ou dans la ville B ? Comparer leur température.
2b) Comparer les températures des villes B et C.
2c) Même question avec les villes D et F.
3a) Comparer les températures des villes A et C.
3b) Même question avec les villes C et D.
3c) Même question avec les villes A et D.
4a) Comparer les températures des villes B et E.
4b) Même question avec les villes E et F.
5) Ranger les températures de la plus basse à la plus haute.

6a) Compléter par < ou >

$-2 \ldots 5$ $-3{,}2 \ldots -6{,}8$ $7 \ldots -5{,}2$ $6{,}5 \ldots 4{,}7$

$-14 \ldots -2{,}5$ $5{,}3 \ldots -6{,}9$ $3{,}3 \ldots 8{,}2$ $-1{,}1 \ldots -1{,}01$

6b) Ranger par ordre croissant :

-1 ; $4{,}5$; $-2{,}6$; $-3{,}4$; $7{,}8$; 9 ; $-12{,}5$

P fait alors un bilan : « Dans la question 2, on compare des nombres négatifs et des nombres positifs. Dans la question 3, on compare des nombres négatifs. C'est nouveau pour vous. Bon, dans la question 2, qu'est-ce qui se passe ? » Une élève : « Un nombre sans signe c'est plus grand qu'un nombre négatif. » Un élève rappelle le cas particulier de zéro ; P reprend cette remarque : « On a vu que *moins* zéro et *plus* zéro, c'est égal. » P : « À la question 2, après avoir fait la comparaison, on obtient la règle... à mettre sur le cahier de cours... » À la demande de P, des élèves énoncent la règle en question. P reprend leur formulation et l'écrit au tableau :

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

On passe à la question 3. P : « Qu'est-ce qu'on compare ? » Des élèves : « Des nombres négatifs. » P : « Et alors ? » Un élève : « Le chiffre le plus près de 0, ça donne la distance. » Un élève, avec l'aide de P : « Celui qui a la distance à 0 la plus petite est le plus grand. » Un autre élève intervient : « C'est l'ordre inverse de la distance à 0. » P approuve : « On peut écrire la propriété de deux manières. » Des élèves : « La première, c'est plus facile ! » P : « On va écrire la première... » Après une petite préparation orale, P met au tableau la formulation attendue, tout en signalant aux élèves qu'ils doivent l'écrire « à droite des réponses de la question 3 » :

De deux nombres négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.

Un débat s'ensuit. « On pourrait dire *le plus grand est celui qui a la plus petite distance à* 0 » affirment plusieurs élèves. P approuve mais ajoute : « Comme dans la règle précédente on a dit *le plus petit*, on continue ici. » Les élèves notent. P : « On pourrait dire aussi, comme l'a dit votre camarade, que les nombres négatifs se rangent dans l'ordre inverse de leur distance à zéro. »

Il presse les élèves d'avancer – « Tout le monde a noté ? » – et poursuit : « Pour la question 4, est-ce que c'est quelque chose de nouveau pour vous ? » Les élèves : « Non ! » P : « Est-ce que nous sommes capables de comparer les nombres relatifs ? » Les élèves : « Oui. » P poursuit : « Question 5... Maintenant qu'on sait comparer les nombres deux à deux, on sait ranger les nombres relatifs... » P appelle un élève au tableau, l'interroge. L'élève indique qu'on commence par les nombres négatifs. P lui demande de préciser. L'élève écrit -4. P commente : « Il commence par le plus petit... » L'élève a continué d'écrire :

$$-4 < -3 < -1 < 1 < 2 < 6$$

P commente : « Une fois qu'on a épuisé les négatifs on s'attaque aux positifs.... » Puis : « Ranger les températures de la plus basse à la plus haute, ça correspond à ranger les nombres... Dans quel ordre ? » Un élève : « Croissant. » P reprend cette réponse, en l'explicitant à l'intention d'un élève qui semble ne pas comprendre : « Du plus petit au plus grand. » Il l'écrit :

rangement dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand)

Puis il enchaîne : « Ensuite, pour les questions 6a) et 6b), ce sont des applications de ce qu'on vient de voir... » Il appelle un élève au tableau. Celui-ci indique que $-2 < 5$; P lui fait expliquer pourquoi. On passe alors à $-3{,}2$ et $-6{,}8$; l'élève au tableau répond correctement, mais un élève conteste : 6,8 c'est plus grand que 3,2 ! P explique que les négatifs se rangent « dans l'ordre inverse » [de la distance à 0].

L'élève au tableau a continué. Il hésite un instant sur la comparaison de –1,4 et –2,5 : il écrit d'abord les deux nombres à comparer, en laissant un espace entre eux, puis place le signe convenable en recherchant celui dont la distance à 0... S'agissant du dernier couple, il apparaît que l'élève a mémorisé les nombres à comparer, –1,1 et –1,01 ! Il indique que 1,1 c'est 1,10, ce qui est plus grand que 1,01, etc.

P enchaîne sur la question 6b), demandant qui n'est pas passé au tableau. Une élève se propose. Elle vient, s'acquitte de sa tâche, pendant que P commente (après les négatifs on passe aux positifs, etc.). P : « Est-ce que tout le monde est d'accord avec ce rangement ? » Les élèves : « Oui ! » P : « Vous prenez votre cahier de cours. Vous rangez l'activité, on s'en resservira demain – il reste des choses à voir dessus. » Après quelques secondes : « Vous sautez une ligne, et vous écrivez... » :

2. Comparaison

Le silence s'est installé : les élèves écrivent. P reprend : « Pour la comparaison des nombres relatifs, on a vu qu'il nous manquait deux règles. Ce sont les règles qu'on a au tableau... Vous marquez ça sur votre cahier de cours. Vous écrivez en rouge, ou vous écrivez en bleu et vous encadrez en rouge *(il le fait au tableau, en encadrant en rouge)* »

Règle 1

De deux nombres de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif

Les élèves notent. P poursuit : « Avant de passer à la règle 2, on va mettre quelques exemples d'applications de cette règle... Tout le monde a fini de recopier ? » Des élèves : « Non !... » P : « On va mettre deux exemples d'application. Vous allez comparer... »

–2 ... 7,5
6,1 ... –4,7

P : « Vous comparez ces nombres avec les signes < et >. Alors qu'est-ce qu'on peut dire de –2 et 7,5 ? » Des élèves : « –2 est le plus petit. » P : « On est tous accord ! » De même pour le second couple.

P circule dans la classe, puis reprend : « Ensuite, il nous faut une deuxième règle. Vous écrivez donc en dessous *Règle 2*... Celle qui est écrite au tableau. Et vous encadrez en rouge ; ou vous écrivez en rouge. Comme vous voulez. » Le silence se fait. P commente : « Cette fois-ci ça concerne les nombres négatifs et comme tout à l'heure on mettra deux exemples d'application. » P reprend oralement la règle 2 pendant que les élèves la notent dans leur cahier de cours.

Petit répit. Puis, bien vite : « Vous avez terminé ? » En guise de réponse un petit brouhaha se fait entendre. « Alors dépêchez-vous !... » Bientôt P reprend, et fait un bilan : « Vous savez comparer tous les relatifs entre eux... » Un élève : « Alors elle est finie la leçon ? » P : « Il restera les opérations. Et sur la comparaison, on va faire des exercices d'application. Donc c'est pas terminé ! » Il poursuit : « Vous comparez... » :

–7,1 ... –12,6
–5,4 ... –1,7

Puis : « Alors, qu'est-ce qu'on peut dire ? » P dialogue avec un élève : on arrive à –7,1 > –12,6. « On les range dans l'ordre inverse de leur distance à 0 », commente P. Il sollicite un autre élève pour la deuxième comparaison, qui est rapidement menée à bien. P : « Bien... On a les deux règles qui permettent de comparer les nombres relatifs, je le répète. On va faire des exemples d'application que vous prenez sur votre cahier de cours. » Un élève demande confirmation : « Sur le cahier de cours », répète P, qui ajoute : « Vous prenez votre feuille d'exercices, exercices 5, feuille numéro 14 ».

Les élèves découvrent l'exercice à faire : « C'est facile !... » P commente : « L'exercice 5, c'est un exercice de rangement dans l'ordre croissant [question 1], mais aussi dans l'ordre décroissant [question 2]. Alors, allez-y... » Le silence se fait. P : « N'oubliez pas de mettre des signes... » Une élève s'inquiète à nouveau de sa bonne compréhension de la consigne : « Dans le cahier de cours, à la suite ! », répète P. Un petit flottement se fait sentir, lié peut-être à des problèmes d'organisation. Les élèves s'affairent. P ne leur laisse guère de répit, et envoie un élève au tableau pour traiter la première question, le rangement des nombres –3, 5, –9, 0, –5, 8 dans l'ordre croissant. L'élève écrit :

5 f 14

–9 >

(La notation 5 f 14 désigne l'exercice 5 de la feuille d'exercices n°14.) Des élèves se récrient : « M'sieur, il s'est trompé ! » L'élève rectifie et continue. P commente, explique, justifie. Tout cela va très vite : une nouvelle élève est envoyée au tableau pour la deuxième question, le rangement des nombres –7, 6, –4, 0, –6, 5 dans l'ordre décroissant. P lui fait préciser le sens de cette expression (« Du plus grand au plus petit »), l'élève s'active en regardant sa feuille. Des élèves donnent à haute voix la suite des nombres à écrire. P leur demande de « laissez la personne au tableau faire l'exercice ». L'élève a fini. Elle retourne à sa place. P reprend : « Alors, ensuite vous allez faire le numéro 6, c'est la même chose mais cette fois-ci avec des nombres décimaux. Le numéro 6 en entier, 1 et 2 ». Le silence se fait. Les élèves s'affairent. Un élève appelle P, lui indique la différence qu'elle voit entre les exercices 5 et 6 : « Cette fois on passe aux décimaux. Donc la comparaison s'effectue aussi sur la partie décimale... » P approuve. Puis il arrête les élèves : « Vous allez noter également le travail à faire pour demain... » « Oh !... » « Vous allez faire le 3 et le 4 de la feuille 14. Prenez votre feuille d'exercices, on va en dire un mot rapidement. » Il insiste : « S'il vous plaît ! Avant de passer à la correction du 6, on regarde ce qu'il y a à faire pour demain ! » Il explicite : « L'exercice 3, on a déjà fait ça. L'exercice 4, c'est différent... ». Il écrit :

3,2 <   < 3,3

« Chaque fois il faut compléter par un nombre compris entre les deux. Ensuite, deuxième question, rapidement » :

< 3,4 <

« Il faut encadrer par deux entiers consécutifs. » P commente, explique, précise (« consécutifs », ça veut dire « qui se suivent »), conclut : « Je vous rappelle : pour demain, 3 et 4, et terminer le 6. » Il veut enchaîner avec la correction du début de l'exercice 6. Mais les élèves ont déjà commencé à ranger leurs affaires. La séance est terminée.

ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ ET MODÉLISATION ALGÉBRIQUE

Gisèle Cirade & Yves Matheron
IREM & IUFM d'Aix-Marseille

Avertissement au lecteur

L'analyse des organisations mathématique et didactique ainsi que l'évaluation de l'organisation mathématique que le lecteur trouvera ici ne suivent pas la présentation qui a été adoptée lors des séances de visite d'Atelier et de TD de l'Université d'été. Dans un souci de clarté, nous avons préféré présenter tout d'abord les analyses faites à partir du compte rendu, puis celles relatives aux traces écrites de l'activité d'une classe. Ces analyses s'appuient sur les notions théoriques présentées dans le cours donné par Yves Chevallard, qu'il faut donc avoir au préalable étudié.

Le lecteur qui désire tirer profit des analyses qui suivent doit savoir qu'il est nécessaire de s'engager dans un travail exigeant, la simple lecture du corpus et de son analyse ne nous paraissant pas suffisante pour une bonne compréhension des phénomènes. Nous proposons le mode de travail suivant :

- Prendre connaissance du corpus.
- Prendre connaissance de l'analyse des organisations mathématique et didactique, ainsi que de l'évaluation de l'organisation mathématique, celles-ci ne pouvant prendre leur sens que par référence au corpus considéré.
- Relire le corpus à la lumière des éléments d'analyse qui sont proposés.

Pour chacune des parties analysées, figurent trois paragraphes :

A – Organisation mathématique.
B – Organisation didactique.
C – Évaluation de l'organisation mathématique.

Nous avons choisi d'illustrer notre propos par des extraits du compte rendu d'observation et des traces écrites de l'activité d'une classe. Ceux-ci figurent en retrait et en caractères plus petits.

Dans les pages qui suivent figurent les éléments essentiels du corpus (pages 218 à 249) sur lequel nous avons travaillé lors de l'Université d'été. On trouvera ensuite les analyses portant sur le compte rendu d'observation et sur les traces écrites de l'activité d'une classe.

COMPTE RENDU D'OBSERVATION EN CLASSE DE QUATRIEME

Structure et contenu de la séance

- Relevé des devoirs faits à la maison.
- Correction des exercices faits à la maison :
  1. Résoudre l'équation : $-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$.
  2. Résoudre l'équation : $\dfrac{x}{3}-1=x-\dfrac{6}{13}-\left(\dfrac{-2x}{13}\right)$.
- Cours : III – Résolution de problèmes
- Distribution d'une fiche d'exercices, dont le premier est à faire pour la séance suivante.

On rencontre ici les deux types de tâches T et T' suivants :
T : Résoudre une équation du premier degré.
T' : Résoudre un problème du premier degré.

Étude du type de tâches T (première partie du compte rendu, pages 218, 219 et 220)

A – <u>Organisation mathématique</u>

Type de tâches étudié
T : Résoudre une équation du premier degré.
Les exercices constituent deux tâches t^1 et t^2 qui relèvent de ce type de tâches :
t^1 : Résoudre l'équation : $-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$.
t^2 : Résoudre l'équation : $\dfrac{x}{3}-1=x-\dfrac{6}{13}-\left(\dfrac{-2x}{13}\right)$.
On peut remarquer que dans l'exercice 1 les coefficients appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors que dans l'exercice 2 ils appartiennent à $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Technique d'étude utilisée
La technique utilisée pour étudier le type de tâches T induit un découpage en sous-tâches qui relèvent des types de tâches suivants :
T_1 : Développer une expression algébrique.
T_2 : Effectuer les produits.
T_3 : Transposer les termes.
T_4 : Réduire chacun des membres.
T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax=b$.
Ce découpage peut sembler arbitraire. Il ne faut cependant pas oublier qu'il s'agit là d'un modèle : les sous-tâches considérées sont d'une certaine dimension et ce découpage permet de mettre correctement en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer.

Remarque concernant le type d'organisation mathématique
La décomposition de la tâche t considérée en sous-tâches t_1, …, t_5 peut conduire à considérer une organisation mathématique *régionale*, l'élément fixe étant la théorie Θ : « Les équations algébriques à coefficients dans $\mathbb{Q}$ ». C'est une modélisation possible, mais il semble plus pertinent d'en rester au stade d'une organisation mathématique *ponctuelle*, les sous-tâches indiquées ci-dessus apparaissant comme secondes par rapport au problème considéré.

L'élément théorique Θ : « Les équations algébriques à coefficients dans **Q** », valable pour tous les types de tâches T, T_1, …, T_5 ne sera plus précisé par la suite.

Type de tâches T_1 : Développer une expression algébrique.

- Il s'agit ici de supprimer les parenthèses dans chacun des membres de l'équation :

> P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses… » [page 218]

- La technique utilisée s'appuie sur les résultats technologiques que sont les règles usuelles de calcul dans **Q**, en particulier la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Type de tâches T_2 : Effectuer les produits

- Il s'agit de calcul de *produits* – comme $8\times 3 = 24$ et $4 \times 5x = 20x$ – visant à supprimer le signe « × » dans les deux membres de l'équation :

> S'adressant ensuite à la classe : « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple… On va pas laisser 8 fois 3. » Une élève : « Non, 24, on marque –24 » [page 218]

- Éléments technologiques : produit de deux nombres dans **Q** et associativité de la multiplication.

Type de tâches T_3 : Transposer les termes

- La tâche considérée consiste à transposer les termes en x à gauche et les termes constants à droite :

> P : « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire… » Sous l'œil vigilant de P, qui la conseille pas à pas, l'élève rassemble les termes en x dans le membre de gauche et les termes indépendants à droite. [page 219]

- Élément technologique : tout élément de **Q** est régulier pour l'addition, $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c$.

Type de tâches T_4 : Réduire chacun des membres

- L'étape suivante consiste à obtenir une équation de la forme $ax = b$; à droite, il s'agit d'un simple calcul numérique :

> P : « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?… » L'élève : « $16x$ » P : « Moins $20x$? Combien j'en ai ? » […] Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit : « $-4x = 61$ » [page 219]

- Élément technologique : la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Type de tâches T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax = b$

- La technique n'est pas détaillée. On passe directement de $-4x = 61$ à $x = -\frac{61}{4}$. On pourrait décomposer cette sous-tâche en de nouvelles sous-tâches, en introduisant une étape supplémentaire comme par exemple $-4x = 61 \Leftrightarrow x = \frac{61}{-4} \Leftrightarrow x = -\frac{61}{4}$. Cependant cela n'apparaît pas pertinent ici : la technique d'étude semble routinisée.
- Élément technologique : « Si $a \neq 0$, l'équation $ax = b$ admet une solution et une seule : $x = b / a$ ».

Quelques remarques concernant la technique d'étude utilisée et sa technologie

Une élève propose une petite variation qui consiste à effectuer, dans l'ordre, T_1 / T_2 / T_4 / T_3 / T_4 / T_5 (on réduit chacun des membres avant la transposition des termes en x et des termes constants). La professeur valide la réponse de cette élève :

> « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper. Si vous voulez commencer ici [elle montre la troisième ligne], c'est bon aussi. Si vous voulez écrire $16x - 31 =$…, c'est pareil ! » [page 219]

Par ailleurs, dans la discussion qui s'engage avec la classe lors de la correction du 2^e exercice, la professeur mentionne :

> « […] Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax + b = cx + d$, et pour se ramener à ce truc-là tu es

obligé de développer. OK ? » [page 6]

Il s'agit ici de considérations *technologiques*, la professeur tenant un discours sur la technique.

Quelques remarques concernant la résolution du 2^e^ exercice

Il s'agit ici de résoudre l'équation $\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$ pour laquelle les coefficients sont rationnels non entiers. On trouve d'autres sous-tâches correspondant aux types de tâches suivants :

T_6 : Réduire des fractions au même dénominateur.

T_7 : Calculer sur des fractions.

B – <u>Organisation didactique</u>

La liste des exemples proposés pour illustrer les diverses notions abordées dans l'organisation didactique n'est pas exhaustive ; le lecteur pourra en rechercher d'autres par lui-même

Les moments de l'étude étant imbriqués les uns dans les autres, il nous a paru plus pertinent de les présenter de façon synthétique et de les illustrer dans chaque cas par des extraits significatifs. Le lecteur pourra les replacer par lui-même dans la chronologie de ce compte rendu.

Moments de l'étude

Lors d'une correction d'exercices pour laquelle un élève passe au tableau, on pourrait s'attendre à se trouver principalement dans le moment de l'évaluation. En fait, et comme on va le voir ci-dessous, dans ce compte rendu on se trouve essentiellement dans le cadre de deux autres moments : celui de l'institutionnalisation et celui du travail de la technique.

<u>Moment du travail de la technique</u>

On peut distinguer d'une part le travail de la technique relative au type de tâches T, qui consiste en un certain découpage en sous-types de tâches T_i, et le travail de certaines des techniques τ_i relatives à ces sous-types de tâches. On peut noter par exemple le travail de la technique τ_1 relative au développement d'expressions algébriques :

> L'élève s'exécute et écrit : « $-8\times 3-8\times x-7+8x=4\times 5x+4\times 9$ » [page 218]

La correction de l'exercice constitue aussi un moyen de retravailler des techniques qui sont considérées officiellement comme routinisées, mais restent problématiques pour certains élèves (règle des signes de la multiplication) :

> « [P] prend la craie et remplace $-8x$ par $+8x$… » [page 219]

<u>Moment de l'institutionnalisation</u>

Lors de la correction d'exercices, on retrouve fréquemment ce cinquième moment. Peuvent être institutionnalisées des techniques ou des éléments technologiques. C'est le cas dans ce compte rendu duquel nous extrayons quelques exemples significatifs :

> « Bon, on avait vu que la première étape, c'était d'enlever les parenthèses. » [page 218]
>
> « […] D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218]
>
> « […] Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. Si tu dis directement qu'il est égal à 1, ça va pas marcher. D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire à ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax+b=cx+d$, et pour se ramener à ce truc-là tu es obligé de développer. OK ? » [page 219]

<u>Moment de l'évaluation</u>

On peut trouver quelques *traces* d'évaluation dans le repérage des erreurs, aussi bien de la part du professeur :

P intervient : « Déjà, là, il devait y avoir un signe. » [page 218]

que des élèves :

De sa place une élève signale une erreur dans le calcul proposé au tableau. [page 219]

Tâches problématiques / routinières

Le compte rendu permet de repérer, au travers des erreurs commises par des élèves ou des questions posées, quelques tâches qui sont problématiques et d'autres qui sont routinières. Par exemple :

La technique correspondant au découpage de T en sous-tâches reste problématique pour l'élève qui passe au tableau lors de la correction du premier exercice :

P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses… » À l'élève au tableau : « Là je ne comprends pas du tout ce que tu fais ! D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218].

La professeur est obligé de montrer de manière ostensive à l'élève passée au tableau quels sont les gestes à accomplir pour effectuer le développement ; l'élève parvient alors à l'effectuer :

« D'abord il faut commencer par développer ! » L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « -8 fois 3… Tu développes ? ! » L'élève s'exécute et écrit : « $-8 \times 3 - 8 \times x - 7 + 8x = 4 \times 5x + 4 \times 9$ » [page 218].

Cependant la désignation des ostensifs à mettre en œuvre, comme « Tu développes », semble rester problématique pour cette élève. Par contre le développement, une fois la reconnaissance effectuée sous la direction du professeur qui montre le geste, semble, à l'erreur de signe près, être une tâche routinière pour cette élève. (page 218).

Pour une majorité d'élèves, le calcul sur les fractions semble encore problématique :

Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit. [page 220]

Certaines tâches sont problématiques sinon pour la classe, du moins pour un élève particulier :

« Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. » [page 220].

Topos

La place laissée aux élèves par l'organisation didactique est changeante selon les tâches effectuées. Par exemple, lors de la correction du premier exercice, les élèves interviennent pour corriger des erreurs commises par celui qui passe au tableau et poser des questions au professeur (pages 218 et 219), alors que dans le deuxième exercice leur topos est plus réduit :

Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit. [page 220]

Cependant à la fin de la correction de ce deuxième exercice, une occasion d'apprentissage a été rencontrée par au moins une élève, celle qui est passée au tableau, qui identifie une des causes de ses erreurs :

« Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y a pas une règle pour pas oublier ? » P : « Les amis de tes ennemis, les ennemis de tes amis, les ennemis de tes ennemis… » L'élève : « Ah, comme l'autre jour, comme on a fait… » [page 220]

Toujours dans le cadre de son topos défini par le contrat didactique traditionnel qui a été mis en place dans la classe, l'élève qui passe au tableau doit résoudre l'exercice, alors que la professeur a pour rôle de vérifier la validité de ce qui est proposé par l'élève :

L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « -8 fois 3… Tu développes ? ! » L'élève s'exécute et écrit : « $-8 \times 3 - 8 \times x - 7 + 8x = 4 \times 5x + 4 \times 9$ » [page 218]

C – Évaluation de l'organisation mathématique

Évaluation du type de tâches T

Ce type de tâches est identifié en compréhension par des expressions telles que :

> « Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. » [page 219]

L'identification en extension correspond à la mise en œuvre de la technique d'étude. L'évaluation de l'organisation mathématique ponctuelle relative au type de tâches T va maintenant s'effectuer à travers l'évaluation des différentes composantes techniques et technologiques ainsi que des différents sous-types de tâches qui structurent la technique τ.

Évaluation de la technique τ d'étude de T

La structuration de cette technique d'étude en sous-types de tâches T_i fournit un découpage qui permet d'aborder la tâche T et que les élèves pourront remettre en œuvre ultérieurement. Cette appropriation est déjà réalisée pour au moins une élève de la classe ce qui est attesté par la mention d'un autre ordonnancement des sous-types de tâches T_i pour accomplir T :

> « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper.[...] » [page 219]

C'est une technique tout à fait classique dont la répétition (les deux exercices corrigés ainsi que la résolution du problème de la page 223 font appel à cette technique) peut être interprétée à l'intérieur du contrat didactique comme attestant sa portée et sa fiabilité. Cependant le découpage selon la proposition faite par une élève page 219 (T_1 / T_2 / T_4 / T_3 / T_4 / T_5 : on réduit chacun des membres avant la transposition des termes en x et des termes constants) permet d'assurer une plus grande fiabilité.

Évaluation de la technologie θ justifiant la technique τ

La technologie est juste évoquée par l'intermédiaire d'une interaction avec l'élève envoyée au tableau :

> P indique que résoudre une équation, c'est chercher le x qui « marche » [...] [page 219]

Ce qui amène par la suite la professeur à tenir un discours sur la nécessité de mettre en œuvre la technique élaborée :

> « D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme que l'on connaît, c'est-à-dire à ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax+b=cx+d$, [...] » [page 219]

Évaluation du type de tâches T_1 : Développer une expression algébrique

Il s'agit visiblement d'un type de tâches bien identifié, que la professeur désigne – en compréhension – par des expressions telles que :

> « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses… » [page 218]
> « D'abord il faut commencer par développer ! » [page 218]

Lorsque cette désignation ne suffit pas comme on peut le vérifier pour une élève qui passe au tableau :

> « D'abord il faut commencer par développer ! » L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. [page 218]

la professeur est amenée à donner en acte une définition en extension de ce type de tâches :

> « -8 fois 3… Tu développes ! » [page 218]

ce qui permet à l'élève de reconnaître le type de tâches dans lequel elle doit s'engager :

> L'élève s'exécute et écrit : « $-8\times 3-8\times x-7+8x=4\times 5x+4\times 9$ » [page 5]

<u>Remarque</u> :

Qu'est-ce que *développer* une expression algébrique ? Développe-t-on seulement les produits ou des expressions plus compliquées (combinaisons linéaires de produits) ? Considère-t-on qu'effectuer la transformation suivante : $-(3x)=-3x$ est un développement ? Dans le compte rendu, deux expressions sont employées pour exprimer l'idée de développement :

> « Bon, on avait vu que la première étape c'était *d'enlever les parenthèses…* »
> « [...]. D'abord il faut commencer par *développer* ! ».

Par ailleurs, la plupart des manuels de Quatrième font la distinction entre développer des expressions telles que $5(x + 3)$ et supprimer des parenthèses comme dans $-(-3x) = 3x$; ne pas faire cette distinction permet peut-être de mieux identifier ce type de tâches.

Évaluation du type de tâches T_2 : Effectuer les produits

Ce type de tâches est identifié par des expressions telles que :

> « Maintenant tu fais les calculs que tu peux faire ! » [page 218]
>
> « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple… On va pas laisser 8 fois 3 » [page 218]

Il permet de passer de l'équation $-8\times3-8\times x-7+8x=4\times5x+4\times9$ à l'équation $-24+8x-7+8x=20x+36$. Mais la définition de ce type de tâches renvoie à un implicite dont le partage avec les élèves est vérifié à travers l'exécution correcte des instructions données. Il n'est donc pas clairement identifié en compréhension.

Par ailleurs une dernière interaction entre la professeur et l'élève qui est passée au tableau indique que pour cette élève au moins la tâche qui consiste à effectuer le produit de deux nombres de signes quelconques n'est pas encore routinisée.

La technique τ_2 fait appel au produit de nombres relatifs, entiers ou fractionnaires, dont la mise en place a été assurée antérieurement dans la classe.

Le calcul des produits semble être considéré par la professeur comme mettant en œuvre des techniques routinisées, ce qui explique l'absence de discours du professeur ou de l'élève lorsqu'elles sont mises en œuvre. Cependant la réaction d'un élève qui interpelle la professeur :

> « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y'a pas une règle pour pas oublier ? » [page 220]

montre que pour cet élève cette technique reste problématique. La professeur est alors amenée à redonner une règle mnémotechnique :

> « Les amis de tes ennemis, les amis de tes ennemis, les ennemis de tes ennemis… » [page 220]

Évaluation du type de tâches T_3 : Transposer les termes

Ce type de tâches existe cependant il est mal identifié, aussi bien en extension

> « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire… »

qu'en compréhension : le terme de *transposition* n'est pas utilisé. Tout est donc dans l'implicite et renvoie au contrat didactique qui veut qu'à cette étape de la résolution, on accomplisse ce type de tâches.

Évaluation du type de tâches T_4 : Réduire chacun des membres

Ce sous-type de tâches n'est pas repéré par une expression particulière ; la professeur guide seulement les calculs de l'élève pas à pas :

> « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?… » [page 219]

on trouve aussi :

> « elle a préféré *regrouper* » [page 218]

Le terme de *réduction* n'est jamais prononcé. Comme pour le type de tâches T_3, ce type de tâches n'est pas bien identifié.

Évaluation du type de tâches T_5 : Résoudre une équation de la forme $ax = b$

Ce type de tâches existe et on peut le repérer comme par exemple dans la résolution du premier exercice :

> Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit : « $-4x = 61$ » « $x = -\frac{61}{4}$ » [page 219]

On le retrouve à deux reprises pages 220 et 223 et il semble que la professeur le considère comme routinisée, ce qui justifierait alors qu'il ne soit pas désigné explicitement.

Le deuxième exercice corrigé fait intervenir deux nouveaux types de tâches relatifs au calcul dans Q.

Évaluation du type de tâches T_6 : Réduire des fractions au même dénominateur
Évaluation du type de tâches T_7 : Calculer sur des fractions
Les techniques correspondantes semblent ne pas être encore routinisées pour l'ensemble de la classe :

> Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève au tableau est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit : [...]

Il ne semble pas pertinent d'introduire à ce stade une telle difficulté

Étude du type de tâches T' (deuxième partie du compte rendu, pages 221, 222 et 223)

A – <u>**Organisation mathématique**</u>

Type de tâches étudié
T' : Résoudre un problème du premier degré
La *tâche* t' de type T' à accomplir ici correspond à la question suivante qui est inscrite au tableau par la professeur :

> « Aïcha et Arthur vont acheter des chocolats. Aïcha achète 100 grammes de truffes et pour 27 francs de fondants. Arthur achète 200 grammes de truffes et pour 15 francs de fondants. Ils paient tous les deux le même prix. Quel est le prix du kilogramme de truffes ? »

Technique d'étude utilisée
La *technique* τ mise en place correspond à la réalisation de trois sous-tâches qui renvoient aux types de tâches suivants :
T'_1 : Mettre en équation.
T'_2 : Résoudre l'équation.
T'_3 : Interpréter le résultat obtenu.
On remarque que T'_2 est le type de tâches étudié précédemment à travers les deux premiers exercices : $T'_2 = T$.

Type de tâches T'_1 : Mettre en équation
La technique associée à cette tâche peut se décrire de la manière suivante :
- Noter x le prix du kilo de truffes.
- Exprimer en fonction de x les prix de 100g et 200g de truffes ; calculer ce que chacun a payé ; exprimer par une égalité le fait que les deux enfants ont payé la même somme.

L'extrait suivant donne un aperçu de la démarche adoptée ici :

> P : « Ouais, combien ils ont payé chacun… C'est bien ça qu'il va falloir faire. Bon, ce qu'on cherche, c'est le prix d'un kilo de truffes ». Une élève : « x ». P : « Voilà. D'accord ? On va poser x égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer « prix du kilo de truffes » tout le temps ! Et une fois qu'on aura x, comme dit Roland, on va exprimer avec des x ce qu'a payé chacun. Donc deuxième étape… » Elle écrit : « Poser une inconnue → Soit x le prix du kilo de truffes » P : « Deuxième étape : c'est ce qui disait Roland, on traduit le français en mathématiques ». Elle écrit : « Traduire l'énoncé par une équation → Aïcha a payé : $27 + x$ » [page 222]

Type de tâches T'_2 : Résoudre l'équation
La résolution renvoie au type de tâches étudié dans la première partie de la séance. Il s'agit ici de travailler le modèle algébrique : le travail du modèle produit des connaissances sur le système.

Type de tâches T'$_3$: Interpréter le résultat obtenu
Cela revient à examiner la cohérence des résultats obtenus avec la situation étudiée :

> P : « Voilà, c'est bien. La réponse est 120 francs. À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve –10 par exemple… On va pas nous payer pour prendre du chocolat… D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes, ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. Donc là… » Elle écrit au tableau : « Vérifier la cohérence du résultat »

B – Organisation didactique

Moments de l'étude
Dans le cadre de cette deuxième partie du compte rendu, on va rencontrer quatre des six moments de l'étude : le moment du travail de la technique et celui de l'évaluation n'apparaîtront pas ici.

Moment de la première rencontre
Tout d'abord, P indique que l'on va résoudre des problèmes et renforce cet engagement en notant au tableau :

> « Les mathématiques permettent de résoudre de nombreux problèmes de la vie courante ou liés à d'autres matières » [page 221]

Puis les élèves découvrent un spécimen de ce type de tâches qui va engager l'étude (cf. les trois premiers paragraphes de la page 221). Peu après, la professeur insiste sur la problématicité de la tâche en mentionnant :

> « Vu comme ça, trouver la solution sans rien faire, ça paraît pas évident ! » [page 221]

Moment de l'exploration du type de tâches T' et de l'élaboration d'une technique τ'
On peut noter qu'à plusieurs reprises les élèves s'engagent dans l'exploration du type de tâches et proposent des embryons de technique :
Tout d'abord certains élèves s'y engagent pour démarrer la résolution du problème posé :

> Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux. [page 221]

Ensuite, on retrouve ce moment pour un élève :

> L'élève propose alors un début de raisonnement sur les achats respectifs d'Aïcha et d'Arthur. Il s'oriente vers une soustraction (27-15), mais sa difficulté à aboutir joint au peu de crédit que semble accorder P à sa méthode, lui imposent rapidement silence. [page 221]

Enfin, on le retrouve (premier paragraphe de la page 222) lorsque les élèves font plusieurs propositions pour aborder la résolution du problème, ainsi qu'au milieu de cette page :

> « Soit *y*, 100 grammes… » [page 222]

Parallèlement, la professeur propose une technique d'étude de ce type de tâches, en notant les différentes étapes à suivre dans la partie gauche du tableau.

Moment de la constitution de l'environnement technologico-théorique
La professeur commence par justifier la nécessité de l'existence d'une technique pour aborder ce type de tâches, ce qui constitue un embryon d'environnement technologique :

> « D'accord ? Si on le prend comme ça, rien qu'en le regardant, on va avoir du mal ! Première étape, on lit l'énoncé […] » [page 221]

Plus loin, la professeur justifie une des étapes du raisonnement :

> « On va poser *x* égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer "prix du kilo de truffes" tout le temps ! » [page 222].

Moment de l'institutionnalisation
Lors du dialogue avec la classe, la professeur distingue parmi les différentes réponses des élèves celles qu'elle retient et les note alors sur le tableau de gauche. Cette manière de faire contribue à fixer les éléments qui entreront de manière définitive dans l'organisation

mathématique. Ceux-ci sont notés sur le cahier de cours, ce qui permet aux élèves de savoir ce qu'ils auront à connaître. Ces moments d'institutionnalisation sont repérables par des phrases, qui sont notées au tableau, telles que :

> « Pour aborder un problème, il faut procéder par étapes »
> « Poser une inconnue »

Topos

Comme dans la première partie de la séance, le topos de l'élève varie suivant les moments de l'étude. Par exemple, à l'issue de la première rencontre certains élèves se lancent dans l'élaboration d'une technique (relative au type de tâches T'_1) :

> Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux.
> P les ignore et poursuit : [...] [page 221]

Leurs possibilités d'initiative sont alors très faibles. Mais par la suite, une discussion s'établit qui laisse aux élèves plus de place. La professeur leur donne l'autorisation de s'engager dans la recherche :

> P : « Oui, mais là on va le faire ensemble. Alors, première étape... Ce serait quoi ? » [page 221]

Les élèves effectuent diverses propositions :

> « On va au magasin et on regarde le prix ! » [page 221]
> Une élève propose alors : « 100 grammes et 27 francs égale 200 grammes et 15 francs. Après on résout. » [page 222]

Celles-ci sont ou non validées par la professeur :

> P n'entend pas cette proposition ou l'ignore. [page 221]
> P réagit : « Tu additionnes des grammes et des francs ! » [page 222]

C – <u>Évaluation de l'organisation mathématique</u>

Évaluation du type de tâches T'

Ce type de tâches est identifié en compréhension dès le début de la deuxième partie du cours :

> « Allez, grand 3, résolution de problèmes ! » [page 221]
> « Allez, tout ce qu'on a fait là, c'était pour réussir à résoudre des problèmes [...] » [page 221]

Les protestations des élèves montrent qu'ils ont identifié le genre de tâches qu'ils auront à accomplir !

Évaluation de la technique τ' d'étude de T'

Comme pour la tâche T, c'est la structuration de la technique d'étude en sous-types de tâches T'_i qui permet d'aborder la tâche T'. Ce découpage classique et recommandé par le programme officiel fournit une technique d'étude pertinente pour ce type de problèmes.

Évaluation de la technologie θ' justifiant la technique τ'

La *technologie* θ justifiant cette technique τ est ici absente. Cette technologie (discours sur la technique, justification de la technique) pourrait être nourrie des questions suivantes :
- Pourquoi procède-t-on ainsi ?
- Pourquoi cette méthode permet-elle d'obtenir le résultat ?
- Pourquoi n'emploie-t-on pas un modèle arithmétique ? On peut objecter que par l'algèbre, on trouve le résultat, mais on ne comprend pas pourquoi.
- Pourquoi emploie-t-on un modèle algébrique ? Une réponse pourrait être : dans le cas d'un problème avec paramètres(s), le modèle arithmétique est insuffisant alors que le modèle algébrique, lui, donne une formule en fonction des paramètres, et fournit ainsi un programme de calcul.
- Pourquoi n'accepte-t-on pas la démarche proposée par un élève ?

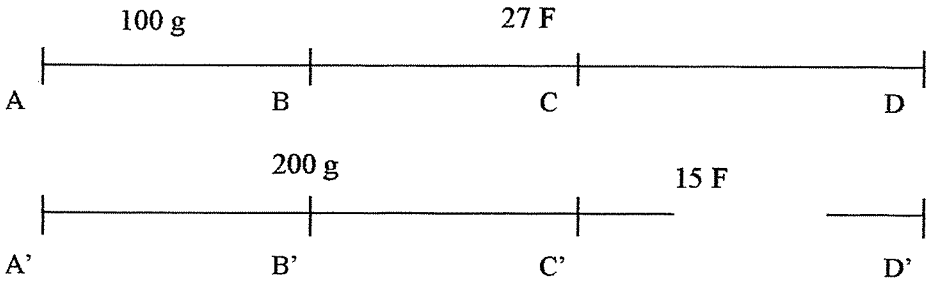
> « On va au magasin et on regarde le prix » [page 221]

La réponse à cette dernière question réside dans l'efficacité des mathématiques qui montrent qu'il est inutile de retourner au magasin pour avoir le prix : on peut l'obtenir sans cela.

Quelques remarques concernant le type de modélisation.
Ici, la professeur impose la modélisation algébrique, alors qu'il aurait été possible de résoudre cette situation autrement. Le choix du type de modèles (arithmétique, algébrique ou autre) n'est pas abordé explicitement dans la classe :

> P fait comprendre qu'elle attend une équation pour résoudre ce problème [page 222]

Voici quelques modélisations possibles :
- Modélisation arithmétique : « Arthur achète 100 grammes de truffes en plus et pour 12 francs de fondants en moins par rapport à Aïcha. Par conséquent, 100 grammes de truffes valent 12 francs, et 1 kilogramme de truffes vaut 120 francs. ».
- Modélisation segmentaire (ces modèles ont en général une durée de vie très brève).



À deux segments de même longueur sont associés sur ce modèle segmentaire des grandeurs égales. Les segments [BC] et [B'C'] représentent respectivement (27-15)F et (200–100)g. On obtient donc l'égalité suivante entre grandeurs : 100g = 12F, ce qui donne le résultat.

- Modélisation en termes de grandeurs.
On considère ici deux *grandeurs* définies à partir de la quantité de truffes achetées : d'une part la *masse* de truffes, d'autre part le *prix* payé. La masse de truffes sera exprimée en fonction de la grandeur g, représentant un gramme de truffes ; le prix des truffes sera exprimé en fonction de la grandeur F, représentant un franc. La masse de truffes étant proportionnelle au prix payé, on obtient le prix d'un gramme (resp. d'un hectogramme ou d'un kilogramme) de truffes en utilisant la relation trouvée entre g (resp. 100g ou 1000g) et F.
$200g - 100g = 27F - 15F$, donc $100g = 12F$, donc $1kg = 1000g = 10\times100g = 10\times12F = 120F$.

Remarque : il faut noter que la distinction entre le modèle et le système n'est pas bien perçue par un des élèves :

> « Ici on a 15 francs et on en prend 27. C'est impossible ! » [page 221]

Cet élève travaille sur le système et non pas sur le modèle.

Évaluation du type de tâches T'_1 : Mettre en équation
Le problème du choix de l'inconnue n'est pas réellement abordé. La professeur propose de poser : « Soit x le prix du kilogramme de truffes » uniquement au vu de la question à laquelle il faut répondre : « Quel est le prix du kilogramme de truffes ? ». Or il est ici plus judicieux de choisir pour x le prix d'un hectogramme de truffes.

Évaluation du type de tâches T'_2 : Résoudre l'équation
Ce type de tâches T'_2 a déjà été étudié dans la première partie du compte rendu ($T'_2 = T$).

Évaluation du type de tâches T'_3 : Interpréter le résultat obtenu
Ce type de tâche est bien identifié par la professeur qui à la fois tient un discours sur sa nécessité

« [...] À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve −10 par exemple... On va pas nous payer pour prendre du chocolat... D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. [...] » [page 223]

et la renforce en notant au tableau :

"Vérifier la cohérence du résultat" [page 223]

Ici la technique n'est pas explicite, elle s'appuie sur un « bon sens » qui est sensé être partagé avec les élèves.

Compléments : tâches génériques

Nous avons recensé quelques tâches génériques, qui ne sont donc pas spécifiques des types de tâches étudiés. La liste ci-dessous fournit des repères pour les caractériser.

« Donc vous *sortez ou l'exercice ou le carnet* [de liaison], comme d'habitude ! » [page 218]
P *circule et contrôle les cahiers* tout en demandant : « [...] » [page 218]
P poursuit sa *tournée de vérification* des travaux. [page 218]
Une autre élève est alors *envoyée au tableau.* [page 218]
P termine son tour de classe et vient à nouveau *aider l'élève au tableau.* [page 218]
Une autre *élève la sollicite* : « [...] » [page 219].
Les étapes suivantes [...] sont toutes conduites par P *en collaboration* avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. [page 220]
Au tableau P *crée une séparation verticale* et *note en titre* de chacune des parties ainsi déterminées ce qu'elle représente. Certains élèves demandent s'il faut recopier cette mention. P ne répond que par un sourire entendu. [page 220]

C'est une tâche que P voudrait générique, mais qui n'a pas encore été identifiée comme telle par certains élèves.

P distribue pour terminer une fiche d'exercices en annonçant que chacun des problèmes proposés est faisable en employant la technique donnée au cours de la séance. Ce travail est à commencer tout de suite et à terminer chez soi. [...] P annonce le travail à faire [...] rappel, jeudi il y a interrogation écrite ! [fin de la page 223]

C'est un dispositif didactique générique.

ETUDE DE TRACES ECRITES DE L'ACTIVITE D'UNE CLASSE

Dans ces actes, pour des raisons de place, nous n'avons gardé de ces traces écrites que les documents proposés par le professeur aux élèves, ainsi que le cours pris par un élève ; les autres documents de cet élève ne seront pas étudiés ici.
Dans ce qui suit, on étudiera les organisations mathématiques et didactiques relatives aux types de tâches abordés ; l'évaluation des organisations mathématiques sera laissée à la charge du lecteur.
Les transitions didactiques ménagées en début d'étude, ainsi que les tests 7α, 7β et 7χ seront étudiés séparément des types de tâches rencontrées dans ce corpus. Le devoir donné à la maison et le contrôle ne seront pas examinés dans le cadre de ces actes.

Structure et contenu de la séquence – du 20 décembre au 30 janvier (page 224)

Le professeur a consacré 11 heures de travail à ce thème. Au cours de cette période, les élèves ont pu faire : un test d'entrée dans l'étude du thème (15 min), 55 exercices, trois tests courts – de 10 à 15 min – répartis sur la période d'étude, un devoir à la maison ainsi qu'un contrôle d'une heure.
On peut noter que le professeur apporte une certaine attention au travail donné à la maison. Le type d'exercices donnés a déjà été abordé en classe. S'y ajoutent presque toujours des indications (cf. 5 janvier, 9 janvier, 16 janvier, 19 janvier).
L'organisation mathématique est structurée autour des trois types de tâches suivants :
T_1 : Mettre en équation un problème.
T_2 : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue.
T_3 : Résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.
Cette structure apparaît clairement à travers le cours pris par l'élève, pages 246 à 249.

Nous étudions tout d'abord les transitions didactiques, sans discriminer les types de tâches auxquels elles se rapportent.

Transition didactique (pages 226, 227 et 228)

Les élèves ont déjà rencontré les trois types de tâches indiqués ci-dessus dans les classes précédentes du collège ; il s'agit donc en Quatrième d'une reprise et d'un approfondissement de l'étude du thème qui nécessite qu'une transition didactique soit ménagée. Celle-ci est assurée d'abord par un test d'entrée suivi, pour certains élèves, d'exercices d'entraînement faisant fonction de remédiation. Vient ensuite un travail effectué en classe entière le 5 janvier, lors de la première séance de l'étude : il consiste à diriger dans le cadre du système didactique principal, un *travail transitionnel spécifique* sur ce thème.

A – **Organisation mathématique**

Test d'entrée
D'une durée de 15 minutes, il comporte trois exercices qui correspondent aux types de tâches suivants :
- Résolution d'équations du type $a + x = b$ ou $ax = b$.
- Dans un problème, savoir exprimer certaines grandeurs à l'aide d'une expression littérale utilisant une inconnue.

Premier exercice : on retrouve ici des types de tâches du programme de Cinquième en vigueur jusqu'en 1996-1997 : « Résoudre une équation à coefficients numériques du type : $a + x = b$, où a et b sont des nombres décimaux relatifs, ou $ax = b$, où a et b sont des nombres décimaux positifs. ». Différents cas de figures sont proposés, qui couvrent bien le programme de Cinquième. Il est à noter l'emploi de lettres différentes pour désigner l'inconnue (t, z, t, d, e, x).

Deuxième exercice : il s'agit ici d'une sous-tâche qui apparaît lors de la modélisation d'une situation : « Traduire un énoncé par une expression littérale ». On retrouve l'utilisation de lettres différentes (x, y) pour désigner l'inconnue. L'équation à obtenir est du type indiquée ci-dessus, à savoir $a + x = b$ ou $ax = b$.

Exercices d'entraînement

Ce travail de remédiation est proposé en travail personnel aux élèves ayant échoué sur le type de tâches « Traduire un énoncé par une expression littérale ».

La première partie de ce travail reprend le type de tâches travaillé dans le deuxième exercice du test d'entrée. On note toujours l'emploi de lettres différentes pour désigner l'inconnue.

La deuxième partie de ce travail, intitulé « Passage d'un langage à l'autre », est relatif à un deuxième type de tâches, décomposé lui-même en deux sous-types de tâches :

- Traduire un énoncé par une expression littérale comportant deux inconnues.
- Interpréter en langage « habituel » une expression littérale comportant deux inconnues.

Mise en équation d'un problème (1)

Il s'agit toujours du même type de tâches, T_1, la nouveauté résidant dans le type d'équations que l'on obtient. Dans le cadre du programme de Cinquième, on trouve le type de tâches suivant « Mettre en équation un problème dont la résolution conduit à une équation à coefficient numériques de l'un des types précédents » (i.e. $a + x = b$ ou $ax = b$).

Il ne s'agit pas ici d'une reprise de ce type de tâches, mais de l'étude d'un nouveau type de tâches, la différence résidant dans le *type* de l'équation à résoudre. En effet, en Quatrième il s'agit de « mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue » (cf. programmes officiels).

La technique utilisée consiste à choisir une lettre pour désigner une des grandeurs inconnues, puis à traduire le problème par une équation. La deuxième partie de la page 228 est relative au type de tâches T'_1 « Associer un problème et une équation ».

B – Organisation didactique

Test d'entrée

Ce test a été donné le 20 décembre 1997 alors que l'étude du thème ne débute que le 5 janvier 1998. Il permet à chaque élève de reconnaître les savoir-faire qui lui seront nécessaires pour la suite de l'étude et d'évaluer s'il les maîtrise ou non.

Exercices d'entraînement

Ce travail de remédiation consiste à proposer à *certains élèves* un travail personnel adapté avant de reprendre l'étude du thème. Le test d'entrée ayant montré que leur rapport personnel antérieur au savoir n'était pas adéquat pour poursuivre l'étude du thème, il leur est signifié que celui-ci doit être retravaillé.

Mise en équation d'un problème (1)

On peut noter ici un travail transitionnel portant sur un type de tâches situé à la frontière des classes de Cinquième et de Quatrième et permettant de retravailler la technique vue en Cinquième sur la mise en équation.

À l'intérieur du type de tâches T_1 (mise en équation), est assurée la première rencontre avec une équation du type $ax + b = c$ spécifique du programme de Quatrième. Cette première

rencontre a lieu en plusieurs fois, avec des types d'équations qui varient selon les énoncés et qui aboutissent tous, après développement et réduction, à la résolution d'une équation du type $ax+b=c$. On se trouve aussi dans le cadre du deuxième moment, qui est celui de l'exploration du type de tâches et de l'élaboration d'une technique, (« On choisit la lettre... », « On traduit le problème »). La technologie, et donc le troisième moment, qui consisterait à justifier la technique utilisée et à répondre à des questions telles que : « Pourquoi procède-t-on ainsi ? », « Pourquoi cette méthode permet-elle d'obtenir le résultat ? » est ici absente.
La répétition d'une dizaine de tâches relevant de T_1 « Mettre en équation un problème » ou de T'_1 « Associer un problème et une équation » vise à constituer un habitus permettant de réaliser plus facilement l'entrée des élèves dans le contrat didactique relatif à la mise en équation.

Étude du type de tâches T_1 : Mettre en équation un problème

Les occasions de rencontrer ce type de tâches sont multiples comme l'indique le récapitulatif des situations dans lesquelles on retrouve T_1.

- Mettre en équation un problème (2) : 5 et 8 janvier, page 229.
  Le premier exercice de ce corpus est traité en classe, et les exercices 2 et 3 sont donnés en travail à la maison.
- Situations d'étude et de recherche : 8 janvier (2 heures), pages 230 et 231.
- Résolution d'équations, exercices 3, 4 et 5 : 12 et 15 janvier, page 232.
- Résolution de problèmes du premier degré : du 15 au 22 janvier, page 233.
- Cours : I. Mise en équation, page 246.

A – <u>Organisation mathématique</u>

La technique consistant à choisir une lettre et à l'utiliser pour traduire le problème a été déjà élaborée lors de la transition didactique. La technologie et la théorie sont absentes, comme dans l'analyse du compte rendu. Les deux exemples qui sont donnés dans le cadre du cours (page 246) permettent de montrer la technique dans deux cas typiques, mais non de la justifier.

B – <u>Organisation didactique</u>

Les exercices proposés à la page 229 – Mise en équation d'un problème (2) – permettent de travailler la technique (quatrième moment). Lors de ce travail de la technique, l'élève n'est plus aussi guidé que dans la première partie de ce corpus d'exercices : les sous-tâches qui permettent d'obtenir l'équation ne sont plus mentionnées. Cependant pour l'exercice 2 (à faire à la maison) des indications sont données : il y a une certaine prise en compte de cette tâche didactique « Préparation du travail à la maison » généralement assez écrasée. Ces exercices étant corrigés en classe, on se trouve aussi dans le cadre du cinquième moment, celui de l'institutionnalisation. Dans le cahier de cours (page 246), le premier paragraphe du chapitre 4 (I. Mise en équation, 5 janvier), réalise l'institutionnalisation de la technique τ_1 relative à T_1.

Étude du type de tâches T_2 : Résoudre une équation du premier degré à une inconnue

Ce type de tâches se rencontre très fréquemment comme l'indique le nombre d'exercices dans lesquels on retrouve T_2.

- Situations d'étude et de recherche : 8 janvier (2 heures), pages 230 et 231.
  Cet exercice composé de quatre situations est traité entièrement pendant cette séance de deux heures. Chacune des situations est bâtie autour d'une « expérience de pensée » : sur une balance en équilibre figure une masse inconnue (éventuellement en plusieurs

exemplaires) ainsi que des masses connues ; en enlevant une ou plusieurs masses de chaque côté, l'équilibre est conservé. Après avoir traduit ces équilibres par des équations (cela correspond au type de tâches T_1), il faut dégager sous forme de règle ce qui permet de passer d'une équation à l'autre (type de tâches T_2). La dernière partie de chaque situation consiste à résoudre des équations du même type (types de tâches T_{2i} définies ci-dessous).

- Résolution d'équations : du 8 janvier au 15 janvier, page 232.
- Cours : II. Résolution d'équations : 9 et 12 janvier, pages 246 et 247.

A – Organisation mathématique

Il s'agit d'abord, dans les pages 230 et 231, d'un travail sur les quatre types de tâches suivants (chacune des situations est relative à l'un d'entre eux), qui correspondent à des sous-types de tâches de T_2 :
T_{21} : $x+a=b \Leftrightarrow x=b-a$; transposition portant sur les termes constants.
T_{22} : $ax=b \Leftrightarrow x=b/a$; résolution d'une équation de la forme $ax=b$.
T_{23} : $ax+b=cx \Leftrightarrow (c-a)x=b$; transposition portant sur les termes en x.
T_{24} : $ax+b=a'x+b' \Leftrightarrow (a-a')x=b'-b$; transposition des termes afin d'obtenir une équation de la forme $ax=b$.

Remarque sur la terminologie employée : équation / égalité. Il est demandé de « Traduire cet équilibre par une *équation* », mais de compléter la phrase : « Une *égalité* est conservée lorsqu'on… ».
Pour chacune des sous-tâches, la technique est justifiée par le modèle de la balance, qui constitue ainsi un élément technologique de l'organisation mathématique mise en place.
C'est une organisation mathématique qui fait partie de l'organisation didactique, dans le sens où elle rend intelligible et justifie la technique qui sera ensuite institutionnalisée dans le cours. Par contre, il ne sera plus demandé à l'élève de faire appel à ce modèle, une fois que les techniques classiques de résolution d'équations seront routinisées.

Dans l'exercice 2 de la page 232, on trouve des équations très diversifiées. Dans les premières, les coefficients sont des nombres entiers ou rationnels, positifs ou négatifs. Ensuite, il faut commencer par développer les deux membres, etc. Dans le n°13, il faut résoudre une équation de la forme $P(x)/Q(x)=k$, où P et Q sont des fonctions affines. Par ailleurs, certaines équations n'ont aucune solution, alors que d'autres sont indéterminées, ce qui est un sous-type de tâches particulier de T_2 correspondant à une équation du type $0x=b$.

B – Organisation didactique

L'entrée des élèves dans chacune de ces situations d'étude et de recherche (pages 230 et 231) s'appuie sur un type de tâches qui vient d'être retravaillé, à savoir T_1, ce qui assure la transition didactique dans l'avancée du cours. On se trouve ici essentiellement dans le cadre du deuxième moment de l'étude, celui de l'exploration du type de tâches T_2, et de l'élaboration d'une technique τ_2 relative à ce type de tâches. On peut noter qu'à cette occasion on rencontre le cinquième moment, celui de l'institutionnalisation, à travers les remarques qui figurent à la fin des situations 1 et 2. On retrouve en toile de fond le troisième moment, celui de la constitution de l'environnement technologico-théorique, la balance constituant un modèle permettant de justifier la technique utilisée.
Les situations 3 et 4 correspondent, dans la résolution de l'équation, à l'enchaînement des types de tâches T_{23} puis T_{22}, et T_{24} puis T_{22}. À travers le cahier d'exercices de l'élève, on peut

remarquer que le professeur demande aux élèves de vérifier systématiquement que le nombre trouvé est bien solution.

L'exercice 1 de la page 232 reprend les équations déjà rencontrées lors de la mise en équation (pages 228 et 229), la consigne étant maintenant de les résoudre. Il est à noter que ces exercices, abordés lors de l'étude du type de tâches T_1, ont été laissés en attente et sont maintenant repris, lors de l'étude du type de tâches T_2. Cet exercice fournit l'occasion de travailler la technique τ_2 (quatrième moment) ; ce travail se poursuit dans l'exercice 2 de façon plus systématique. On pourra noter que certains exercices (1,2,3,4,5,10) font partie de ce que l'on pourrait nommer la ZEN (zone d'étude normale) alors que les autres font partie de la ZEP (zone d'étude proche) : il suffit alors d'effectuer un petit travail (sous-tâche de développement par exemple) pour se retrouver dans la ZEN.

Dans le cadre du cours (pages 246 et 247), on trouve la définition de la tâche T_2 : « Résoudre une équation d'inconnue x, c'est chercher l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée ». On note ensuite l'institutionnalisation de techniques : celles relatives aux sous-types de tâches T_{21} et T_{22}, ainsi que celle relative à T_2 (ces trois techniques étant exemplifiées). Cette partie du cours se termine par une étude de cas particuliers (pas de solution, infinité de solutions).

Étude du type de tâches T_3 : Résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une inconnue.

Ce type de tâches T_3 se rencontre lors des occasions suivantes :
- Résolution d'équations, exercices 3, 4 et 5 : 12 et 15 janvier, page 232.
- Résolution de problèmes du premier degré : du 16 au 22 janvier, page 233.
- Cours III. Résolution de problèmes du premier degré : 15 janvier, pages 248 et 249.

A – Organisation mathématique

L'exercice 1 de la page 232, outre qu'il fournit l'occasion de travailler la technique τ_2, donne surtout de la cohérence à l'articulation T_1/T_2, c'est à dire T_3.
L'exercice 3 de la page 232 aborde l'étude d'une situation à modéliser par un système de deux équations (non linéaires) à deux inconnues, la résolution de celui-ci passant par la résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.
L'exercice 4 de la page 232 conduit à une modélisation par une équation de la forme $P(x)/Q(x)=k$, où P et Q sont des fonctions affines, assortie d'une condition sur l'inconnue : la solution doit être entière.
Dans l'exercice 5 de la page 232, il s'agit d'une situation arithmétique se modélisant par une équation du premier degré. La solution d doit être entière et le reste $d-2$ doit être positif et inférieur au diviseur $d+5$.
Nous laissons le soin au lecteur de s'exercer à déterminer avec précision les organisations mathématiques correspondant au corpus des neuf exercices de la page 233.

B – Organisation didactique

Dans les exercices 3, 4 et 5 de la page 232, il s'agit du premier moment de l'étude, celui de la première rencontre avec le type de tâches T_3 en classe de Quatrième. Dans un premier temps, les élèves ont rencontré le type de tâches T_1 (mise en équation) et dans un second le type de tâches T_2 (résolution d'une équation) : il faut maintenant articuler, à travers les mêmes exemples, les deux techniques correspondantes.

Les exercices donnés à la page 233 (résolution de problèmes du premier degré) se placent clairement dans le cadre du quatrième moment, le moment du *travail de la technique*, relativement à la tâche T_3. Les situations étudiées font appel à des domaines très *variés* et bien *identifiés* (problèmes d'aire, d'angle, de moyenne, etc.).

Le cours (pages 248 et 249) constitue une institutionnalisation exemplifiée de la technique relative à T_3.

Test n°7 – 12 janvier, 16 janvier et 22 janvier – pages 234, 236 et 238

Il faut noter ce *dispositif didactique* mis en place par le professeur, qui consiste à donner en cours d'étude trois petits test (d'environ 15 min chacun) qui permettent à chaque élève de s'évaluer en cours d'apprentissage. Ces tests permettent aussi d'institutionnaliser l'organisation mathématique qui est en train de se mettre en place. Nous le décrivons rapidement ci-dessous, sans en faire d'analyse particulière.

Test 7α – 12 janvier
Ce test est constitué de trois exercices. Les deux premiers sont des problèmes du premier degré, qui sont relatifs au type de tâches T_3. Leur résolution est guidée par trois questions : mise en équation, résolution de l'équation, vérification du résultat trouvé. Le troisième exercice – relatif au type de tâche T_1 – propose cinq équations et trois problèmes, et il faut déterminer pour chacun des trois problèmes l'équation qui va permettre de le résoudre. Ce test est rendu avec un corrigé très détaillé, tapé à la machine.

Test 7β – 16 janvier
Ce deuxième test est constitué de 7 équations à résoudre : il est donc relatif au type de tâches T_2. On retrouve des équations du même type que celles étudiées lors des exercices. Le corrigé utilise des copies d'élèves, ce qui permet de montrer à l'ensemble de la classe que le savoir attendu est un savoir dépersonnalisé, avec lequel certains élèves ont un rapport personnel qui correspond au rapport institutionnel.

Test 7χ – 22 janvier
Ce test est constitué de deux exercices, qui sont tous les deux des problèmes du premier degré (type de tâches T_3). Le premier est choisi dans le domaine de la géométrie et est du même type que l'exercice 2 du corpus « Résolution de problèmes du premier degré » (page 233). Le second relève de l'arithmétique et est analogue à un des exercices traités dans le cours. Ce test est rendu accompagné d'un corrigé commenté. Celui-ci mentionne, pour le deuxième exercice, que l'on a trois possibilités pour le choix de l'inconnue ; la photocopie de la solution proposée par un élève dans son test fournit l'une d'entre elles (la mise en équation n'est pas présentée dans les autres cas).

ANNEXE

Compte rendu d'observation en classe

La classe observée est une Quatrième de 21 élèves, que P décrit comme relativement hétérogène, avec 3 ou 4 élèves de très bon niveau, 5 ou 6 élèves « totalement perdus », le reste suivant plus ou moins. La séance observée a eu lieu le vendredi 6 février 1998, de 9h à 10h.

9h10 : 19 élèves sont présents. P, s'adressant aux élèves : « Les devoirs à la maison pour commencer ! ». Elle passe dans les rangs pour ramasser les devoirs que quelques retardataires ne lui avaient pas remis lors du dernier cours : il s'agit du devoir n°9. P, à un élève qui semble avoir oublié son travail : « Ça fait quinze jours que vous l'avez, il n'y a pas d'excuse ! » P sanctionne par un zéro les élèves qui ne rendent pas le devoir – en précisant que, pour elle, ça n'est pas un problème, et même que ça lui fait une copie de moins à corriger...

P : « Donc on va maintenant commencer par corriger les exercices que je vous ai donné à faire hier. Puis on verra comment on fait pour résoudre un problème. Donc vous sortez ou l'exercice ou le carnet [de liaison], comme d'habitude ! »

P circule et contrôle les cahiers tout en demandant : « Pour le premier, y a-t-il un volontaire ? » Une élève, à P : « J'ai pas trouvé, mais je l'ai fait ». Une autre élève est alors envoyée au tableau. Elle écrit :

$$-8(3-x)-(7-8x)=4(5x+9)$$

Il s'agit de résoudre l'équation. Elle continue sur la même ligne en écrivant un nouveau signe =, mais P l'arrête dans son élan : « Hop là ! On ne met pas les = à côté, d'accord ? Tu passes à la ligne en dessous et tu réécris ton égalité en changeant... » L'élève s'exécute. P poursuit sa tournée de vérification des travaux. L'élève au tableau a continué :

$$-8-3+8$$

P intervient : « Déjà, là, il devait y avoir un signe ». Elle montre l'espace qui sépare le 8 de la parenthèse dans la première ligne. Les élèves : « Non... » P : « Bon, on avait vu que la première étape c'était d'enlever les parenthèses... » À l'élève au tableau : « Là je ne comprends pas du tout ce que tu fais ! D'abord il faut commencer par développer ! »

L'élève au tableau semble ne pas avoir bien compris. P commente tout en poursuivant la vérification des cahiers : « –8 fois 3... Tu développes ?! » L'élève s'exécute et écrit :

$$-8\times3-8\times x-7+8x=4\times5x+4\times9$$

P termine son tour de classe et vient à nouveau aider l'élève au tableau : « Voilà... Maintenant tu fais les calculs que tu peux faire ! ». S'adressant ensuite à la classe : « On peut commencer par faire les calculs, non ? 8 fois 3 par exemple... On va pas laisser 8 fois 3. Une élève : « Non, 24, on marque –24 ». P : « Voilà ! On écrit –24 puis $-8x$ ». L'élève au tableau écrit :

$$-24-8x-15x$$

P intervient : « Pourquoi 15 ? Vous mettez des x et des "pas x" automatiquement ensemble ! » L'élève efface et recommence :

$$-24 - 8x - 7 + 8x =$$

De sa place une élève signale une erreur dans le calcul proposé au tableau. P réagit : « Oui, *moins* par *moins*, *plus* ! OK ! » Puis elle va au tableau et explique l'erreur à l'élève, prend la craie et remplace $- 8x$ par $+ 8x$ dans chacune des deux dernières lignes.

L'élève au tableau termine l'écriture de la dernière ligne sous le contrôle du professeur :

$$-24 + 8x - 7 + 8x = 20x + 36$$

P : « Maintenant on fait les opérations qu'on peut faire... » Sous l'œil vigilant de P, qui la conseille pas à pas, l'élève rassemble les termes en x dans le membre de gauche et les termes indépendants à droite.

$$8x + 8x - 20x = 24 + 7 + 36$$

P : « Donc $8x$ plus $8x$ ça fait ?... » L'élève : « $16x$ » P : « Moins $20x$? Combien j'en ai ? » L'élève : « Moins... Euh... » P : « On fait directement 16 moins 20 ? » L'élève : « Euh... 16 moins 20, euh... » Une autre élève, de sa place : « -4 !» P reprend : « $-4x$, c'est bien ». Toujours étroitement contrôlée par P, l'élève au tableau écrit :

$$-4x = 61$$
$$x = -\frac{61}{4}$$

P à l'adresse de la classe : « Tout le monde est d'accord ? » Une élève l'arrête : « Madame, j'arrive pas à comprendre pourquoi elle a mis *moins* là. Ah oui ! C'est parce qu'après elle a changé ! Parce qu'elle a... Au début, à la troisième ligne, elle peut faire encore un calcul ». P : « Oui... ». L'élève continue : « Elle peut faire 24... » P ne la laisse pas terminer sa phrase : « Oui, voilà. Elle, elle a préféré regrouper. Si vous voulez commencer ici [elle montre la troisième ligne], c'est bon aussi. Si vous voulez écrire $16x-31 = ...$, c'est pareil ! »

Une autre élève la sollicite : « Madame, je peux faire le suivant ? J'ai pas compris, j'ai pas compris pour le deuxième ! » P : « Pour le deuxième, attends. On va envoyer quelqu'un ! » Un autre élève : « Madame, ce que j'ai fait, c'est faux ce que j'ai fait, Madame ? » P envoie la volontaire au tableau, puis regarde un court instant le cahier de l'élève qui l'interroge. P : « Oui, c'est faux... Si tu avais commencé par développer tu t'en serais sorti ! Je sais pas d'où il sort ton 1 ». L'élève fait une réponse inaudible. P indique que résoudre une équation, c'est chercher le x "qui marche" : « Tu ne peux pas dire que x est égal à 1. Quand on résout une équation, on cherche le x qui va marcher. Si tu dis directement qu'il est égal à 1, ça va pas marcher. D'accord ? Donc pour résoudre, il faut se ramener à la forme qu'on connaît, c'est-à-dire ce truc-là [elle pointe une expression sur le cahier de l'élève], $ax + b = cx + d$, et pour se ramener à ce truc-là tu es obligé de développer. OK ?

L'attention de P se porte maintenant sur ce que vient d'écrire l'élève qui corrige le nouvel exercice au tableau. L'élève a écrit :

$$\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}-\left(\frac{-2x}{13}\right)$$

P : « Tu es sûre que c'est ça l'énoncé ? » L'élève : « Oui, c'est ça l'énoncé ». P, après avoir eu confirmation par d'autres élèves : « OK ! Bon alors, il n'y a pas à développer pour l'instant. On va pas développer. Entre ça et ça, il y a = entre eux, d'accord ? Pour l'instant on fait comme là [elle montre une ligne du calcul précédent]. On commence par enlever les parenthèses qui restent. Allez !. Donc de ce côté il n'y a pas de parenthèses, ça va, pas de problème, jusqu'ici pas de parenthèses. Là il y en a, on les fait sauter ».

L'élève semble attendre la suite... P : « Comment on fait pour faire sauter les parenthèses ? On a *moins moins* 2x sur 13 ». L'élève ébauche une réponse que P interprète immédiatement comme la bonne et la répète : « *Plus* 2x sur 13 ».

$$\frac{x}{3}-1=x-\frac{6}{13}+\frac{2x}{13}$$

P : « Maintenant qu'on a plus les parenthèses, on arrive où ? » L'élève répond de façon inaudible mais, semble-t-il, correcte, puisque P acquiesce : « Voilà... On fait passer tous les x d'un côté et les pas-x de l'autre... À gauche on a déjà $\frac{x}{3}$ et ceux qui sont à droite on les fait passer à droite. D'accord ? » Sous la direction très étroite du professeur, l'élève écrit :

$$\frac{x}{3}-x-\frac{2x}{13}=-\frac{6}{13}\div 1$$

Les étapes suivantes (réduction au même dénominateur, addition dans chacun des membres, division d'un quotient par un autre) sont toutes conduites par P en collaboration avec quelques élèves de la classe qui répondent sporadiquement à ses questions. Le rôle de l'élève au tableau est pratiquement réduit à écrire ce que le professeur lui dit :

$$\frac{13}{39}x-\frac{39}{39}x-\frac{6}{39}x=\frac{39}{39}-\frac{18}{39}$$

$$\frac{32}{39}x=\frac{21}{39}$$

$$x=\frac{21}{39}\times\frac{39}{32}=\frac{21}{32}$$

La séquence de correction se termine. Courte interaction entre P et l'élève au tableau qui est retournée à sa place : « Madame, mais moi quand je me trompe c'est sur les signes. Des fois j'oublie. Y a pas une règle pour pas oublier ? » P : « Les amis de tes ennemis, les ennemis de tes amis, les ennemis de tes ennemis... » L'élève : « Ah, comme l'autre jour, comme on a fait... » P : « Allez, vous prenez votre cahier de cours, de telle sorte que vous ayez une page à gauche et une page à droite ».

Au tableau P crée une séparation verticale et note en titre de chacune des parties ainsi déterminées ce qu'elle représente. Certains élèves demandent s'il faut recopier cette mention. P ne répond que par un sourire entendu.

P, tout en écrivant sur la partie de gauche : « Allez, grand 3, résolution de problèmes ! » Un élève : « Ah non ! » P : « Quoi, “Ah non” ? » L'élève : « Madame, je déteste les problèmes ! » P : « C'est pourtant pas compliqué ! » Un autre élève : « Madame, y en aura au contrôle ? » P : « Pourquoi pas ? » Protestations de quelques élèves. P précise alors que le prochain devoir à la maison ne sera constitué que de problèmes. Les protestations continuent.

P coupe court : « Allez, tout ce qu'on a fait là, c'était pour réussir à résoudre des problèmes. Parce qu'en fait les maths, ça sert à résoudre plein de problèmes ! » Elle écrit au tableau :

> Les mathématiques permettent de résoudre de nombreux problèmes
> de la vie courante ou liés à d'autres matières

Les élèves copient. P poursuit : « Je vous donne un problème... » Elle écrit sur la partie droite du tableau :

> Aïcha et Arthur vont acheter des chocolats. Aïcha achète 100 grammes de truffes et pour 27 francs de fondants. Arthur achète 200 grammes de truffes et pour 15 francs de fondants. Ils paient tous les deux le même prix. Quel est le prix du kilogramme de truffes ?

Le mot de *truffe* trouble les élèves. L'un d'eux évoque même les champignons pour expliquer à sa voisine ce que sont les truffes. P intervient, clarifie les choses. Les élèves achèvent de copier l'énoncé. P reprend : « Vu comme ça, trouver la solution sans rien faire, ça paraît pas évident ! » Réaction de quelques élèves, qui veulent faire des propositions de combinaison des nombres entre eux. P les ignore et poursuit : « Il va falloir procéder par étapes... » Elle écrit dans la partie gauche :

> Pour aborder un problème, il faut procéder par étapes.

Puis prenant les élèves à témoin : « D'accord ? Si on le prend comme ça, rien qu'en le regardant, on va avoir du mal ! Première étape : on lit l'énoncé. Et si on comprend pas, on le lit plusieurs fois. Mais c'est pas rien qu'en le lisant qu'on va arriver ! » Un élève : « On commence par le lire correctement ». P, à la classe : « Le lire correctement, ça veut dire quoi ? » Des réponses fusent : « Ça veut dire le comprendre ! », « Ça veut dire lire bien l'énoncé et comprendre ce qui est écrit ». P : « Ouais. Comprendre ce qui est demandé. Cela veut dire bien voir ce qu'on a, ce qu'on veut. Hypothèses, conclusion. On procède donc par étapes ». Une élève : « On fait d'abord dans le brouillon, Madame ». P : « Oui, mais là on va le faire ensemble. Alors, première étape... Ce serait quoi ? »

Plusieurs propositions sont faites. Une élève : « 27 plus 15... ». Un autre : « Lire l'énoncé... » P : « Ouais, on va le mettre.. » Elle écrit, en complétant : « ... lire l'énoncé en analysant ce que l'on a et ce que l'on veut ». En aparté un élève propose sur le ton de la plaisanterie : « On va au magasin et on regarde le prix ! » P n'entend pas cette proposition ou l'ignore, et revient à la première proposition : « Toi, tu es en train de partir en mettant 27 plus ça, etc. C'est un peu rapide ! 27 plus quoi alors ? » L'élève propose alors un début de raisonnement sur les achats respectifs d'Aïcha et Arthur. Il s'oriente vers une soustraction (27–15), mais sa difficulté à aboutir jointe au peu de crédit que semble accorder P à sa méthode, lui imposent rapidement silence.

P fait comprendre qu'elle attend une équation pour résoudre ce problème. Une élève propose alors : « 100 grammes et 27 francs égale 200 grammes et 15 francs. Après on résout ». P réagit : « Tu additionnes des grammes et des francs ! » Plusieurs propositions sont faites qui échouent également. Puis un élève dit : « Il aurait pas fallu déjà savoir combien ils avaient tous les deux ? Mais ça on peut pas savoir ! » P : « Ouais, combien ils ont payé chacun... C'est bien ça qu'il va falloir faire. Bon, ce qu'on cherche, c'est le prix d'un kilo de truffes ». Une élève : « x ». P : « Voilà. D'accord ? On va poser x égale le prix du kilo de truffes, parce qu'on va pas se payer "prix du kilo de truffes" tout le temps ! Et une fois qu'on aura x, comme dit Roland, on va exprimer avec des x ce qu'a payé chacun. Donc deuxième étape... » Elle écrit :

Poser une inconnue → Soit x le prix du kilo de truffes

P : « Deuxième étape : c'est ce que disait Roland, on traduit le français en mathématiques ». Elle écrit :

Traduire l'énoncé par une équation → Aïcha a payé : $27 + x$

P continue : « Tout le monde est d'accord ? » Certains élèves protestent : « Non ! » P insiste : « x, c'est le prix d'un kilo, est-ce qu'elle a acheté un kilo ? » Les élèves : « Non !... » P : « Elle ne peut pas avoir payé x pour 100 grammes. Si x est le prix d'un kilo... » Une élève : « Soit y, 100 grammes... » P ignore la réponse : « On a x le prix d'un kilo de truffes... » D'autres propositions fusent : « x exposant moins... On a le droit de mettre un exposant à x ? » P les ignore toutes : « 100 grammes, c'est combien de kilos ? » Un élève : « 100 grammes, c'est 0,1 ». Un autre : « 10 fois 100 grammes c'est un kilo. » Un autre encore : « Madame, on multiplie 100 par 100, ça fait un kilo, ça fait mille grammes, ça fait un kilo ». P : « 100 fois 100 égale 1000 ? » Une autre élève : « Non, ça fait x » Des rires fusent. P : « Bon, on reprend... ». P explicite le raisonnement à faire : « Si je paie x pour un kilo, combien est-ce que je paie pour 2 ? Et pour 0,1 ? » Au tableau, elle corrige la dernière ligne écrite et ajoute :

Aïcha a payé : $27 + 0{,}1x$
Arthur a payé : $15 + 0{,}2x$

Des protestations timides s'élèvent dans la classe. Certains disent ne plus comprendre. P les ignore et répond à la remarque d'un élève : « Les unités, quand vous me dites "francs", les unités dans les équations on ne les met pas ! On les met en conclusion, on ne les met pas dans les équations ».

Un élève, visiblement gêné : « Madame, on peut pas faire ça, parce que ça va toujours être des grammes. Donc ça va pas atteindre le kilo ». P : « C'est pour ça qu'on a fait ça ! C'est pour ça qu'il y a une virgule. Les 200 grammes, je les ai mis en kilos. 100 grammes, c'est 0,1 kilo ». Une élève : « Après on convertit ». P : « Oui. Maintenant on en arrive à une équation ».

Une élève, doucement : « J'y comprends rien ». P : « Tu comprends rien ? Pourquoi ? Où est le problème ? » Un autre élève : « Ben, justement, c'est ça... » L'élève qui dit ne pas comprendre : « Mais pourquoi vous avez fait + 0,1 ? » P : « Combien elle a payé Aïcha ? Elle a payé 27 francs de fondants. Ces 27 francs elle les a payé. Et après elle a payé 100 grammes de truffes. Ces 100 grammes c'est des grammes, c'est pas des francs.

Donc, il faut mettre ça en francs. Ensuite un kilo de truffes, ça fait x francs. D'accord ? Moi je prends 100 grammes, c'est-à-dire que je prends 10 fois moins qu'un kilo ».

L'élève : « En fait on sait que... On sait qu'elle a payé. Bon, ça va, j'ai compris, Madame. On sait une partie de la somme qu'elle a payée, mais pas l'autre partie ». P : « Voilà. Donc il faut traduire les 100 grammes, il faut les traduire avec des francs. Donc comme un kilo tu le payes x francs, tu prends 100 grammes, c'est à dire 10 fois moins, tu vas payer 10 fois moins. D'accord ? $\frac{1}{10}$ fois x, si tu veux. Donc 0,1 fois x ». P poursuit en écrivant l'équation qui résume la situation :

$$27 + 0{,}1\,x = 15 + 0{,}2\,x$$

P : « Étape suivante ! » Elle écrit sur la partie gauche du tableau :

Résoudre l'équation

P : « Là, je vous laisse faire ! » Elle circule dans les rangs pendant que les élèves cherchent. Certains élèves discutent du sens des opérations indiquées ; l'une d'elles explicite : « Ici on a 15 francs et on en prend 27. C'est impossible ! » P intervient et propose une situation analogue qu'elle traite sur un mode naturel, imposant ainsi comme allant de soi un résultat négatif. Mais les réactions montrent que l'incompréhension persiste. Un élève est envoyé au tableau qui résout l'équation sans coup férir :

$$27 + 0{,}1x = 15 = 0{,}2x$$
$$0{,}1x - 0{,}2x = -27 + 15$$
$$-0{,}1\,x = -12$$
$$x = \frac{-12}{-0{,}1} = 120$$

P : « Voilà, c'est bien. La réponse est 120 francs. À ce niveau, il faut penser à vérifier que ce résultat est valide. C'est-à-dire que si on trouve –10 par exemple... On va pas nous payer pour prendre du chocolat... D'accord ? Si on avait trouvé 3000 francs, 3000 francs le kilo de truffes, ou 2 francs le kilo de truffes, bon ! Donc on vérifie si c'est à peu près cohérent. Donc là... » Elle écrit au tableau :

Vérifier la cohérence du résultat

P : « Dernière étape : on conclut par une phrase. Tout le temps ! » Une élève est invitée à le faire pour le cas examiné. La phrase est consignée au tableau dans la partie droite :

Le prix du kilogramme de truffes est 120 F.

P distribue pour terminer une fiche d'exercices en annonçant que chacun des problèmes proposés sont faisables en employant la technique donnée au cours de la séance. Ce travail est à commencer tout de suite et à terminer chez soi. Il est 10h05. La sonnerie retentit. P annonce le travail à faire : pour lundi prochain, faire le problème 1 ; rappel : jeudi il y a interrogation écrite !

La séance est terminée.

Traces écrites de l'activité d'une classe

La séquence didactique dont on a reproduit ci-après les traces écrites figurant dans les "archives" d'un élève d'une classe de quatrième – l'élève 6 – a occupé environ 11 heures, entre le samedi 20 décembre 1997 et le vendredi 30 janvier 1998. La chronique de l'étude établie par le professeur de la classe est reproduite ci-dessous.

Date	*Durée*	*Contenu*
20 décembre	15 min	Test d'entrée dans l'étude du thème
5 janvier	1 heure	Activités et exercices : mise en équation d'un problème (1) ; mise en équation d'un problème (2) : exercice 1 et indications relatives à l'exercice 2. Cours : Mise en équation. Travail à la maison : exercices 2 & 3 de (2).
8 janvier	2 heures	Correction : exercices 2 & 3. Activités et exercices : exercice 4 de (2) ; situation d'études et de recherches... ; résolution d'équations : exercice 1, deux premières colones. Travail à la maison : 3^e colonne de l'exercice 1 de la feuille *Résolution d'équations*.
9 janvier	1 heure	Correction : 3^e colonne de l'exercice 1... Cours : sans changer l'ensemble des solutions d'une équation, que peut-on faire ? Activités et exercices : équations 1, 2, 3, 4, 5, 8 de l'exercice 2 de la feuille *Résolution d'équations*, avec indications pour l'équation 5. Travail à la maison : équation 10 de l'exercice 2 & exercices 3 et 5.
12 janvier	1 heure	Correction : équation 10 de l'exercice 2 & exercices 3 et 5. Cours : technique de résolution d'une équation du 1er degré. Activités et exercices : équations 6 & 7 de l'exercice 2. Test 7α. Travail à la maison : équations 9, 12 et 13 de l'exercice 2.
15 janvier	2 heures	Correction : équations 9, 12 et 13 de l'exercice 2. Activités et exercices : équations 14, 11, 15 de l'exercice 2 & exercice 4 de la feuille *Résolution d'équations* ; exercices 1 & 2 de la feuille *Résolution de problèmes du 1er degré*. Cours : technique de résolution d'une équation du 1er degré. Activités et exercices : exercice 5 Travail à la maison : exercice 3 ; devoir à la maison 7 (pour le 23.01).
16 janvier	1 heure	Correction : exercice 3. Activités et exercices : exercice 6 & 7 ; indications pour l'exercice 8. Test 7β. Travail à la maison : exercice 8.
19 janvier	1 heure	Correction : exercice 8. Activités et exercices : exercice 9 ; questions sur le devoir à la maison ; indications sur l'exercice 4. Travail à la maison : exercice 4.
22 janvier	25 min	Correction : exercice 4. Test 7γ.
23 janvier	–	Remise du devoir à la maison.
30 janvier	1 heure	Contrôle 5.
12-23 janvier et au-delà	–	Correction perlée des tests et du devoir à la maison.

On trouvera dans les pages qui suivent, précédant et éclairant les documents extraits des archives de l'élève 6, les documents distribués aux élèves par le principal (feuilles d'exercices, etc.).

DOCUMENTS DISTRIBUÉS AUX ÉLÈVES

TEST D'ENTREE DANS L'ETUDE DU THEME :
« Equations et problèmes »

Résoudre les équations suivantes :

$t + 52 = 21$	$-3 + z = 14$	$17.3 = -10.3 + t$
$25d = 40$	$0.04\,e = 1.8$	$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}$

Claude mesure x centimètres .Tom mesure 15cm de moins que lui. Quelle est la taille de Tom ?
<u>Réponse</u> :

Une maison d'édition propose ses publications à 80% de leur tarif habituel. Le prix habituel d'une de ces publication est de y francs.
Quel est le prix promotionnel de cette publication ?
<u>Réponse</u> :

Exercices d'entraînements

‣ La construction d'un tronçon d'autoroute de 35 kms a coûté x millions de francs.
Quel est en million de francs , le prix de revient de cette autoroute au kilomètre ?

‣ Une conversation téléphonique dure y minutes à une période où le tarif est de 0.77 franc la minute.
Quel est le coût de la communication ?

‣ Un cycliste parcourt t kilomètres en 5 heures.
Quelle est sa vitesse moyenne en kilomètreheure ?

‣ Liquidation totale : 15% de réduction sur tous les articles.
Quel sera le prix d'un article qui coûtait r francs avant cette réduction ?

Passage d'un langage à l'autre :

On note x le prix d'un coca et y le prix d'un orangina.
Compléter le tableau suivant :

langage habituel	langage algébrique
	$3x$
Prix de cinq oranginas	
Prix de deux cocas et cinq oranginas	
	$4x+5y$

On note x et y les notes de Tom à ses deux derniers devoirs de Maths
Compléter le tableau suivant

Langage habituel	Langage algébrique
	$\frac{x+y}{2}$
Moyenne des deux devoirs sachant que le dernier compte double	
	$\frac{2x+y}{3}$

MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME (1)

Voici 5 énoncés. Pour chacun d'eux , mettez en évidence une grandeur que vous ne connaissez pas et que l'on pourrait calculer à partir des informations de l'énoncé.
Ensuite, choisissez une lettre pour désigner cette grandeur inconnue, et traduisez le problème afin d'obtenir une équation.

Enoncé 1 : «Julien a acheté 7 ballons de foot et 5 balles de tennis qu'il a payées 10 F pièce. En tout il a payé 750 F »
On choisit la lettre.......... pour désigner ______
On traduit le problème : prix de 7 ballons + ... = prix total
d'où l'équation : ______

Enoncé 2 : « Jean a acheté 3 classeurs à 12.50F l'un et des paquets de copies à 5.20F l'un. Il a payé 68.70F »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème : ______
d'où l'équation :..

Enoncé 3 : « Kate va faire des courses .Elle achète du poisson à 72F le kilo. Elle paye 43.20F »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème :..
d'où l'équation : ....

Enoncé 4 : « la longueur d'un rectangle est le double de sa largeur , son périmètre est 465m »
On choisit la lettre .... pour désigner ....
On traduit le problème : ______
D'où l'équation :..

Enoncé 5 : « Un grand-père a 50 ans de plus que son petit-fils .A eux deux ils ont 56 ans »
On choisit la lettre .... pour désigner______
On traduit le problème : ______
D'où l'équation :..

Voici 5 équations et 5 énoncés. Pour chaque énoncé trouver l'équation correspondante et préciser la grandeur désignée par la lettre y.

Equations : A $(y + 175) \times 2 = 650$ B $2y + 3y = 650$ C $11y = 165$
D $(2y + 10)\times 10 = 650$ E $50\times 0.420 + 90y = 165$

Enoncé 1 : « En ajoutant le double et le triple d'un nombre on trouve 650 »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 2 : « Un jardin a pour aire 165m^2 et sa largeur est 11m. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 3 : « Un champ rectangulaire a pour périmètre 650m et sa longueur est 75m. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 4 : « On a acheté 420g de sole à 50F le kilo et un rôti de bœuf à 90F le kilo. On a payé 165F. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

Enoncé 5 : « J'ajoute 10 au double d'un nombre , je multiplie le résultat par 10.Je trouve 650. »
Equation : .... La lettre y désigne : ....

MISE EN EQUATION D'UN PROBLEME (2)

Exercice 1 : Traduire le problème suivant par une équation :
« Je pense à un nombre , je le multiplie par 10.J'enlève 20 au résultat , je trouve 10 »

Exercice 2 : « Si on augmente de x mètres la longueur d'un rectangle de 16m sur 20m, son aire augmente de $60m^2$ »

1°) Faire un croquis
2°) Traduire cet énoncé par une équation

Exercice 3 :1°) « Dans un magasin on fait une remise de 30% sur les prix marqués. Vous y avez acheté un pull. Vous ne vous souvenez plus du prix marqué ,mais vous vous rappelez que le montant de la remise était de 90F »

En désignant par x le prix marqué en F de ce pull , traduire cet énoncé par une équation.

2°) « Une maison d'édition propose ses publications à 80%de leur tarif habituel.Le prix habituel d'une de ses publications est y F et son prix promotionnel est 40F »

Traduire cet énoncé par une équation.

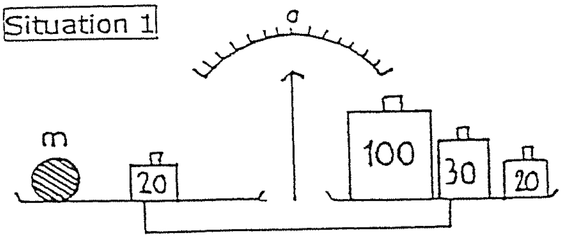
Exercice 4 « Ma grand-mère a 5 ans de moins que mon grand-père. A eux d'eux ils ont 117 ans »

a°) Désigner par x l'âge de mon grand-père
Exprimer en fonction de x l'âge de ma grand-mère.

b°)Traduire cet énoncé par une équation.

m désigne la masse de l'objet à peser (l'unité de masse est le gramme)

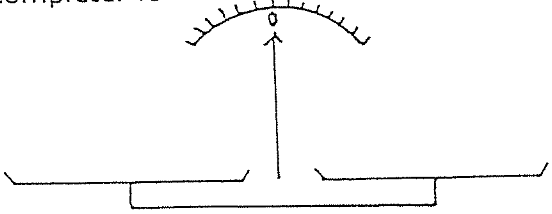
Situation 1



Traduire cet équilibre par une équation :

....(1)

On enlève maintenant 20g sur chaque plateau de la balance
Compléter le schéma suivant :



Traduire cet équilibre par une équation :

....(2)

Qu'a-t-on fait pour passer de l'équation (1) à l'équation (2) ?
Réponse : ....

....

....

Que remarque-t-on ? ______________________________

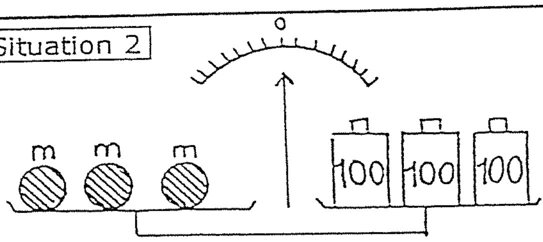
....

Application 1.1 :Résoudre t +52 = 21 ; $x + \frac{2}{7} = -\frac{31}{35}$. Vérifier les résultats.

Remarque : Retrancher un nombre c'est .... Une égalité est donc conservée lorsqu'on ....

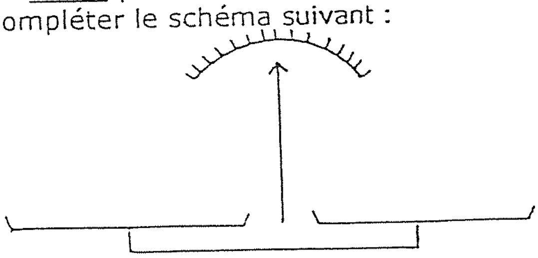
Application 1.2 : Résoudre −3+z = 14 ; 17.3 = -10.3 +t

Situation 2



Traduire cet équilibre par une équation
....(3)

On divise par 3 la masse de chaque plateau .
Compléter le schéma suivant :



Traduire l'équilibre par une équation
....(4)

Qu'a-t-on fait pour passer de l'équation (3) à l'équation (4) ?

....

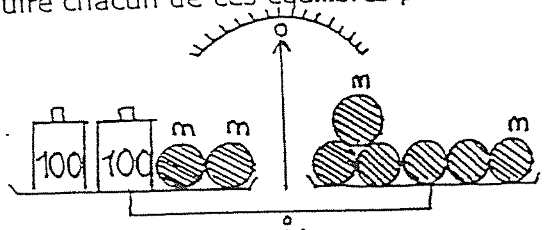
Que remarque-t-on ? ______________________________

Remarque : Diviser par un nombre non nul c' est ....
Donc ....

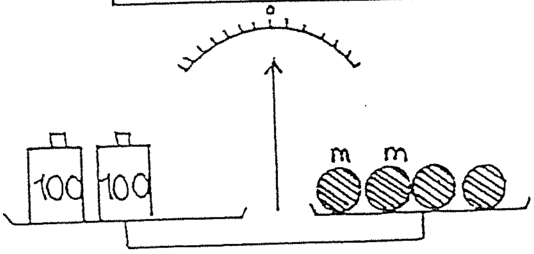
Application 2 : Résoudre 3x = 2 ; -4x = 1 ; $\frac{1}{2}y = 1$; $0.004e = 1.8$; $\frac{1}{3}t = \frac{1}{4}$

Situation 3

Traduire chacun de ces équilibres par une équation



....



....

Comment a-t-on fait pour passer du premier équilibre au second équilibre ?

Réponse :..

Résolvons l'équation : $200 + 2m = 6m$

....

....

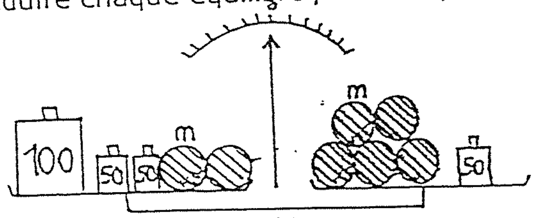
....

....

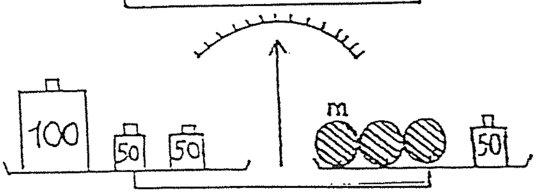
Application 3 :Résoudre $2x = 10 + x$; $1.25x + 1.75x - 8 = 8x$ Vérifier vos résultats.

Situation 4

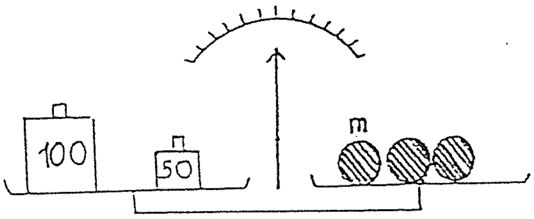
Traduire chaque équilibre par une équation



....



....



....

Comment a-t-on fait pour passer du 1^{er} au 2^{nd} équilibre ?..

Comment a-t-on fait pour passe du 2^{nd} au $3^{ième}$ équilibre ? ....

Résolvons l'équation : $200 + 2m = 5m + 50$

....

....

....

....

....

Application 4 : Résoudre $x - 5 = -2x + 7$; $-\frac{2x}{3} + 6 + x = 4x - 6$

RESOLUTIONS D'EQUATIONS

Exercice 1 : Voici quelques équations que l'on a déjà rencontrées.
Maintenant résolvons les ! On n'oubliera pas de faire une vérification des résultats obtenus.

$7g + 50 = 750$
$37.5 + 5.20x = 68.70$
$43.20\,y = 72$
$6x = 465$
$50 + x = 56 - x$

$2(y+175)=650$
$2y + 3y = 650$
$11y = 165$
$10(2y + 10) = 650$
$50 \times 0.420 + 90y = 165$

$10x - 20 = 10$
$16(20+x) = 320 + 60$
$\frac{80}{100}y = 40$
$y + (y + 5) = 117$

Exercice 2 : Résoudre les équations suivantes

1. $\frac{4}{6} - \frac{2}{3} = \frac{2}{9} - x$
2. $\frac{10}{21} - x = \frac{1}{7}$
3. $-2x = -8$
4. $\frac{2}{7}x = \frac{5}{9}$
5. $-\frac{6}{7}x + \frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x - 1$
6. $2(x-1) + 5(x-3) = 6x + 1$
7. $(x+1) - (2x+3) = -x + 2$
8. $4(5x-3) - 2(2+3x) = 5(3+3x) - (x-5)$
9. $\frac{4(x-1)}{5} = \frac{8(x-3)}{6}$
10. $\frac{3}{4}x - \frac{x}{2} + 10 = \frac{10}{4} - x + \frac{5}{2}$
11. $(2x+4)(x-5) = (x+2)(2x-10)$
12. $\frac{x+1}{3} - \frac{2x+1}{5} + \frac{x+4}{6} = \frac{x+8}{10}$
13. $\frac{5(8+x)}{4(10+x)} = \frac{1}{3} \qquad x \neq -10$
14. $\frac{x+5}{2(x+8)} = 4 \qquad x \neq -8$
15. $3x - 6[4x + 2 - 2(x+1)] = 0$

Exercice 3 :

a et b sont deux nombres dont le produit vaut 240. En faisant le produit de b par a+3 on obtient 276.
Calculer le nombre b puis le nombre a.

Exercice 4 : En ajoutant un entier x au numérateur de la fraction $\frac{15}{17}$ et en retranchant le même entier x à son dénominateur on obtient $\frac{5}{3}$. Calculer x.

Exercice 5 : On a : $\begin{array}{r|l} 793 & d+5 \\ \hline d-2 & 31 \end{array}$. Trouver d .

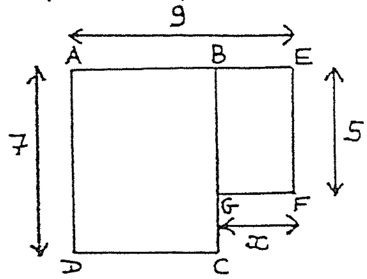
RESOLUTION DE PROBLEME DU PREMIER DEGRE

Exercice 1 : 1°)« Je pense à un nombre .Je le multiplie par 5.J'enlève 28 au résultat. Je trouve alors le triple du nombre de départ. » A quel nombre ai-je pensé ?

2°)« Je pense à un nombre .Je le multiplie par 4 puis j'ajoute 15.Je multiplie ce résultat par 5,j'obtiens alors le décuple (10 fois) du nombre de départ ». A quel nombre ai-je pensé ?

Exercice 2 :(Problème d'aire)

Trouver x pour que les rectangles ABCD et BEFG aient la même aire.

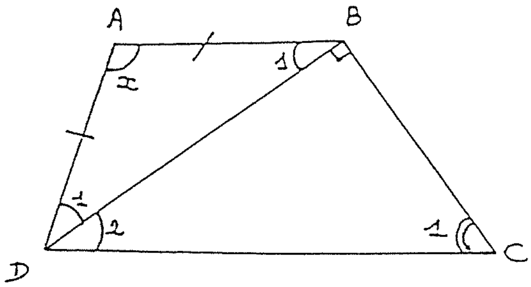


Exercice 3 : Un père a 25 ans de plus que sa fille Mélina. Dans 6 ans l'âge du père sera le double de celui de sa fille .Quels sont les âges de Mélina et de son père ?

Exercice 4 :(Problème d'angle)

Le quadrilatère de la figure ci-contre est un trapèze de base AB et DC tel que AB=AD.
On note x la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$: $x=\widehat{BAD}$

1°) Calculer les angles $\hat{B}_1, \hat{D}_1, \hat{D}_2$ et $\hat{C}_1$ en fonction de x.(il y a sur la figure deux angles alterne-interne)
2°)Quelle doit être la valeur de x pour que le triangle DBC soit isocèle.

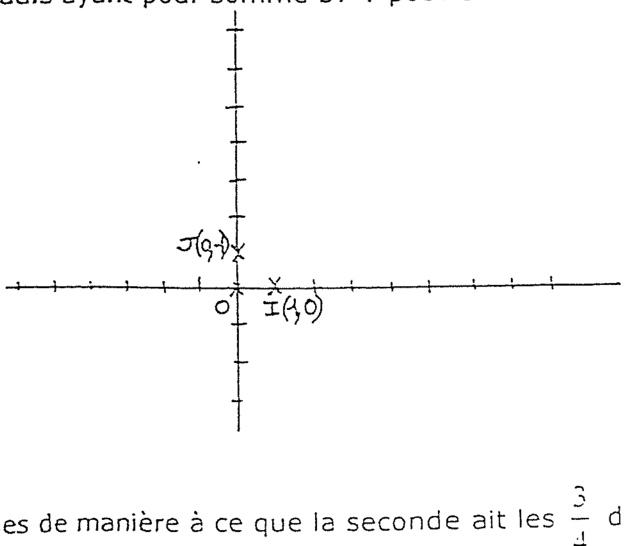


Exercice 5 : (Problème de moyenne)
Julie a eu 9 notes .Sa moyenne est 9.5.Quelle doit être sa note au prochain devoir pour que sa nouvelle moyenne soit 10 ? (Tous les devoirs sont comptés coefficient 1).

Exercice 6 : Existe-t-il deux nombres entiers consécutifs ayant pour somme 57 ? pour somme 126 ?

Exercice 7 : (Problème de milieu !)

On se donne dans un repère (O ,I ,J) les points : A(4 ; -2) B(1 ;-3) C(-2 ;6)
1°) Compléter la figure et calculer les coordonnées de K milieu de [AC].
2°)Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.



Exercice 8 : (Problème d'héritage)

« Un notaire veut partager 25110F entre trois personnes de manière à ce que la seconde ait les $\frac{3}{4}$ de la part de la première et la troisième les $\frac{9}{5}$ de la part de la seconde . »

Calculer la part de chacune des trois personnes .

Exercice 9 :

« Deux négociants ont respectivement 30000F et 100000F.Leur capital à chacun s'accroît chaque année de 5000F.Déterminer au bout de combien de temps le capital du premier sera égal à la moitié du capital du second. »

NOM : ....

Prénom :........................

TEST N° 7 α

Exercice 1 : « Je pense à un nombre. Je le multiplie par 3, puis j'ajoute 5. Je trouve 44. »

1°) Traduire cette phrase par une équation.

2°) Résoudre cette équation.

3°) Vérifier votre résultat.

Exercice 2 : « Une bouteille et son bouchon coûte 1.10F. Sachant que la bouteille vaut 1F de plus que le bouchon, calculer le prix de la bouteille et du bouchon ».

Pour cela : 1°) En notant x le prix du bouchon, exprimer en fonction de x le prix de la bouteille.

2°) Traduire le problème par une équation puis, la résoudre.

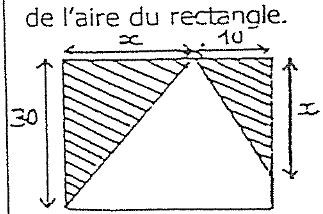
3°) Vérifier votre résultat et conclure.

Exercice 3 : Voici 5 équations et 3 problèmes. Il s'agit de trouver l'équation correspondante à chacun des problèmes. (on ne demande pas de résoudre les équations)

A	$\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2} = \frac{30(x+10)}{2}$
B	$30x + 10x = \frac{30(x+10)}{2}$
C	$2 + 10x = 2x + 30$
D	$10 + 2x = 30$
E	$30 + 10x = 2x + 2$

PROBLEME 1

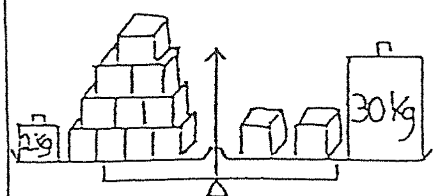
Déterminer x pour que l'aire hachurée soit égale à la moitié de l'aire du rectangle.



EQUATION : ....

PROBLEME 2

Tous les cubes ont la même masse. La balance est en équilibre. Quelle est la masse d'un cube ? (on note x cette masse en kg)



EQUATION : ....

PROBLEME 3

Un rectangle a une largeur de 5cm et un périmètre de 30cm. Quelle est sa longueur ? (on note x sa longueur en cm)

EQUATION : ....

Barème : chaque exercice est sur 2 points

<u>Test 7 α : correction et commentaires</u>

Exercice 1 : On pense à un nombre , on le multiplie par 3 , puis on ajoute 5 et on trouve 44.Ce que l'on veut trouver c'est ce nombre en question .Notons le n (par exemple).

Traduisons pas à pas :

Je pense à un nombre $\rightarrow$ n

Je le multiplie par 3 $\rightarrow$ 3n

Puis on ajoute 5 $\rightarrow$ 3n +5

On trouve alors 44 $\rightarrow$ 3n + 5 = 44

Résolvons cette équation : $3n + 5 = 44$

$$3n + 5 - 5 = 44 - 5$$

$$3n = 39$$

$$\frac{3n}{3} = \frac{39}{3}$$

$n = 13$ <u>vérification</u> : $3 \times 13+5=39+5=44$

Exercice 2 : Il faut se laisser guider par l'énoncé et ne pas se précipiter.

1°) On note x le prix du bouchon , on veut savoir en fonction de x le prix de la bouteille.

La bouteille coûte un franc de plus que le bouchon donc : prix bouteille = prix bouchon + 1

soit : prix bouteille = $x + 1$

2°) On traduit le problème :

prix bouteille + prix bouchon = 1.10

$x + 1 \quad + \quad x \quad = 1.10$

$$2x + 1 = 1.10$$

$$2x + 1 - 1 = 1.10 - 1$$

$$2x = 0.10$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{0.10}{2}$$

$x = 0.05$. Le prix du bouchon est 0.05F . Vérification : $0.05+1+0.05=1.10$.

Exercice 3 : Le conseil que l'on peut encore une fois donné pour faire cet exercice est de lire l'énoncé de chaque problème et de traduire pas à pas les informations données.

Problème 1 : Calculons l'aire du rectangle , c'est $30(x +10)$.La moitié de l'aire du rectangle sera donc : $\frac{30(x+10)}{2}$.

L'aire hachurée est la somme des aires de deux triangles rectangles dont les mesures des deux côtés relatifs à l'angle droit sont données ; cette aire est donc égale à : $\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2}$.

On traduit le problème : Aire hachurée = moitié de l'aire du rectangle

soit : $\frac{30x}{2} + \frac{10x}{2} = \frac{30(x+10)}{2}$

<u>L'équation correspondante au problème 1 est donc l'équation A.</u>

Problème 2 : La balance est en équilibre. Cela signifie que la masse du plateau de gauche est égale à la masse du plateau de droite . Sur le plateau de gauche , il y a notamment 10 cubes ; sachant qu'un cube a une masse de x Kg , 10 cubes auront une masse de 10x Kg.

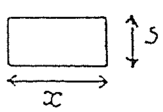
Masse plateau de gauche = $2 + 10x$ Masse plateau de droite = $2x + 30$

On traduit le problème : Masse plateau de gauche = masse plateau de droite

soit : $2 + 10x = 2x + 30$

<u>L'équation correspondante au problème 2 est donc l'équation C.</u>

Problème 3 : Au brouillon , il est conseillé de faire un petit croquis



Périmètre d'un tel rectangle = $2 (5 + x) = 10 + 2x$

Traduction du problème : périmètre rectangle = 30

d'où : $10 + 2x = 30$

<u>L'équation correspondante au problème 3 est donc l'équation D.</u>

Nom : ………………

Prénom : ……………

TEST 7β

Résoudre les équations suivantes :

- Equation 1 : $4x - 8 = 0$
- Equation 2 : $\frac{8}{9}y = -4$
- Equation 3 : $5x - 5 = 6x + 9$
- Equation 4 : $\frac{t-4}{t+2} = \frac{1}{2} \qquad t \neq -2$
- Equation 5 : $y - 1 - (2y + 5) = -y + 4$
- Equation 6 : $\frac{4}{7} - \frac{3}{4}x = \frac{5}{7} - \frac{7}{8}x$
- Equation 7 : $x - (x + 1)(x + 2) = -x(x + 2) - 2$.

Barème : chaque équation : 1 point.

CORRECTION DU TEST 7β

(1) $4x - 8 = 0$ Vérif : $4 \times 2 - 8 = 0$

$4x - 8 + 8 = 0 + 8$ $\quad 8 - 8 = 0$

$4x = 8$

$x = \frac{8}{4}$

$x = 2$

(2) $\frac{8}{9} y = -4$ Vérif : $\frac{8}{9} \times \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{8}{2} = -4$

$\frac{8}{9} y \times \frac{9}{8} = -4 \times \frac{9}{8}$

$y = -\frac{36}{8}$

$y = -\frac{9}{2}$

Equation 3 : $5x - 5 = 6x + 9$

$5x - 5 + 5 = 6x + 9 + 5$

$5x = 6x + 14$

$5x - 6x = 6x - 6x + 14$

$-1x = 14$

$-x = 14$

$-14 = x$

Vérification :

$5 \times (-14) - 5 = -70 - 5 = -75$

$6 \times (-14) + 9 = -84 + 9 = -75$

Equation 4 : $\frac{t - 4}{t + 2} = \frac{1}{2}$ $\quad t \neq 2$

$(t - 4) \times 2 = (t + 2) \times 1$

$2t - 8 = t + 2$

$2t - 8 - 2 = t + 2 - 2$

$2t - 10 = t$

$2t - 10 + 10 = t + 10$

$2t = t + 10$

$2t - t = t - t + 10$

$t = 10$

Vérification :

$$\frac{10 - 4}{10 + 2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Equation 5

$y - 1 - (2y + 5) = -y + 4$

$y - 1 - 2y - 5 = -y + 4$

$y - 2y - 1 - 5 = -y + 4$

$-1y - 6 = -y + 4$

$-1y - 6 + 6 = -y + 4 + 6$

$-1y = -y + 10$

$-1y + y = 10$

$0 = 10$

Impossible

Il n'y a donc pas de solution à cette équation

Equation 6

$\frac{4}{7} - \frac{3}{4}x = \frac{5}{7} - \frac{7}{8}x$

$\frac{4}{7} - \frac{4}{7} - \frac{3}{4}x = \frac{5}{7} - \frac{4}{7} - \frac{7}{8}x$

$-\frac{3}{4}x = \frac{1}{7} - \frac{7}{8}x$

$-\frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x = \frac{1}{7} - \frac{7}{8}x + \frac{7}{8}x$

$\frac{1}{8}x = \frac{1}{7}$

$\frac{1}{8} x \times \frac{8}{1} = \frac{1}{7} \times \frac{8}{1}$

$x = \frac{8}{7}$

Vérification :

$$\frac{4}{7} - \frac{3}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{7} - \frac{24}{28} = \frac{16}{28} - \frac{24}{28} = -\frac{8}{28} = -\frac{2}{7}$$

$$\frac{5}{7} - \frac{7}{8} \times \frac{8}{7} = \frac{5}{7} - 1 = \frac{5}{7} - \frac{7}{7} = -\frac{2}{7}$$

Equation 7 :

$x - (x + 1)(x + 2) = -x(x + 2) - 2$

$x - (x^2 + 2x + x + 2) = -x^2 - 2x - 2$

$x - (x^2 + 3x + 2) = -x^2 - 2x - 2$

$x - x^2 - 3x - 2 = -x^2 - 2x - 2$

$-x^2 - 2x - 2 = -x^2 - 2x - 2$

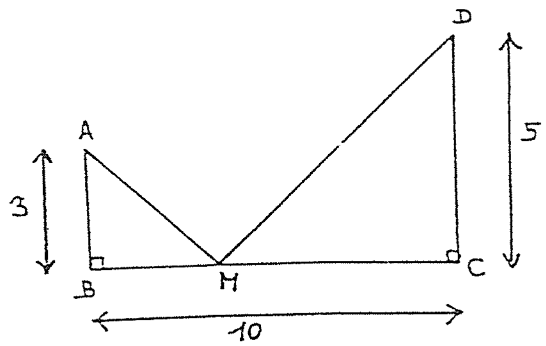
Il y a une infinité de solution

TEST 7χ

Nom : ....

Prénom :..................

Exercice 1 : A quelle distance de B doit-on placer le point M sur le segment [BC] pour que les triangles ABM et DMC aient la même aire ?



Exercice 2 : La somme de trois nombres entiers consécutifs est 54.Quels sont ces nombres

Barème : 3.5 points chaque exercice

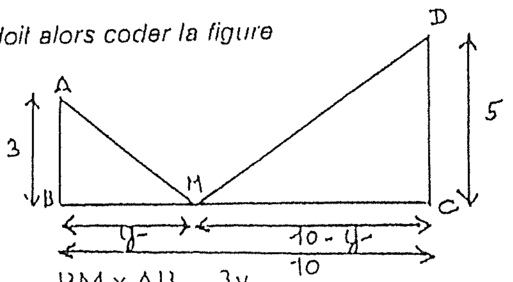
Correction du test 7χ (et commentaires)

Exercice 1 :

On veut savoir à quelle distance de B on doit placer le point M sur le segment [BC] pour que les triangles ABM et DMC aient la même aire. C'est à dire que l'on veut connaître la distance BM de manière à ce que les aires des triangles ABM et DMC soient égales.

Notons y la distance BM . y = BM

On doit alors coder la figure



Aire ABM= $\dfrac{BM \times AB}{2} = \dfrac{3y}{2}$

Aire DMC = $\dfrac{DC \times MC}{2} = \dfrac{5(10-y)}{2}$

D'où l'équation à résoudre :

$\dfrac{3y}{2} = \dfrac{5(10-y)}{2}$

$3y=5(10-y)$

$3y=50-5y$

$3y+5y=50-5y+5y$

$8y=50$

$y=\dfrac{50}{8}$

$y = 6\,25$

Vérification : $\dfrac{3 \times 6.25}{2} = 9.375$

$\dfrac{5(10 - 6.25)}{2} = 9.375$

On doit donc placer le point M sur [BC] à 6,25 (unité de longueur) du point B.

Exercice 2 : On veut trouver 3 nombres entiers consécutifs tel que leur somme soit égale à 54.

Il faut être conscient que si l'on trouve l'un de ces trois nombres alors on aura les deux autres.

1ère possibilité : On prend comme inconnue le plus petit de ces trois nombres .On le note n. Les deux autres sont alors n+1 et n+2.
2ème possibilité :On prend comme inconnue le plus grand de ces trois nombres. On le note r. Les autres sont alors r-1 et r-2.
3ème possibilité : On prend comme inconnue l'entier intermédiaire .On le note u .Les deux autres sont alors u-1 et u+1.

C'est la 1ère possibilité qui est présentée ci-dessous.

Exercice 2 :

1ère étape : choix de l'inconnue

Je choisi n pour désigner le premier nombres donc les autres sont : n+1 ; n+2

2ème étape : Mise en équation
$n+n+1+n+2=54$

3ème étape : Résolution

$3n+3=54$
$3n=54-3$
$3n=51$
$n=\dfrac{51}{3}$
$n=17$

Les nombres entiers consécutifs sont 17, 18 et 19

4ème étape : Vérification
$17+18+19=54$

DEVOIR A LA MAISON N° 7 (D.M 7)
A rendre le 23/01/98

On rappelle que l'on doit porter une grande application à la rédaction.

Exercice 1 : 1°) En ajoutant le même nombre x au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{5}{7}$ on obtient $\frac{9}{10}$.

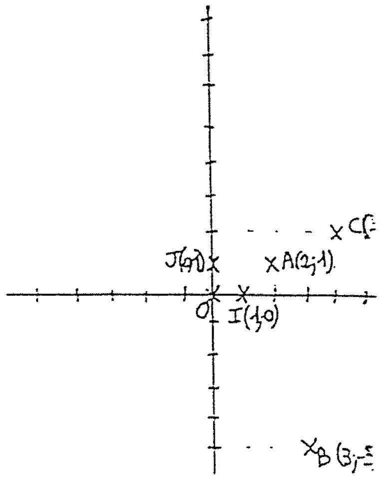
Calculer x.

2°) Résoudre les équations suivantes :

$$\frac{9x+7}{2}-\left(x-\frac{x-2}{7}\right)=36$$

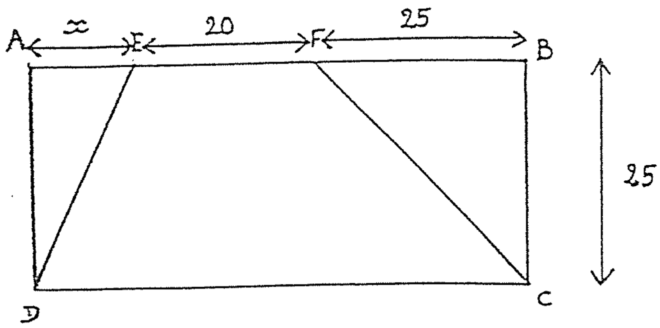
$$10x^2-5x(2x+3)=15$$

$$\frac{\frac{x}{3}}{4}=\frac{1}{2}x-4$$



3°) Dans un repère (O,I,J) on donne les points A(2 ; 1) B(3 ; -5) C(4 ; 2)
a°) Calculer les coordonnées de K milieu de [AC].
b°)Déterminer alors les coordonnées du point D de manière à ce que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

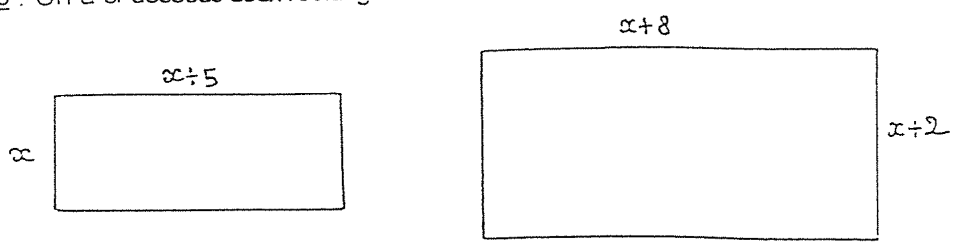
Exercice 2 : Pour quelle valeur de x l aire du trapèze DEFC ci-dessous est-elle égale aux trois cinquièmes de celle du rectangle ABCD ?



Exercice 3 : Dans un jardin le tiers de la surface est recouvert par des fleurs, un sixième par des plantes et le reste soit 150m^2 est occupé par de la pelouse. Calculer l'aire de ce jardin.

Exercice 4 : On partage une somme de 9800F entre trois personnes.
La première doit recevoir 240F de moins que la deuxième et la part de la troisième doit être égale au trois quarts de la somme des parts des deux autres.
Calculer la part de chaque personne.

Exercice 5 : On a ci-dessous deux rectangles dont les dimensions sont indiquées en cm.



Sachant que l'aire du plus grand rectangle est égale à l'aire du plus petit rectangle augmentée de 51cm^2,calculer x.

Bon travail

Correction du D.M 7 et commentaires

Exercice 1 :

1°) $\frac{5+x}{7+x} = \frac{9}{10}$

(Remarquons que x ne peut être égal à –7 (sinon 7 + (-7) = 0 et, on ne peut pas diviser par 0)

$10(5+x) = 9(7+x)$

$50 + 10x = 63 + 9x$

$10x - 9x = 63 - 50$

$x = 13$

Vérification : $\frac{5+13}{7+13} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$

2°)

$$\frac{9x+7}{2} - (x - \frac{x-2}{7}) = 36$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{7}{2} - (\frac{7x}{7} - \frac{x}{7} + \frac{2}{7}) = 36$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{7}{2} - (\frac{6x}{7} + \frac{2}{7}) = 36$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{7}{2} - \frac{6x}{7} - \frac{2}{7} = 36$$

$$\frac{63x}{14} - \frac{12x}{14} + \frac{49}{14} - \frac{4}{14} = 36$$

$$\frac{51x}{14} + \frac{45}{14} = 36$$

$$\frac{51x}{14} = \frac{504}{14} - \frac{45}{14}$$

$$51x = 459$$

$$x = \frac{459}{51}$$

$$x = 9$$

Vérification : $\frac{9 \times 9 + 7}{2} - (9 - \frac{9-2}{7}) = 44 - (\frac{63}{7} - \frac{7}{7}) = 36$

- $10x^2 - 5x(2x+3) = 15$

$10x^2 - 10x^2 - 15x = 15$

$-15x = 15$

$x = -1$

Vérification : $10(-1)2 - 5 \times (-1) \times (-2 + 3) = 10 + 5 = 15$

- $\frac{x}{3} = \frac{1}{2}x - 4$

$$\frac{4}{3}x = \frac{1}{2}x - 4$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{1}{2}x = -4$$

$$\frac{5}{6}x = -4$$

$$x = -4 \times \frac{6}{5}$$

$$x = -\frac{24}{5}$$

Vérification : $\frac{1}{2}(-\frac{24}{5}) - 4 = -\frac{12}{5} - 4 = -\frac{32}{5} = -6.4$

$\frac{-24}{5} \times \frac{4}{3} = -\frac{96}{15} = -6.4$

3°a°) A (2 ; 1) B(3 ; -5) C(4 ; 2)

Calculons les coordonnées de K milieu de [AC]

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

$$y_K = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Donc K (3 ; 1.5)

b°) Pour que ABCD soit un parallélogramme il **suffit** que ses diagonales se coupent en leur milieu ; c'est à dire que le point K soit le milieu de [AC] et de [BD].

$x_K = \frac{x_B + x_D}{2}$	$y_K = \frac{y_B + y_D}{2}$
$3 = \frac{3 + x_D}{2}$	$1.5 = \frac{-5 + y_D}{2}$
$6 = 3 + x_D$	$3 = -5 + y_D$
$x_D = 3$	$y_D = 8$

Vérification : $\frac{3+3}{2} = \frac{6}{2} = 3 = x_K$ $\quad \frac{-5+8}{2} = \frac{3}{2} = 1.5 = y_K$

Exercice 2 :

Aire trapèze DEFC= $\frac{(x+20+25+20)\times 25}{2} = \frac{(65+x)\times 25}{2}$

Aire rectangle ABCD =25(x+20+25)=25(x+45)

Mise en équation : Aire trapèze = $\frac{3}{5}$ Aire rectangle

$\frac{25(65+x)}{2} = \frac{3}{5}\times 25(x+45)$

$25(65+x)=15(x+45)\times 2$
$25(65+x)=30(x+45)$
$1625+25x=30x+1350$
$275=5x$
$x=275/5$
$x=55$

Vérification : $\frac{25(65+55)}{2} = 1500$

$\frac{3}{5}\times 25(55+45) = 1500$

Exercice 3 :

Notons x l'aire de ce jardin

$\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x + 150 = x$

$\frac{3}{6}x + 150 = x$

$150 = x - \frac{1}{2}x$

$150 = \frac{1}{2}x$

$x = 300$

L'aire de ce jardin est donc $300m^2$.

Vérification : $\frac{1}{3}(300) + \frac{1}{6}(300) + 150 = 300$

Exercice4 :

Notons x la part de la seconde personne.
La part de la première est alors x –240

La part de la 3^{ième} est $\frac{3}{4}(x+x-240) = \frac{3}{4}(2x-240)$

On a alors l'équation suivante :

$x + x - 240 + \frac{3}{4}(2x-240) = 9800$

$2x + \frac{6x}{4} - 240 - 180 = 9800$

$\frac{7x}{2} = 9800 + 420$

$x = \frac{2}{7}(10220)$

$x = 2920$

La part de la 2nde personne est donc de 2920F, celle de la 1ère de 2680F(2920-240) et celle de la 3^{ième} de 4200F ($\frac{3}{4}(2\times 2920 - 240)$).

Vérification : 2920+2680+4200=9800

Exercice 5 : $(x+8)(x+2)=x(x+5)+51$
$x^2+2x+8x+16=x^2+5x+51$
$10x+16=5x+51$
$5x=35$
$x=7$

Vérification : $(7+8)(7+2)=135$ et $7(7+5)+51=135$

Mémo :

$-\frac{x-2}{7} = -(\frac{x-2}{7}) = -(\frac{x}{7}-\frac{2}{7}) = -\frac{x}{7}+\frac{2}{7}$

$\frac{x}{\frac{3}{4}} = x\times\frac{4}{3} = \frac{4}{3}x$

Si A et B sont deux points de coordonnées respectives (x_A ; y_A) et (x_B ; y_B) alors les coordonnées de I milieu de [AB] sont :

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme , il suffit par exemple de démontrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.

$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Ex : $(x+2)(y-3) = xy - 3x + 2y - 6$
$(x-2)(x-4) = x^2 - 4x - 2x + 8 = x^2 - 6x + 8$

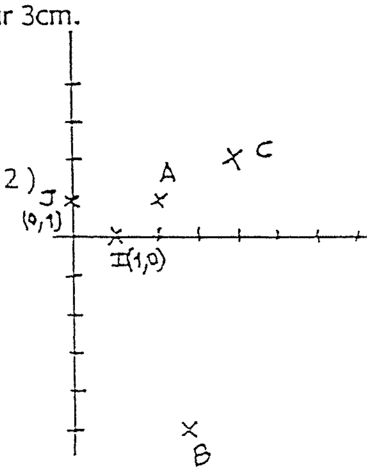
MATHEMATIQUES CONTROLE N° 5

Exercice 1 : Résoudre l'équation suivante et vérifier le résultat

$$8(4 - 3x) \div 2 = 57 - (31x - 5)$$

Exercice 2 : Un triangle ABC d'aire 6 cm² est tel que le segment [BC] est fixe et de longueur 3cm.
Sur quelle(s) ligne(s) fixe(s) le point A peut-il se déplacer ?
(*Faire un schéma*)

Exercice 3 : Dans un repère (O ,I , J) on donne les points : A(2 ; 1)   B (3 ; -5)   C (4 ; 2)
1°) Calculer les coordonnées de K milieu de [AC]
2°) Déterminer alors les coordonnées du point D de manière à ce que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.



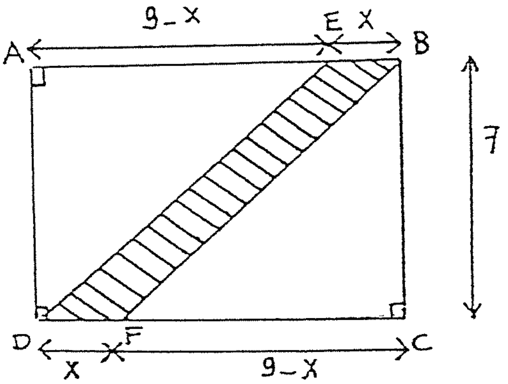
Exercice 4 : Un automobiliste parcourt 570 Kms en trois étapes.

La longueur de la seconde étape est égale au $\frac{2}{3}$ de la première

La longueur de la troisième étape est égale au $\frac{2}{3}$ de la seconde.

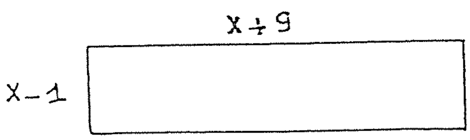
Quelle est la longueur de chaque étape ?

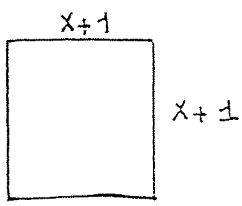
Exercice 5 :



1°) Démontrer que EBFD est un parallélogramme.
2°) Que vaut x pour que l'aire hachurée soit le double de l'aire restante ?

Exercice 6 :
Trouver x pour que le rectangle et le carré ci-dessous aient la même aire.





Exercice 7 : Factoriser les expressions suivantes

$A = 7x + 14b$ $\qquad$ $C = 3a^3 \div 4a^2 - 5a$
$B = 15ax + 7a$ $\qquad$ $D = 7x \div 7$

Barème : Exo 1 : 2pts Exo 2 : 2pts Exo 3 : 3.5pts Exo4 : 4 pts Exo 5 : 4 pts Exo6 : 2.5pts Exo7 : 2 pts

Bon travail à tous.

Correction CONTROLE 5

Exercice 1

$8(4-3x)+2 = 57-(31x-5)$

$32-24x+2 = 57-31x+5$

$32+2-24x = 57+5-31x$

$34-24x = 62-31x$

$-24x+31x = 62-34$

$7x = 28$

$x = \frac{28}{7}$

$x = 4$

Vérification :

$8(4-3\times 4)+2 = -62$

$57-(31\times 4-5) = -62$

exercice n°5

1°) EBFD est un parallélogramme car 2 de ses côtés opposés sont parallèles et égaux. (précisez lesquels : EB = DF = x et (EB) // (DF) car ABCD est un rectangle).

2°) $7x = 2(\mathcal{A}_{AED}+\mathcal{A}_{BFC})$ ($\mathcal{A}$: aire).

$7x = 2\left(\frac{7(9-x)}{2}+\frac{7(9-x)}{2}\right)$

$7x = 7(9-x)+7(9-x)$

$7x = 14(9-x)$

$7x = 126-14x$

$14x+7x = 126$

$21x = 126$

$x = \frac{126}{21}$

$x = 6$

vérification : $7\times 6 = 42$

$2\left(\frac{7(9-6)}{2}+\frac{7(9-6)}{2}\right) = 2(7(9-6)) = 2(7\times 3) = 42$

Exercice 3

Aire rectangle = Aire carrée

$(x-1)(x+9) = (x+1)(x+1)$

$\cancel{x^2}+9x-1x-9 = \cancel{x^2}+x+x+1$

$9x-x-9 = 2x+1$

$8x-9 = 2x+1$

$8x-2x = 1+9$

$6x = 10$

$x = \frac{10}{6}$

$x = \frac{5}{3}$

Vérification :

$\left(\frac{5}{3}-1\right)\left(\frac{5}{3}+9\right) = \left(\frac{5}{3}-\frac{3}{3}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{27}{3}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{32}{3} = \frac{64}{9}$

$\left(\frac{5}{3}+1\right)\left(\frac{5}{3}+1\right) = \left(\frac{5}{3}+\frac{3}{3}\right)\left(\frac{5}{3}+\frac{3}{3}\right) = \frac{8}{3}\times\frac{8}{3} = \frac{64}{9}$

Exercice 1

$A = 7x+14b$

$A = 7(x+2b)$

$B = 15ax+7a$

$B = a(15x+7)$

$C = 3a^3+4a^2-5a$

$C = a(3a^2+4a-5)$

$D = 7x+7$

$D = 7(x+1)$

Exercice 2 :

On a un triangle ABC d'aire 6cm² tel que le segment [BC] est fixe et de longueur 3cm.

Calculons la hauteur h relative au côté BC .(La hauteur relative au côté BC est la distance de A à la droite (BC).

$\frac{3h}{2} = 6$

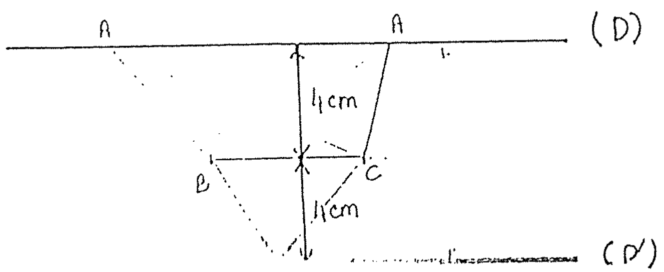
$3h = 6\times 2$

$h = \frac{12}{3}$

$h = 4$

Or l'ensemble des points situés à une distance de 4 cm de (BC) sont les deux droites parallèles à (BC) et distantes de (BC) de 4 cm.

Donc le point A peut se déplacer sur les droites (D) et (D') ainsi construites(*voir schéma*).



Exercice 4 :

Notons L la longueur de la 1ère étape.

Celle de la seconde sera alors $\frac{2}{3}L$, et celle de la troisième sera $\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}L\right) = \frac{4}{9}L$.

D'où l'équation : $L+\frac{2}{3}L+\frac{4}{9}L = 570$

$\frac{9}{9}L+\frac{6}{9}L+\frac{4}{9}L = 570$

$\frac{19}{9}L = 570$

$\frac{9}{19}\times\frac{19}{9}L = \frac{9}{19}\times 570$

$L = 270$

La longueur de la 1ère étape est donc 270kms, celle de la seconde $\frac{2}{3}\times 270 = 180\text{Kms}$ et celle de la troisième $\frac{4}{9}(270) = 120\text{ Kms}$.

Vérification : 270+180+120 = 570

Elève 6

TEST D'ENTREE DANS L'ETUDE DU THEME :
« Equations et problèmes »

Résoudre les équations suivantes :

$t + 52 = 21$ $t = 21 - 52$ $t = -31$	$-3 + z = 14$ $z = 14 + 3$ $z = 17$	$17.3 = -10.3 + t$ $t = 17{,}3 + 10{,}3$ $t = 27{,}6$
$25d = 40$ $d = \frac{40}{25}$ $d = \frac{\cancel{5} \times 8}{\cancel{5} \times 5}$ $d = \frac{8}{5}$	$0.04\ e = 1.8$ $e = 1{,}8 - 0{,}04$ $e = 1{,}76$	$\frac{1}{3}x = \frac{1}{4}$ $x = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}$ $x = \frac{1}{4} \times 3$ $x = \frac{3}{4}$

Claude mesure x centimètres .Tom mesure 15cm de moins que lui. Quelle est la taille de Tom ?
Réponse : $x = \cancel{x} - 15$
$15 = 0x - x$
$2x = 15$

Une maison d'édition propose ses publications à 80% de leur tarif habituel. Le prix habituel d'une de ces publication est de y francs.
Quel est le prix promotionnel de cette publication ?
Réponse : Le prix de cette publication ~~est~~ :

$y = \frac{80}{100}$

$y = \frac{40 \times \cancel{5}}{50 \times \cancel{5}}$

$y = \frac{8 \times \cancel{5}}{10 \times \cancel{5}}$

$y = \frac{4}{5}$

CHAPITRE 4 — Équations et problèmes.

I Mise en équation

En mathématiques, une grandeur que l'on ne connaît pas et que l'on peut calculer à partir des informations de l'énoncé. Elle s'appelle une inconnue.
Très souvent, pour résoudre un problème, on désigne cette grandeur inconnue par une lettre, puis on traduit ce problème pour obtenir une équation.

exemple : Julie a acheté 2 CD roms et 7 disquettes à 4 F pièce. Elle a payé 450,5 F
On ne connaît pas le prix d'un CD rom en F. On choisit la lettre c pour le désigner.
On traduit le problème : prix de 2 CD roms + prix de 7 disquettes = 450,5
d'où l'équation $2c + 7 \times 4 = 450,5$ F

exemple : Je pense à un nombre, je le multiplie par 8, puis j'ajoute 72. Je trouve alors 150.
Notons x ce nombre
$8x + 72 = 150$

II Résolution d'équations

Résoudre une équation d'inconnue x, c'est chercher l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'égalité est vérifiée.
Pour résoudre une équation on peut sans changer l'ensemble solutions :

* ajouter ou retrancher un même nombre ou même expression aux deux membres de l'équation.

ex : $x + 8 = 27$

$x + 8 - 8 = 27 - 8$

$x = 19$

vérif : $19 + 8 = 27$

* multiplier ou diviser par un même nombre non nul ou une expression les 2 membres d'une équation

ex : $45x = -15$

$\frac{45}{45}x = \frac{-15}{45}$

$x = -\frac{1}{3}$

vérif $45\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{45}{3} = -15$

Technique

Pour résoudre une équation du 1er degré (de la forme $ax + b = cx + d$) on utilise les traitements précédents afin :

- regrouper d'un côté du signe "=" tous les termes dans lesquels l'inconnue figure
- regrouper de l'autre côté tous les termes numériques.

On vérifie à la fin que la solution obtenue convient bien (en reportant la solution dans l'équation de départ).

Exemple : Résoudre l'équation $8(4-3x)+2=53-(31x-5)$

$32-24x+2=53-31x+5$

$34-24x=58-31x$

$34-34-24x=58-31x-34$

$-24x=24-31x$

$-24x+31x=24-31x+31x$

$7x=24$

$\frac{7x}{7} = 24$

$\boxed{x = \frac{24}{7}}$

Vérification :

$$8\left(4-3\times\frac{24}{7}\right)+2 = 8\left(4-\frac{72}{7}\right)+2 = 8\left(\frac{28-72}{4}\right)+2 = 8\left(-\frac{44}{77}\right)+2 = -\frac{352}{7}+\frac{14}{7} = -\frac{338}{7}$$

$$53-\left(31\times\frac{24}{7}-5\right) = 53-\left(\frac{744}{7}-5\right) = 53-\left(\frac{744-35}{7}\right) = 53-\frac{709}{7} = \frac{371-709}{7} = -\frac{338}{7}$$

Attention :

Le plus souvent une équation du 1^{er} degré admet une solution et une seule mais, il peut arriver qu'elle n'en admette aucune ou que tout nombre soit solution

ex $2x = 2x + 1$

$2x - 2x = 2x - 2x + 1$

$0 = 1$ impossible

il n'y a pas de solution

ex: $x + 1 = 2\left(4 + \frac{1}{2}x\right) - 7$

$x + 1 = 8 - 7 + x$

$x + 1 = x + 1$

il y a une infinité de solutions

III Résolution de problème du 1^{er} degré

Beaucoup de problèmes concrets se résolvent facilement si on les traduit par une équation

Technique

$1^{ère}$ étape : choix de l'inconnue

2^{e} étape : mise en équation

3^{e} étape : résolution de l'équation

4^{e} étape : vérifier que la solution obtenue convient et qu'elle est acceptable pour le problème concret posé

ex d'application

trouver 3 entiers consécutifs dont la somme est égale à 306

1^{er} étape : choix de l'inconnue

notons n le premier de ces 3 entiers consécutifs, les deux autres s'écrivent $n+1$ et $n+2$

2ᵉ étape : mise en équation

$$n + n + 1 + n + 2 = 306$$

3ᵉ étape : résolution

$$3n + 3 = 306$$

$$3n = 306 - 3$$

$$n = \frac{303}{2}$$

$$n = 101$$

4ᵉ étape : vérif

$$3 \times 101 + 3 = 306$$

Conclusion : les nombres cherchés sont 101, 102, 103 ($101 + 102 + 103 = 306$)

Remarque : le choix de l'inconnu n'est pas unique. On aurait pu par exemple choisir l'entier intermédiaire. Notons x, les 2 autres seraient $x - 1$ et $x + 1$, on a alors :

$$x - 1 + x + x + 1 = 306$$

$$3x = 306$$

$$x = 102$$

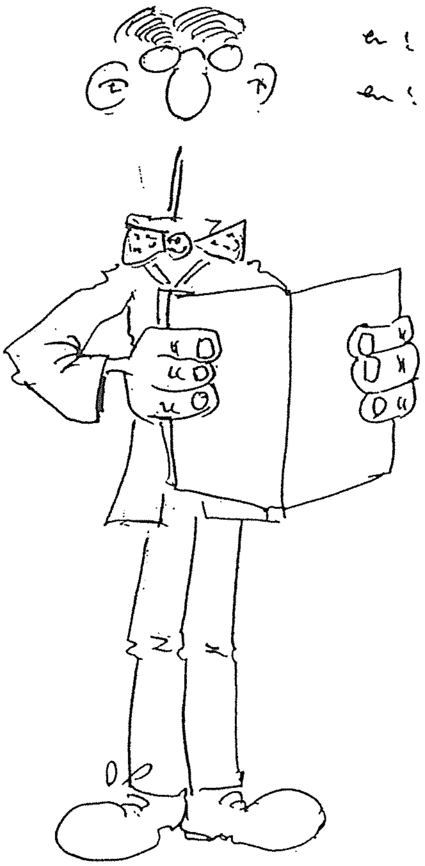
$$x + 1 = 103, \; x - 1 = 101$$

III

OBSERVATION DE PRATIQUES

Le Nouveau RAPPORT
d'Inspection
est
ARRIVE

Monsieur Martin
je constate que vous êtes
en ! 1 – Pos – Neg – Ind
en ! 2 – pnr – pri – prd
en ! 3 – I – nI – nE
en ! 4 – Pos – Ind – Ee
en ! 5 = Sp – Re – Ac.
en ! 6 = 4 – 3 – 6
en ce qui concerne.
la gestion des erreurs.



en ce qui concerne. les
observables périphériques.
l'évaluation. IN. IF co.
de type. Tm Tf. Tf.
d'organisation. stn. p. np.

Impression interne:
Pierre Emmanuel,
a volé ma porte feuille.
pendant la séance
observée ....

PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES OBSERVEES EN CLASSE DE SIXIEME

Jacqueline Borréani, Patricia Tavignot, IUFM de Rouen
Roseline Verdon, DEP Ministère de l'Education

L'étude présentée ici est partie de l'observation, durant toute une semaine en continu, de pratiques pédagogiques de vingt-trois enseignants de mathématiques volontaires, dans toutes leurs classes de sixième et presque chaque séance ayant eu lieu sur cette période (janvier -février 1995). Elle s'inscrit dans la suite d'une première étude, réalisée l'année précédente auprès d'un échantillon représentatif de 450 classes de sixième et portant sur les liens entre les progrès accomplis par les élèves en mathématiques et les pratiques d'enseignement mises en oeuvre par leurs enseignants, telles qu'elles ont été recueillies par le biais d'un questionnaire[1]. Cette deuxième étude, compte tenu du petit nombre de professeurs concernés par l'observation, ne prétend pas, comme la précédente, apprécier l'efficacité de telle ou telle pratique mais bien de mieux connaître les différentes façons dont les professeurs s'y prennent effectivement pour enseigner les mathématiques, en classe de sixième. Cette observation s'est déroulée en milieu d'année scolaire, selon un protocole et une instrumentation précisés ci-après (*voir encadré 1*).

Les résultats de cette étude qui s'appuient sur des données issues de l'observation d'un petit nombre d'enseignants volontaires durant une seule semaine imposent plusieurs remarques. Le volontariat lui-même est un facteur susceptible d'affecter certains des points traités, si l'on fait l'hypothèse que ces enseignants étaient peut-être, plus que d'autres, impliqués dans leur métier, indépendamment du fait, de portée très générale, que la présence d'un observateur influe probablement en partie sur ce qui est observé. En outre, le petit nombre de professeurs observés, exerçant néanmoins dans des régions très différentes et d'âges également divers, ne peut prétendre à l'exhaustivité sur tous les sujets abordés et surtout pas à une quelconque représentativité des pratiques de l'ensemble des enseignants en début de collège (de ce fait, les chiffres annoncés sont à relativiser, pas à négliger). Même s'il paraissait souhaitable de mener une observation assez longue (deux semaines par exemple), la mobilisation d'observateurs ne fut possible que sur une semaine. En dépit de ces limites n'ayant pas toutes même valeur, ces enseignants nous ont permis d'exhiber des grandes catégories de pratiques qui couvrent en grande partie le champ des possibles. Il convient de préciser par ailleurs que l'ambition de ce travail était de présenter principalement, en matière de pratiques pédagogiques valant en sixième, des aspects transversaux aux deux disciplines concernées par cette observation, les mathématiques et le français, laissant ainsi dans l'ombre l'étude d'aspects plus spécifiques à l'enseignement des mathématiques.

La sélection de résultats présentée ici s'ordonne autour de trois axes principaux permettant de décrire les situations d'enseignement dans leurs aspects non nécessairement liés à la discipline mathématique : la gestion du temps effectuée par les enseignants, dans ses aspects structurels et temporels, les outils liés aux acquisitions des élèves, ainsi que les relations professeur-élèves.

[1]Voir la Note d'Information 96.44 (octobre 1996) et le dossier d'Éducation et Formations n°84 (avril 1997) à ce propos.

Encadré 1 :
LES PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE CE TRAVAIL D'OBSERVATION

▪ Le cadre et le dispositif retenus

Une étude exploratoire qui avait porté sur les pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques — et du français — en classe de sixième, en lien avec les progrès réalisés par les élèves (échantillon de quatre cent cinquante classes), s'est prolongée l'année suivante, pendant l'hiver 1995, par une observation in situ d'une bonne vingtaine d'enseignants parmi ceux qui s'étaient portés volontaires à cette fin ; ce prolongement, également exploratoire, constitue un second volet de cette étude. L'objectif du présent volet consiste à repérer puis à décrire et typer des pratiques pédagogiques en matière d'enseignement des mathématiques en sixième, la même approche valant pour l'enseignement du français.
Le principe ayant guidé cette observation des pratiques pédagogiques a été de retenir toutes les classes de sixième (d'une à trois) dans lesquelles enseignaient, en 1994/95, les vingt-trois professeurs de mathématiques retenus, ce qui porte le nombre de classes à quarante-trois. Le protocole et les outils d'observation ont été conçus et élaborés dans le cadre d'une collaboration impliquant deux formateurs d'I.U.F.M. (Institut Universitaire de Formation des Maîtres), l'Inspection Générale de l'Éducation Nationale et la D.E.P.. L'observation a été réalisée par des membres des corps d'inspection, principalement des Inspecteurs Pédagogiques Régionaux, pressentis par l'Inspection Générale et exerçant habituellement dans une académie contiguë. Chaque classe devait être observée pendant une semaine complète dans toutes les séances de mathématiques la concernant sur cette période, ce qui a généré l'observation de cent soixante-deux séances sans séquence longue.
Celles-ci pouvaient relever d'une ou deux activités dominantes parmi celles qui figurent au programme, à savoir la géométrie, les activités numériques ou l'organisation et la gestion des données, et avoir lieu en classe entière, avec ou sans regroupement envisagé des élèves, en demi-classe ou en soutien.
S'agissant des outils d'observation, ils ont été de deux types :
• des tableaux de recueil, utilisés en séance, prenant en compte plusieurs éléments matériels ou immatériels repérables dans une situation donnée, encore appelés observables.
• des documents annexes, remplis aux marges des séances et relatifs à l'enseignant, à la classe observée et à la séance, rassemblant des informations complétant l'observation en séance sur d'autres points ou encore sur des points difficilement observables sur quelques séances.

▪ Les unités observées

Dans la description et l'analyse des pratiques des enseignants, trois niveaux doivent être distingués : la *séance*, qui est une première unité importante (en fait, un agrégat de phases), la *classe*, qui correspond à l'ensemble des séances observées dans une classe particulière, et le *professeur*, représenté par l'ensemble des séances observées dans les différentes classes dont il a la responsabilité.
Cent soixante-dix séances apparaissaient dans les emplois du temps des quarante-trois classes observées, dont cent soixante-deux ont pu faire l'objet d'une observation.

▪ Les principaux éléments constituant les outils d'observation

• Du point de vue du *type de séance*, cent quarante sur les cent soixante-deux observées se sont déroulées en <u>classe entière</u> dont trois ont été uniquement consacrées à une évaluation écrite, treize ont concerné du <u>soutien</u> impliquant tout ou partie des élèves et neuf un travail en <u>demi-classe</u>.

• Trois *domaines d'activités dominants* ont été retenus : la géométrie (quatre-vingt-sept séances non entièrement consacrées à une évaluation écrite), les activités numériques ou l'organisation et la gestion des données (trente-huit séances), et des activités mixtes, par exemple la géométrie accompagnée d'activités numériques (trente-quatre séances).
• Hormis le début et la fin d'une séance, cinq *phases* principales avaient été retenues a priori pour ce travail d'observation :
- une phase d'« activités de classe » qui recouvre un ensemble de tâches accomplies sous la direction du professeur et visant à l'apprentissage d'une notion mathématique, au réinvestissement de connaissances en cours d'apprentissage ou supposées acquises, ou bien à la prise en compte des difficultés rencontrées par les élèves ou des méthodes de raisonnement ;
- une phase de « institutionnalisation du savoir » consistant à homogénéiser les connaissances de la classe et formaliser mathématiquement les savoirs, hors du contexte des activités mises en oeuvre dans la classe (définitions, théorèmes, démonstrations, algorithmes) ;
- trois phases de correction : une « correction d'activités » (exercices donnés en classe), une « correction d'exercices cherchés hors classe » et une « correction de synthèse de connaissances » (problème ou interrogation écrite).

I - La gestion du temps par les enseignants

Pour la clarté de la présentation, il est nécessaire de distinguer, dans la gestion du temps, ce qui est purement interne à la séance de ce qui lui est externe : la « gestion interne » correspond à la structure de la séance ainsi qu'à sa durée ou à celle de ses composants (phases particulières définies dans l'encadré) ; la « gestion externe » correspond à l'organisation de l'enseignement de la discipline dans une classe donnée au long de l'année, et à certains actes professionnels (non exposés ici) que lui consacre un enseignant dans le temps. Par ailleurs, c'est parce que la séance (qui est à la base de l'observation) est en fait un agrégat de phases que le traitement du niveau phase, à l'instar de celui du niveau séance, conduit, dans la présentation des résultats, à remonter au niveau classe puis professeur, l'objectif final étant en effet d'éclairer ce dernier niveau. Bien que la multiplicité des niveaux de restitution des résultats introduise une difficulté évidente de lecture, il nous semble délicat d'en faire l'économie, dans la mesure où les conclusions relatives aux divers niveaux ne vont pas nécessairement dans le même sens.

1°/ Les aspects temporels de la gestion du temps

Dans presque toutes les classes observées, la majorité des élèves a plus de trois heures hebdomadaires en mathématiques. On trouve, dans des proportions à peu près égales, deux formules qui répondent à des logiques différentes : un volume horaire uniforme dans la classe ou bien un volume horaire différencié selon les élèves. En cas de volume uniforme, deux classes sur trois environ ont une moyenne hebdomadaire de quatre heures ; la différenciation du volume horaire implique l'existence de « combinaisons » horaires dans lesquelles quatre heures correspondent très souvent à un plafond, c'est le cas de dix-sept classes sur les vingt et une ayant un horaire différencié.
Les cours de mathématiques ont lieu essentiellement le matin, souvent dans la deuxième partie de la matinée, ce qui se traduit, pour deux classes sur trois, par un positionnement soit de la totalité des séances uniquement le matin, soit de tout au plus une séance l'après-midi.
Étant rappelé que la durée officielle d'une séquence horaire étant en général de 50 ou 55 minutes selon l'établissement, on a observé qu'un cours de mathématiques dure effectivement entre 45 et 61 minutes (pas de séquence longue) : les deux tiers des séances de mathématiques, tous types confondus, ont une durée totale allant de 50 à 55 minutes ; 11 % seulement se situent en deçà de cet intervalle. Plusieurs raisons sont susceptibles d'expliquer ces variations constatées, la plus répandue étant sans doute le temps de mise au travail des élèves. Une classe sur quatre et presque un professeur sur deux seraient ainsi concernés par l'existence d'au moins une durée de séance relativement courte ; à l'opposé, on constate une durée relativement longue pour au moins une séance dans une classe sur trois et chez presque un professeur sur deux. Ce phénomène n'exclut pas des formes de compensation entre temps courts et temps longs dans une même classe.
On observe par ailleurs des temps "morts" entre deux phases consécutives ou bien entre deux moments d'une même phase : environ une séance sur trois, tous types confondus, semble concernée par des temps morts compris essentiellement entre 2 et 5 minutes, certains pouvant atteindre 7 ou 9 minutes. Ces temps "morts" traduisent une certaine discontinuité faisant partie intégrante de la gestion du temps interne à la séance. Douze professeurs (sur les vingt-trois observés) apparaissent concernés par ce phénomène, certains lors d'une seule séance dans une classe donnée, d'autres à toutes les séances ou presque d'une ou plusieurs classes ; cette différence, même ténue, semble par conséquent liée à l'enseignant.

En classe entière, deux phases ont tendance à être nettement plus longues que les autres (*tableau 1*) : celle de « correction de synthèse de connaissances » et celle d'« activités de classe », la première de façon compréhensible si le problème cherché à l'extérieur ou l'évaluation écrite en question est corrigé(e) en une seule fois voire en deux fois, la seconde parce que constituant en général un « coeur » de séance. À l'opposé, deux autres phases ont tendance à être plutôt courtes : la « correction d'activités » et la « institutionnalisation du savoir », toutes deux de durée assez hétérogène. Enfin, la correction d'exercices ayant donné lieu à du travail en dehors de la classe apparaît comme une phase de durée intermédiaire, avec des variations qui s'exercent au-delà d'une valeur probablement jugée incompressible ; sa durée, comme celle des « activités de classe », est un peu plus homogène.

Tableau 1 : Caractéristiques de la durée des différentes phases apparaissant en classe entière

Caractéristiques de la durée absolue d'une phase / **Nature de la phase**	Durée modale (mn)	Durée médiane (mn)	Durée moyenne (mn)	Écart-type (mn)	Coefficient de variation
Correction de synthèse de connaissances	15	18	23	14	0,64
Activités de classe	20	20	21	11	0,52
Correction d'exercices à faire hors classe	10	14	16	8	0,51
Capitalisation du savoir	10	10	13	9	0,71
Correction d'exercices cherchés en classe	2	9	12	10	0,86

2°/ Les aspects structurels de la gestion du temps

Tandis qu'une séance en classe entière est susceptible de présenter n'importe quelles phases retenues pour l'observation, une séance en demi-classe (travaux dirigés) ou consacrée à du soutien présente exclusivement des « activités de classe » et, éventuellement, les corrections qui en découlent. De son côté, le domaine d'activités dominant caractérisant la séance — géométrie, activités numériques ou activités mixtes — ne semble pas affecter grandement son déroulement.

La phase d'« activités de classe » s'avère la plus répandue de toutes et constitue le coeur ou le noyau d'une séance en classe entière, à la périphérie duquel on peut rencontrer une phase de correction d'exercices donnés en classe, assez rarement il est vrai. Cette phase prééminente est avant tout discontinue, c'est-à-dire interrompue par une ou deux autres phases. Au second plan, on trouve deux phases, à peu près aussi fréquemment l'une que

l'autre, qui sont complémentaires des « activités de classe » : d'une part, la correction d'exercices cherchés hors classe, phase majoritairement continue lorsqu'elle est placée en première partie de séance, ce qui est très souvent le cas ; d'autre part, l'« institutionnalisation du savoir » qui intervient très rarement en début de séance et ponctue, durant le cours ou à la fin, des phases d'« activités de classe » et de correction d'exercices effectués en classe ou en dehors de la classe. La phase de « correction de synthèse de connaissances », peu rencontrée, toujours continue et fréquemment placée en tête ou en fin de séance, apparaît comme un pôle très autonome par rapport aux autres phases constitutives d'une séance en classe entière.
Les trois principales phases ainsi observées dans une séance de mathématiques — « activités de classe », « institutionnalisation du savoir » et « correction d'exercices cherchés hors classe » — sont, en règle générale sur la période d'observation, régulièrement pratiquées par les enseignants dans leurs classes respectives. Leur apparition systématique lors de séances en classe entière touche plus la première (douze professeurs sur les vingt-trois observés, dans leurs vingt classes) que les deux autres phases ; celles-ci peuvent apparaître plus ou moins fréquemment selon la classe que l'enseignant a en face de lui.

Au cours d'une même séance de mathématiques, des phases différentes peuvent se succéder de manière linéaire ou bien s'entremêler (en général pas plus de deux, dans ce cas). Par ailleurs, la position de la phase d'« institutionnalisation du savoir », au cours d'une séance donnée d'une part, par rapport à la phase d'« activités de classe » d'autre part, représente une caractéristique très importante des séances en classe entière. Ces deux éléments permettent de dégager trois grands modes de structuration d'un cours de mathématiques en classe entière :
- La phase d'« institutionnalisation du savoir » précède en totalité ou en partie seulement celle d'« activités de classe », durant presque le quart des séances observées en classe entière.
- À l'opposé, l'« institutionnalisation du savoir » suit, également en totalité ou partiellement, les « activités de classe », lors d'environ le tiers des séances en classe entière.
- Un troisième mode, le plus représenté, correspond en fait à une structuration moins marquée de la séance, celle-ci ne comprenant pas à la fois une phase d'« institutionnalisation du savoir » et une autre d'« activités de classe ». Ces séances sont orientées vers des corrections, souvent complétées par des « activités de classe », plus rarement par une « institutionnalisation du savoir ».

On note enfin que, comparées à l'ensemble des séances se déroulant en classe entière, celles qui sont exclusivement consacrées à des activités numériques ou à de la gestion des données (23 % de l'ensemble) ont une légère tendance à être davantage conformes à la première structuration mise en évidence : ce constat paraît lié à la difficulté d'introduire d'emblée une phase d'« activités de classe », quand l'enseignant aborde une nouvelle notion dans le domaine numérique. Précisons qu'à l'époque où a eu lieu l'observation dans les classes comme en beaucoup d'autres endroits en sixième, la géométrie était le domaine d'activités prédominant avec, au programme, la symétrie axiale. Beaucoup de classes (vingt-sept sur les quarante-trois observées) ont connu tout à la fois géométrie et activités numériques ou gestion des données, onze n'auront même connu que la géométrie.

Même si elle n'a porté que sur une semaine, l'observation des pratiques d'enseignement des mathématiques en classe de sixième a permis de faire ressortir une pratique dominante de l'enseignant dans une classe donnée, puis dans l'ensemble de ses classes. Cette tendance à structurer les séances en classe entière paraît liée, au moins en partie, à la conception que l'enseignant se fait d'un cours de mathématiques ; elle est susceptible d'évoluer, notamment sous l'influence de directives portant sur le rôle des « activités de classe » en mathématiques, d'une part, et de l'évolution du contexte, d'autre part.

Cinq grandes pratiques ont été observées :

- Une tendance à structurer un cours de mathématiques considérée comme plutôt « novatrice », consistant à positionner la phase d'« activités de classe », en tout ou partie, avant celle de « institutionnalisation du savoir » et ce, durant toute la semaine et dans toutes les classes de l'enseignant ; huit professeurs (sur les vingt-trois observés) pratiquent de cette façon.
- Un mode de structuration des séances en classe entière considéré comme plutôt « traditionnel » et observé chez trois professeurs, selon lequel la phase de « institutionnalisation du savoir » semble, au contraire, avoir un rôle moteur tout au long de la semaine dans toutes les classes de l'enseignant.
- Cinq autres professeurs ont tendance à structurer leurs séances de façon différente selon la classe à laquelle ils s'adressent.
- Un quatrième mode de structuration qualifié de « mixte », observé chez quatre professeurs qui semblent ne pas avoir arrêté de dominante précise dans quelque classe que ce soit durant la semaine : tantôt les « activités de classe » donnent le ton, tantôt la « institutionnalisation du savoir » l'emporte.
- Enfin, les trois derniers professeurs ont une pratique plus difficilement caractérisable dans la mesure où, dans toutes leurs classes, les séances en classe entière sont tournées vers une ou deux phases et ne comprennent pas à la fois des « activités de classe » et une « institutionnalisation du savoir ».

II - Les outils liés aux acquisitions des élèves

1°/ Le travail à chercher en dehors de la classe

▫ Pendant cette semaine d'observation, on a constaté que les séances en demi-classe ne donnaient pas lieu à une distribution de travail à effectuer en dehors de la classe ; c'est le cas, en revanche, des séances en classe entière (huit fois sur dix) et, dans une moindre mesure, des séances de soutien (quatre cas sur treize).

▫ Dans toutes les classes, sauf une, du travail a été demandé aux élèves au moins une fois durant la période d'observation, et dans la grande majorité de ces classes, les élèves ont reçu du travail au moins une séance sur deux ; dans un peu plus de la moitié des classes, cela a été le cas au moins à chaque séance en classe entière. Si la fréquence de distribution de travail dans les classes semble dépendre de leur niveau cognitif tel qu'il est perçu par l'enseignant — les classes d'un niveau moyen jugé conforme à celui des classes de sixième de l'établissement étant proportionnellement plus nombreuses à en recevoir systématiquement —, ce sont principalement le type de séance et les choix de l'enseignant à un moment donné qui priment.

▫ Presque tous les enseignants semblent donner très régulièrement du travail dans leur(s) classe(s), certains l'ayant même fait systématiquement en classe entière durant la période d'observation (treize enseignants sur les vingt-trois observés) et ce, indépendamment de la perception cognitive des classes dont ils ont la charge.
À quelques exceptions près, la distribution du travail intervient classiquement en fin de séance, le plus souvent en une seule fois. Le travail comporte, dans la plupart des cas, un ensemble d'exercices, accompagné ou non d'une leçon à apprendre ; dans les autres classes, on

a constaté que les élèves avaient à effectuer, hormis d'éventuels exercices, une recherche ou bien encore un devoir. Le manuel — complété, plus rarement, par un énoncé dicté ou écrit au tableau — reste le support le plus fréquemment utilisé dans la distribution de travail (près de 45 % des séances) ; des fiches distribuées par le professeur représentent un second type de support, ainsi qu'on a pu le constater dans presque trois séances sur dix.

▪ La correction en classe d'exercices cherchés hors classe permet de préciser le genre des exercices qui ont été, à un moment donné, distribués en séance : application, approfondissement, exercice entraînant une réexplication, introduction de tout ou partie d'une notion, ou encore récapitulation. Ce sont les exercices d'application directe des notions vues en cours, associés ou non à d'autres genres comme l'approfondissement essentiellement, qui forment en fait le type dominant. Au cours d'une même séance, les genres d'exercices corrigés sont en fait peu diversifiés, exception faite de certains exercices qui présentent intrinsèquement un double ou triple aspect.

▪ Durant la semaine d'observation (dans une même classe), il peut être corrigé d'un à quatre genres d'exercices, mais la pratique dominante consiste à en corriger un ou deux dans des proportions égales. Les exercices d'application l'emportent, combinés ou non à tous les autres genres possibles (une combinaison de genres observée sur la semaine implique en général une différenciation de ces derniers d'une séance sur l'autre, même minime).

▪ Différencier ou ne pas différencier les genres d'exercices corrigés selon la classe s'observe dans des proportions équivalentes parmi les professeurs responsables de plusieurs classes. C'est l'existence d'un tronc commun constitué en général d'exercices d'application qui paraît bien révéler une conduite en parallèle au moins partielle des classes. En outre, il semblerait qu'une perception, cognitive et éventuellement comportementale, défavorable d'une classe aboutisse à une moindre diversification des corrections et donc aussi, en amont, des exercices donnés.

Dans l'ensemble, les professeurs entourent la distribution aux élèves de travail à faire en dehors de la classe de certaines précautions :
- Onze enseignants (sur les vingt-deux concernés) ont ainsi *vérifié*, au moins une fois durant la période d'observation, *la prise de notes du travail demandé sur le cahier de textes individuel des élèves*. Une telle pratique a été observée dans la moitié des classes dont le niveau de connaissances était perçu comme plus faible que la moyenne des classes de sixième au collège, et dans le quart de celles qui étaient considérées comme inattentives.
- Neuf enseignants *se sont assurés*, au moins une fois durant cette semaine, *de la compréhension des énoncés par leurs élèves*. On a observé ce type de précaution dans quatre classes sur dix dont le niveau de connaissances était jugé plus faible que la moyenne des classes de sixième, ainsi que dans trois classes sur dix perçues comme manquant de motivation.
- Enfin, on a observé que quinze professeurs ont *amorcé avec leurs élèves*, au moins une fois durant la semaine, *le travail qu'ils leur avaient donné à faire en dehors de la classe*. Une telle pratique apparaît moins fréquente s'il s'agit de classes dont le niveau de connaissances est jugé plus faible que le niveau moyen en sixième dans l'établissement ; en revanche, les enseignants pratiquent de cette façon dans presque toutes les classes manquant de motivation.

De ces trois types de précaution qui viennent d'être décrits, l'amorce du travail demandé aux élèves apparaît par conséquent comme le plus répandu ; lorsqu'un enseignant procède ainsi, il le fait généralement dans l'ensemble de ses classes, avec cependant une modulation selon la séance. Par ailleurs, la vérification de la bonne compréhension des énoncés est liée, dans une certaine mesure, aux deux autres attitudes : quand un enseignant se soucie de la bonne compréhension des énoncés, il a également tendance à amorcer le travail, voire à vérifier les cahiers de textes.

2°/ Les modes d'évaluation des acquis des élèves

L'évaluation des acquis des élèves peut prendre diverses formes, dont les interrogations écrites, aux durées variables. C'est ainsi que les observateurs ont repéré un certain nombre d'actes évaluatifs dès le début d'une séance ou en fin seulement :
- Seize séances (sur les cent soixante-deux observées), essentiellement en classe entière, ont débuté par une évaluation écrite sommative dont la durée n'était principalement ni vraiment courte ni vraiment longue : neuf ont duré entre 10 et 35 minutes, alors que quatre ont duré au plus 5 minutes et trois plus de 50 minutes.
- Quatorze autres séances (sur les cent quarante-six restantes) ont commencé par une interrogation orale des élèves et une remémoration des résultats du cours précédent, cette pratique touchant ainsi une douzaine de classes (sur les quarante-trois observées) et ce, à l'initiative de sept professeurs sur vingt-trois. Ce genre d'évaluation peut durer jusqu'à 12 minutes et plusieurs professeurs le pratiquent dans toutes leurs classes au début d'une ou deux séances.
- Une seule séance s'est terminée par une évaluation écrite de 16 minutes mais elle concernait, en fait, une classe très particulière.
- Quinze séances se sont conclues par un bilan écrit ou oral de leur contenu ; sept enseignants ont procédé de cette façon dans neuf classes au moins une fois. Ces bilans sont en général de très courte durée (au plus 2 minutes) mais peuvent parfois atteindre 5 ou 10 minutes.

En outre, tous les enseignants recourent plus ou moins à d'autres types de pratiques évaluatives dans le courant même des séances : ils sont alors destinés à cerner et contrôler la façon dont les élèves progressent dans l'appropriation des notions qui sont en cours d'apprentissage. Bien que leur détection soit particulièrement délicate dans un processus d'observation, il est possible d'affirmer que les évaluations formatives sont majoritaires, à portée individuelle dominante durant les activités de classe et les corrections qui y sont directement liées, à portée collective dominante au contraire, durant les phases d'institutionnalisation du savoir et de correction d'exercices cherchés hors classe.

III - Les relations professeur-élèves

La plupart des enseignants assurent un suivi individuel de leurs élèves sur des questions pédagogiques ou personnelles. Ce suivi s'exerce principalement en début de séance (séance de soutien ou en classe entière), mais aussi tant au début qu'en fin de séance. Certains l'assurent à peine une séance sur deux, d'autres l'assurent plus souvent.

Au cours d'une séance, les élèves sont susceptibles d'intervenir en posant des questions ou en émettant des remarques. Pendant la phase d'activités de classe, le climat sonore semble ne pas empêcher les enseignants d'être réceptifs aux interventions de leurs élèves quand elles ont lieu ; l'indifférence permanente de la part d'un professeur apparaît comme un comportement plutôt rare pendant une telle phase et les réactions négatives absentes. Lorsque des interventions ont lieu, elles sont le plus souvent réinvesties sans tarder. La position physique de l'enseignant dans la salle de classe n'est pas indifférente : on observe que le fait de se montrer souvent « satellite » (circuler et contrôler ce que font les élèves) est plus fréquemment associé à une bonne réceptivité aux remarques des élèves, tandis que ne pas l'être ou l'être peu est plutôt associé au fait d'afficher parfois de l'indifférence ou de réinvestir les remarques de manière différée.

Enfin, dans le système relationnel que l'enseignant met progressivement en place avec sa classe, il arrive que certains élèves voient leur participation en séance davantage requise, à des moments plus ou moins précis. Ces sollicitations préférentielles s'adressent le plus souvent à trois ou quatre élèves de telle ou telle classe et peuvent avoir plusieurs fonctions concomitantes (dynamisation du climat relationnel entourant les apprentissages, valorisation des comportements positifs peu visibles, neutralisation de ceux qui sont perturbants, élaboration d'un savoir commun par la mise au jour d'obstacles cognitifs et un travail sur les erreurs qui en sont la manifestation. Cette utilisation d'« élèves-appui » dans une classe n'est pas forcément consciente (neuf enseignants seulement, sur les vingt-trois observés, reconnaissent s'appuyer sur de tels élèves dans dix-huit classes) et révèle parfois une grande capacité à jouer sur leurs caractéristiques sur le plan affectif (tendance d'un élève à se montrer leader, timide, en marge ou autre chose) et cognitif (capacités et résultats) dans un contexte de classe particulier.
Tandis que certains enseignants privilégient une diversification des portraits affectifs ou des caractéristiques cognitives qu'ils mobilisent, d'autres diversifient simultanément les deux registres dans le choix des élèves qu'ils sollicitent. Par ailleurs, face à plusieurs classes, les enseignants modulent apparemment leurs choix d'élèves-pivots de façon plus ou moins marquée selon la classe.

Références bibliographiques

* G. Bachelard, "La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance objective", Paris, éd. Vrin, 1937.
* G. Brousseau, "Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques" in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 4 n°2, 1983, pp. 165-198, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.
* G. Brousseau, "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques" in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 n°2, 1986, pp. 33-115, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.
* R. Douady, "Jeux de cadres et dialectique outil-objet" in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 7 n°2, 1986, pp. 5-31, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.
* Y. Chevallard, "Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique", in Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 12 n°1, 1992, pp. 73-111, Grenoble, éd. La Pensée Sauvage.
* Y. Chevallard, "Pour une analyse didactique de l'évaluation", fascicule I.R.E.M., Aix-Marseille, 1986.
* J. Piaget, "Six études de cas en psychologie", Genève, éd. Noël Gonthier, 1964.

"Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques et progrès des élèves", *Note d'Information* 96.44, MEN-Direction de l'évaluation et de la prospective, octobre 1996.

Pratiques pédagogiques de l'enseignement des mathématiques et progrès des élèves, Les dossiers d'Éducation et Formations n°84, MEN-Direction de l'évaluation et de la prospective, avril 1997.

Liste des participants

NOM Prénom	Académie	Adresse administrative
ARTAUD Michèle	Aix-Marseille	IUFM
AUBERTIN Jean-Claude	Besançon	IUFM de Franche-Comté 57 rue de Montjour 25000 - BESANCON
BAUMAN Odile	Besançon	Collège "entre-Deux-Velles" 25660 - SAONE
BESSOT Annie	Grenoble	Laboratoire Leibniz Grenoble
BONNET Jean-Pierre	Créteil	CIO 80 rue Henri Barbusse 93300 - AUBERVILLIERS
BONNEVAL Louis-Marie	Poitiers	Lycée Victor Hugo 10 rue Victor Hugo 86034 - POITIERS
BORREANI Jacqueline	Rouen	Collège le Cèdre Place Touyé 76380 - CANTELEU
BROUSSEAU Guy	Bordeaux	IUFM d'Aquitaine et Université de Bordeaux
CARRA Marie-Thérèse	Grenoble	Collège le Savarrat 38160 - ST MARCELLIN
CECCONI Serge	Grenoble	Collège de Carbleiré 38500 - VOIRON
CHEVALLARD Yves	Aix-Marseille	IUFM
CHEYMOL Maryse	Poitiers	Lycée du Bois d'Amour 9 rue de la Garenne 86034 - POITIERS cedex
CIRADE Gisèle	Aix-Marseille	IUFM D'Aix-Marseille Site de la Canebière 63 La Canebière 13001 - MARSEILLE
COMIN Eugène	Bordeaux	Lycée Arnaud Daniel 24600 - RIBERAC
CORTET Annie	Dijon	Lycée Gustave Eiffel 21000 - DIJON
COULANGE Lalina	Grenoble	Laboratoire Leibniz - Grenoble

COUTAREL Olivier	Clermont-Fd	IUFM d'Auvergne 20 avenue Bergougnan 63039 - CLERMONT-FD
DENIS Marie-Edwige	Nantes	Lycée Jean Perrin 20 rue du Château 44400 - REZE
DEPREZ Michèle	Versailles	IUFM centre d'Etiolle Domaine du Saulchoix 91450 - SOING sur SEINE
DESNAVRES Catherine	Bordeaux	Collège Les Lesques 33340 - LESPARRE
DONTENWILL Sylvie	Besançon	Collège Gérome 2 rue de la Préfecture 70014 - VESOUL
FAUVIN Nadette	Orléans-Tours	Lycée Duhamel du Monceau 16 avenue de France 45300 - PITHIVIERS
GARDES Denis	Dijon	Lycée Parriat 71 MONTCEAU-les-MINES
GAUD Dominique	Poitiers	LPI du Futuroscope 86136 - JAUNAY CLAN
GIRMENS Yves	Montpellier	IUFM de Montpellier Site de Perpignan 3 rue Sauvy 66000 - PERPIGNAN
GRANDJEAN Christine	Besançon	Collège Stendhal 25 avenue du Commandant Monceau BP 1635 25010 - BESANCON cedex
GRIMAUD Martine	Limoges	Collège Anatole France 6 allée Marcel Proust 87280 - LIMOGES cedex
GUICHARD Jean-Paul	Poitiers	Collège Mendès France BP 15 79201 - PARTHENAY cedex
JOLLIVET Marie-Claire	Poitiers	IUFM de Poitiers Site d'Angoulème 16022 - ANGOULEME cedex
JULLIEN Michel	Aix-Marseille	Lycée Michelet 21 avenue Foch 13004 - MARSEILLE
JUSSIAUME Loïc	Poitiers	Lycée du Bois d'Amour 9 rue de la Garenne 86034 - POITIERS cedex

LAMARTINIERE Gérard	Poitiers	LPI du Futuroscope 86136 - JAUNAY CLAN
LARGUIER Mirène	Montpellier	Collège Ambrussum 34400 - LUNEL
LE QUANG Geneviève	Clermont-Fd	Collège Molière 52 rue Molière 63110 - BEAUMONT
LENFANT Agnès	Reims	IUFM de Reims 11 rue Gabriel Voisin 51100 - REIMS
LORRAIN-NICOLAS Brigitte	Nancy-Metz	IUFM de Lorraine 16 rue de la Victoire 57955 - MONTIGNY LES MEZE
MARGOLINAS Claire	Clermont-Fd	IUFM
MAROT Madeleine	Poitiers	Collège C. Guérin Avenue Mendès France 86290 - VOUNEUIL/VIENNE
MATHERON Yves	Aix-Marseille	Lycée Marieilleveyre 83 Traverse Parangon 13008 - MARSEILLE
MERCIER Alain	Aix-Marseille	IUFM Marseille
MILLET Jean-Luc	Limoges	IUFM du Limousin 209 bd de Vanteaux 87000 - LIMOGES
MUNIER Marie-Hélène	Nancy-Metz	Lycée Poincaré 2 rue de la Visitation 54000 - NANCY
NOIRFALISE Annie	Clermont-Fd	Université Blaise Pascal Clermont-Fd
NOIRFALISE Robert	Clermont-Fd	Université Blaise Pascal Clermont-Fd
PERRIN Marie-Jeanne	Paris	IUFM d'Arras
PETIT Serge	Strasbourg	IUFM d'Alsace Site de Sélestat 1 rue Proeliliche 67600 - SELESTAT
POIRET-LOILIER Dominique	Reims	Collège Thibaud de Champagne 51170 -FISMES
REYNAUD Janine	Nice	Lycée Bonaparte Avenue Winston Churchill 83000 - TOULON

ROBIN Claude	Poitiers	Collège C. Guérin 86210 - VOUNEUIL/VIENNE
ROUSSET BERT Suzette	Strasbourg	Lycée Couffignal 11 route de la Fédération 67200 - STRASBOURG
SAINT-GEORGES Monique	Limoges	IUFM du Limousin 209 bd de Ventoux 87036 - LIMOGES CEDEX
SECO Michel	Montpellier	Lycée Loubatières 34300 - AGDE
TONNELLE Jacques	Aix-Marseille	Lycée Joliot-Curie Avenue des Goums 13400 - AUBAGNE
VENTRE Roland	Créteil	Collège des Hyverneaux 77150 - LESIGNY
VERDON Roselyne	Paris	MEN DPD 142 rue du Bac 75007 - PARIS
VERGNE Claudine	Montpellier	Lycée Diderot 11100 - NARBONNE
VOSGIEN Françoise	Dijon	Lycée Montchapet Boulevard Pompom 21000 - DIJON
WOILLEZ Dominique	Bordeaux	Collège Emile Combes 33000 - BORDEAUX