« LE BARMAN AVEUGLE AVEC DES GANTS DE BOXE »

Introduction aux graphes

Véronique JUILLAC, Lycée Montdory (Thiers)

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIII^{e} siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg (Les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ), le problème de coloriage de cartes, celui du voyageur de commerce, … .

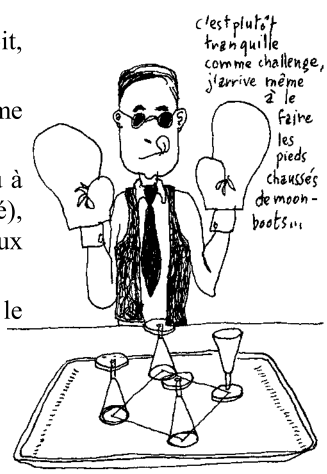
La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales, les mathématiques …
De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseau de communication, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques …
Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

L'enseignement des graphes en terminale ES est entièrement fondé sur la résolution de problèmes. L'objectif est de savoir modéliser des situations par des graphes et d'identifier, en terme de propriétés des graphes, la question à résoudre.

L'activité qui suit, peut permettre d'introduire aux élèves la notion de graphes. Elle met en évidence l'intérêt et la puissance des graphes dans la résolution de problèmes.
Elle est tirée de celle présentée par Nathalie Revol (professeur à l'Ecole Normale Supérieure de Lyon) lors de sa conférence sur les graphes au Colloque Inter-IREM « Lyon-Confluence » (2002).

Activité : « Le barman aveugle avec des gants de boxe »

1°) Règle du jeu



- Quatre verres sont sur un plateau. Ils sont disposés aux sommets d'un carré, tantôt à l'endroit, tantôt à l'envers.

- Un barman aveugle et avec des gants de boxe essaie de mettre tous les verres dans le même sens (peu importe le sens).

- A chaque fois qu'il va faire un essai, une personne farceuse mais honnête tourne le plateau à sa guise (rotation de 0°, 90°, 180° ou 270° pour que les verres restent aux 4 sommets du carré), le laisse effectuer sa manipulation (retourner un verre ou deux : le barman n'a que deux mains !) puis lui dit s'il a réussi.

Remarque expérimentale : on ne peut pas partir d'une situation où tous les verres sont dans le même sens !

2°) Le problème posé

Le barman peut-il arriver à mettre tous les verres dans le même sens ?

3°) Expérimentation

Réaliser plusieurs fois le jeu en observant les différentes situations obtenues.

Mise en œuvre du jeu : un élève pour manipuler le plateau (une personne farceuse mais honnête !) et un autre élève, tournant le dos à la scène (un barman aveugle), pour donner des ordres de manipulation (avec des gants de boxe). Pour faciliter la communication, les manipulations voulues seront énoncées sous forme de directions (Nord-Sud, Nord-Est…)

On laisse manipuler les élèves de manière à ce qu'ils s'approprient la situation.

Les élèves s'orientent ensuite naturellement vers un arbre de choix pour tenter de trouver une solution au problème posé. Mais ils se heurtent rapidement à une difficulté : le nombre de choix possibles étant important, l'arbre est de trop grande dimension pour espérer en tirer une solution.

On leur propose alors une simplification du problème en effectuant des regroupements de manière à limiter le nombre de choix possibles.

4°) Simplification du problème

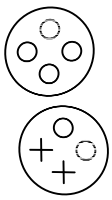
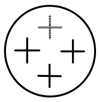
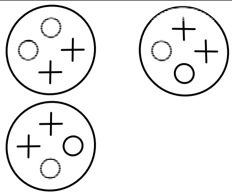
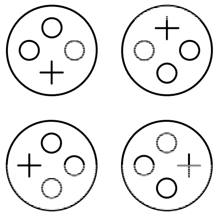
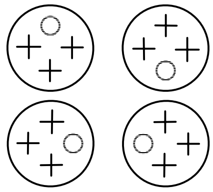
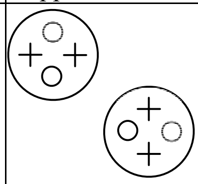
a) Enumérer toutes les configurations du plateau que l'on peut rencontrer. On représentera par un cercle un verre à l'endroit et par une croix un verre à l'envers.

b) On dira que deux configurations obtenues par rotation sont « équivalentes ».

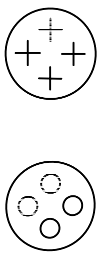
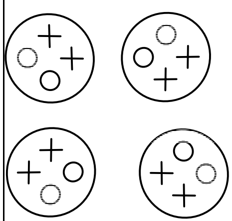
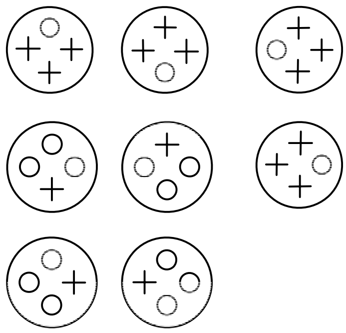
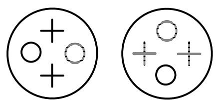
Regrouper les configurations qui sont « équivalentes ».

c) Finalement, à combien de configurations peut-on limiter le problème ?

Dans un premier temps, les élèves regroupent les configurations suivant les 6 catégories ci-dessous :

4 verres à l'endroit	4 verres à l'envers	2 verres côte à côte à l'envers	1 verre à l'envers	3 verres à l'envers	2 verres diagonalement opposés à l'envers
					

On fait alors remarquer aux élèves que le but du jeu est de mettre tous les verres dans le même sens (peu importe le sens). Par conséquent, on peut effectuer des regroupements supplémentaires. On obtient alors 4 catégories :

4 verres dans le même sens	2 verres côte à côte dans le même sens	1 verre dans le même sens (ou 3 verres dans le même sens)	2 verres diagonalement opposés dans le même sens
			

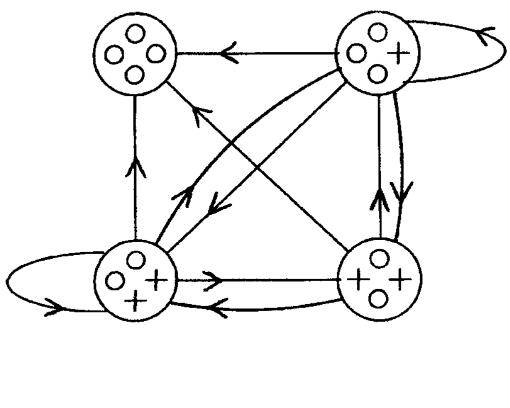
Finalement, 4 configurations (une prise dans chaque catégorie) suffisent pour représenter la situation.

A ce stade, si on demande de nouveau aux élèves d'essayer de répondre au problème posé, l'utilisation d'un arbre paraît être plus facile. Cependant, la solution n'apparaît pas de façon évidente.

C'est donc à ce moment que l'on introduit un nouvel outil : le graphe.

5°) Représentation de la situation à l'aide d'un graphe

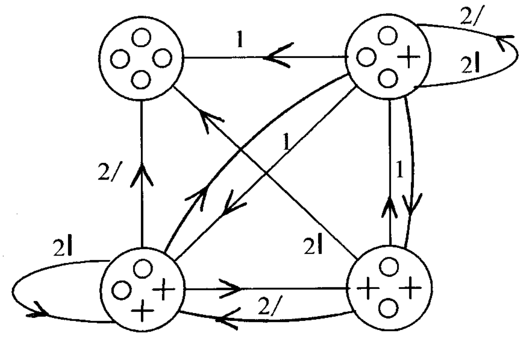
On schématise la situation de la façon suivante :



Vocabulaire :

Le schéma ci-contre s'appelle un **graphe**.
Les configurations du plateau sont les **sommets** de ce graphe.
Les manipulations permettant de passer d'une configuration à une autre sont les **arêtes** de ce graphe.
Le nombre total de sommet s'appelle l'**ordre du graphe**.
Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes sont orientées.

Indiquer sur chacune des arêtes, la manipulation effectuée pour passer d'une configuration à une autre.



On représentera :

- par « 2 / » la manipulation « deux verres côte à côte retournés » ;
- par « 2| » la manipulation « deux verres diagonalement opposés retournés » ;
- par « 1 » la manipulation « un verre retourné ».

On fait remarquer aux élèves que dans ce graphe, un sommet représente plusieurs configurations équivalentes et il n'y en a pas d'autres que ceux du graphe donné.

Après avoir indiqué sur chacune des arêtes, la manipulation effectuée, les élèves obtiennent le graphe étiqueté ci-contre.

On demande aux élèves d'essayer de résoudre le problème. Ils ont du mal à trouver une solution. On leur en propose donc une solution qu'ils vont devoir justifier.

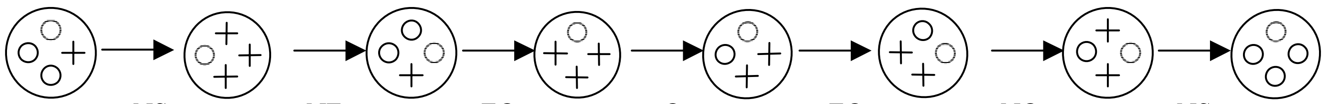
6°) Une solution au problème

On considère la stratégie suivante : 2 | ; 2 / ; 2 | ; 1 ; 2 | ; 2 / ; 2 | (dans cet ordre).

1°) Appliquer cette stratégie à une situation de départ quelconque. Que constate ton ?

2°) Expliquer pourquoi ces sept manipulations dans cet ordre constituent une stratégie gagnante.

Les élèves appliquent la stratégie donnée sur un exemple :

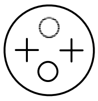


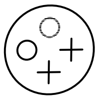
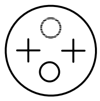
NS NE EO O EO NO NS

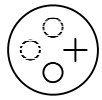
Ils constatent que cette stratégie fonctionne sur un exemple.

On leur demande ensuite de justifier cette stratégie quelque soit la configuration de départ.

Ils doivent donc raisonner à l'aide du graphe :

2 | : Si on est en  , on a gagné, sinon on n'a rien changé ;

2 / ; 2 | : Si on n'a pas encore gagné, on était en , on est passé en  puis on a gagné, sinon on n'a rien changé ;

1 : Si on n'a pas encore gagné, on était en  , il faut en sortir ;

2 | ; 2 / ; 2 | : On recommence les trois premières étapes.

On justifie ainsi que ces 7 manipulations, dans cet ordre, constituent une stratégie gagnante.

Bibliographie :

Activité de Nathalie Revol (Colloque Inter-IREM « Lyon-Confluence » 2002)
Introduction à la théorie des graphes d'Eric Sigward (Site académique de Nancy-Metz)