Ressources pour l'Accompagnement Personnalisé au lycée
Première- Terminale

I.R.E.M. de Clermont-Ferrand

Groupe Accompagnement Personnalisé au lycée

Ont participé à l'élaboration de ce document :

- Irène BROS, lycée de Presles, CUSSET
- Martine CHABANAT, lycée Sainte Thècle, CHAMALIERES
- Delphine DUCROS, lycée Montdory, THIERS
- Pascale PERRIN, lycée Madame De Staël , MONTLUCON
- Christine RIGOULET, lycée Madame De Staël , MONTLUCON
- Amandine ROBERT, lycée Madame De Staël , MONTLUCON
- Colette ROBERT, lycée Sainte Marie, RIOM
- Emilie ROBERT, ingénieure diplômée ENSEIRB-MATMECA, BORDEAUX

Introduction

Notre groupe de travail a vu le jour en 2011/2012 après que la réforme des lycées se soit mise en place et avec elle, l'introduction de l'accompagnement personnalisé dans toutes les classes.

Après avoir constaté la diversité de nos pratiques et surtout les différentes organisations d'un établissement à l'autre, nous avons décidé de réfléchir sur le contenu de ces heures plus particulièrement en première et terminale, et comment, mettre en oeuvre un travail au service de tous les élèves.

Notre objectif a été de proposer des ressources à utiliser pour ces séances d'accompagnement personnalisé de façon à différencier le travail et permettre l'autonomie des élèves. Ces ressources se présentent sous la forme d'un document numérique au format pdf constitué de 65 fiches accessibles à partir d'un sommaire organisé par classes et par thèmes.

Chaque fiche comporte quatre cartes de couleurs différentes, une couleur par niveau de difficulté :
Vert : facile et méthodique
Bleu : moyen (Application directe du cours)
Rouge : difficile (exercices d'approfondissement et prise d'initiative)
Noire : défi, pour aller plus loin (esprit olympiades pour les premières, vers classes prépa pour les terminales)

Utilisation

Notre objectif principal est de mettre au travail tous les élèves en leur proposant des exercices à faire à la carte et suivant leur niveau : ce document se présente ainsi à la fois comme un outil d'approfondissement, de consolidation ou de remédiation.

Il pourra s'utiliser de façon pratique suivant les différents équipements dont on dispose, que ce soit une salle traditionnelle avec un seul ordinateur au bureau, une salle informatique avec plusieurs postes mais aussi des tablettes individuelles.

Il est à noter qu'une même fiche pourra ne pas être traitée intégralement par un élève selon la série suivie.
Ex : 41 Lois continues - Uniformes et exponnentielles
un élève de TESL ne peut traiter que certaines questions.
Au départ, nous avons pensé ces ressources en tant que support dans la classe pour les heures d'accompagnement. Cependant on peut également les utiliser avec l'ENT pour encourager le travail personnel des élèves.

Des exemples

- *En AP au cours de l'année*

  En début de séance, le professeur donne aux élèves la fiche qu'il a sélectionnée (ou bien 2) (en une heure c'est largement suffisant !). Il peut aussi proposer d'autres fiches à la demande des élèves (un élève peut en effet vouloir retravailler sur une notion antérieure en lien avec un devoir mal réussi par exemple). L'élève choisit lui-même la couleur par laquelle il va commencer (c'est souvent la verte !). Lorsque le professeur connait mieux ses élèves, il peut les inciter à choisir une carte de niveau plus élevé.

  L'important est que tout élève sorte de la séance en ayant réalisé une carte ou plusieurs complètement (ce qui peut lui permettre d'acquérir plus de confiance en lui).

  Le professeur prépare des éléments de correction pour la fin de la séance (à consulter par les élèves, sur l'ENT par exemple).

- *Pour réviser :* L'élève travaille les fiches qu'il veut.

- *Pour prolonger à la maison :* Le professeur peut demander de rédiger en DM une des cartes travaillées.

1 Classe

Première S

Première ES/L

Terminale S - Obligatoire

Terminale S - Spécialité

Terminale ES/L - Obligatoire

Terminale ES/L - Spécialité

2 Première S

Chapitres

3 Première ES/L

Chapitres

4 Terminale S - Obligatoire

Chapitres

5 Terminale S - Spécialité

Chapitres

6 Terminale ES/L - Obligatoire

Chapitres

7 Terminale ES/L - Spécialité

Chapitres

8 Pourcentages

Une personne place un capital C au taux annuel de 6%.

1. Déterminer l'évolution, en pourcentage, du capital au bout de 15 ans.
2. Déterminer le capital C sachant qu'au bout de 7 ans, la personne possède 7 518 €.

Un article coûte 30€.

1. Il subit une baisse de 20%. Quel est son nouveau prix ?
2. Il subit ensuite une augmentation de 15%. Quel est alors son prix ?
3. Quel est le taux d'évolution ?

Le cours de l'action BTF est de 40€. Il subit une hausse de 20% puis une autre hausse. Son cours final est 66,24€.

Quel est le taux d'évolution de la seconde hausse ?

Compléter le tableau suivant :

Diminuer de 5%	correspond à multiplier par	
Augmenter de 31 %	correspond à multiplier par	
	correspond à multiplier par	1,3
	correspond à multiplier par	0,82
	correspond à multiplier par	5

9 Géométrie repérée

Dans un repère, on donne $A(-2;6)$; $B(9;9)$ et $C(0;3)$.

Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC et celles du centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Dans un repère, on donne les droites D d'équation $2x+3y-5=0$ et D' d'équation $-3x+5y-5=0$.

1. Ces droites sont-elles parallèles ?
2. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

ABC est un triangle. P, Q et R sont les points tels que : $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AR}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Montrer que les points P, Q et R sont alignés.

Dans un repère, on donne les points $A(6;1)$; $B(-3;4)$ et $C(12;-1)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.
2. Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?
3. Que peut-on en déduire ?

10 Vecteurs-Droites

ACE est un triangle. S et R sont les points tels que :

$\overrightarrow{SC} = -3\overrightarrow{SE}$ et $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.
B est le milieu du segment $[AE]$.

Montrer que les droites (AS), (RE) et (BC) sont concourantes.

Dans un repère, on donne $A(-1; 2)$, $B(3; 5)$ et $C(2; 1)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer une équation de la droite parallèle à (AB) passant par C.

b est un réel non nul. D_b est la droite d'équation $b^2x + by + 1 = 0$. Déterminer, s'il(s) existe(nt), les réels b dans chacun des cas suivants :

1. D_b passe par le point $A(-4; 3)$.
2. D_b a pour coefficient directeur 8.
3. Le vecteur $\vec{u}(3; 7)$ est un vecteur de D_b.
4. D_b est parallèle à la droite D_1 d'équation : $2x + 4y + 1 = 0$.

Dans un repère, on donne les points $A(-1; 2)$ et $B(3; 5)$.

1. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Déterminer une équation de la droite (AB).

11 Equation de droite - Alignement

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$, un repère orthonormé du plan. S et T sont 2 points mobiles respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées, tous deux distincts de O. On note s l'abscisse de S et t l'ordonnée du point T, s et t fixés.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (ST).
2. Soit (d) une droite d'équation $y = mx$, m variable réelle.
   A quelle condition sur m, les droites (ST) et (d) sont-elles sécantes ?
   Déterminer alors les coordonnées de leur point d'intersection K.
3. A quelle condition sur m, les droites (ST) et (d) sont-elles perpendiculaires ? Où se trouve alors le point K ?

ABC est un triangle. On considère les points D et E définis par : $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

1. Construire la figure.
2. Montrer que les points A, D et E sont alignés.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$,
on considère les points $A(2;3)$, $B(-2;5)$, $C(3;0)$ et $K(-2;0)$.

1. Montrer que K est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
2. En déduire une équation cartésienne de la médiatrice de $[AC]$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

On considère la droite (D) dont une équation cartésienne est :
$-2x + 3y - 1 = 0$.

1. Donner les coordonnées d'un point de (D).
2. Donner un vecteur directeur de (D).
3. Donner le coefficient directeur de (D).

12 Vecteurs et algorithme

Dans un repère, (d) est la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $(a, b) \neq (0; 0)$. Quel est le rôle de l'algorithme ci-dessous ?

Entrée	Saisir a, b, c.
Traitement	Si $b \neq 0$ alors
	Afficher « point $E(0; -\frac{c}{b})$ »
	Sinon
	Afficher « pas de point d'intersection »
	Fin Si

Dans un repère du plan, on donne $A(5; -2)$ et $B(-3; 6)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Le vecteur $\vec{u}(3\ ;\ 3)$ est-il un vecteur directeur de (AB) ?
3. Le point $E(7; -4)$ est-il un point de (AB) ?
4. Donner les coordonnées du point d'intersection de (AB) avec l'axe des abscisses.

Dans un repère du plan, on donne $A(-3, 3)$, $B(2, 1)$ et $C(4, -4)$.

1. Donner une équation de la droite (d) passant par C et parallèle à (AB).
2. Donner une équation de la droite (d') passant par A et parallèle à (CB).
3. Donner les coordonnées du point d'intersection de (d) et (d').

Dans un repère du plan, (d) est la droite d'équation

$$3x - 5y + 2 = 0.$$

1. Donner un vecteur directeur de (d).
2. Donner les coordonnées de 2 points de (d).
3. Quel est le coefficient directeur de (d) ?
4. Le vecteur $\vec{u}(15; 9)$ est-il un vecteur directeur de (d) ?

13 Vecteurs colinéarité

On considère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit K et L deux points respectivement sur l'axe des absisses et sur l'axe des ordonnées, tous deux distincts de l'origine O.

Montrer que la droite (KL) a pour équation : $\dfrac{x}{k} + \dfrac{y}{l} = 1$, où k représente l'abscisse du point K et l l'ordonnée du point L.

On considère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

1. Les vecteurs $\vec{u}\ (15\ ;\ -12)$ et $\vec{v}\ (2\ ;\ -1,5)$ sont-ils colinéaires ?

2. Déterminer le(s) réel(s) k tel(s) que les vecteurs $\vec{u}\ (k\ ;\ 1)$ et $\vec{v}\ (5\ ;\ k+1)$ soient colinéaires.

On considère un triangle ABC non aplati.

1. On définit les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :
   $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $\vec{v} = 6\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
   $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-il colinéaires ?

2. Même question avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définis par :
   $\vec{u} = (\sqrt{13} - 7)\ \overrightarrow{AB} + 6\ \overrightarrow{AC}$
   et $\vec{v} = 6\ \overrightarrow{AB} + (\sqrt{13} + 7)\ \overrightarrow{AC}$.

1. La proposition suivante est-elle vraie ? «Si les points A, B, C et D sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.»

2. Quelle est la contraposée de cette proposition ? A quoi peut-elle servir ?

3. L'énoncé réciproque de la proposition de départ est-il vrai ?

14 Trinôme

On considère la parabole (P) d'équation $y = 2x^2 - 5x + 3$. Pour tout réel m, on considère la droite (D_m) d'équation $y = -2x + m$.

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection de (D_m) et de la parabole (P).

2. Lorsque (D_m) coupe (P) en 2 points A_m et B_m, on appelle I_m le milieu du segment $[A_mB_m]$. Déterminer quel est l'ensemble E des points I_m pour les valeurs convenables de m à préciser.

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a réel non nul.

1. Rappeler la règle du signe de $f(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 5x + 6$ et C sa courbe représentative dans un repère.
   Déterminer la position de C par rapport à l'axe des abscisses.
   Vérifier à l'aide de la calculatrice.

1. Développer $(1 + 2\sqrt{5})^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $-2x^2 + (2\sqrt{5} - 1)x + \sqrt{5} = 0$.

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec a non nul.

1. (a) Donner l'expression du discriminant Δ.
   (b) Compléter le tableau suivant :

Signe de Δ	Racines de l'équation $f(x) = 0$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
   (a) $4x^2 + 5x + 8 = 0$
   (b) $3x^2 - 2x - 3 = 0$
   (c) $7x^2 - 2\sqrt{21}x + 3 = 0$

15 Second degré - intersection

1. Conjecturer avec la calculatrice le nombre de points d'intersection des paraboles d'équation $y = 0,1x^2 - x + 3$ et $y = 0,04x^2 - 2x + 2$.
2. Démontrer la conjecture, et calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, sans utiliser le discriminant :
   (a) $15x^2 - 7x = 0$
   (b) $121x^2 - 44x + 4 = 0$
   (c) $81x^2 - 7 = 0$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $x^2 + 11x - 16 = 0$
   (b) $-4x^2 + x - 9 = 0$

1. Conjecturer avec la calculatrice le nombre de points d'intersection de la droite d'équation $y = x - 2$ et de l'hyperbole d'équation $y = \frac{2}{x}$.
2. Démontrer la conjecture, et calculer les coordonnées des points d'intersection éventuels.

On donne les trinômes suivants :

- $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$
- $g(x) = 7x - x^2 - 6$
- $h(x) = (4 - x)(1 + 2x)$
- $k(x) = 3(x - 1)^2 - 4$

1. Vérifier que ces trinômes sont de la forme $ax^2 + bx + c$
2. Identifier a, b et c et calculer Δ

16 Second degré - Problèmes

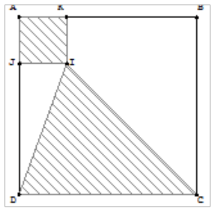
La fonction f définie par $f(x) = -3x^4 + 16x^3 + 30x^2 - 7$ admet-elle un macimum sur $\mathbb{R}$?

Pendant une expérience, l'altitude en mètres d'un projectile lancé à partir du sol est donnée, en fonction du temps t en secondes, par la formule :

$$h(t) = -5t^2 + 100t$$

(L'origine correspond à $t = 0s$).

1. A quel instant le projectile retombe-t-il au sol ?
2. Déterminer la période pendant laquelle l'altitude du projectile est supérieure ou égale à 320 m ?



$ABCD$ est un carré de côté 8. K est un point du segment $[AB]$. $AKIJ$ est un carré avec J sur le segment $[AD]$.
On note x la longueur AK.

Déterminer la position de K pour que l'aire du triangle DIC soit égale à l'aire du carré $AKIJ$.

La distance de freinage d'un véhicule est notée d et sa vitesse est notée v. En sciences expérimentales, on établit des lois liant d et v ; par temps humide, la loi est donnée par la formule $d = \dfrac{3v^2 + 100v}{400}$ (d en mètres, v en km/h).

1. Écrire un tableau de valeurs de d en prenant pour v des valeurs dans l'intervalle $[0\ ;\ 160]$ avec un pas de 20.
2. Tracer le graphique correspondant au tableau de valeurs.
3. Utiliser ce graphique pour estimer la vitesse d'un véhicule qui a besoin :
   (a) d'une distance de freinage de 80 m.
   (b) d'une distance de freinage de 150 m.

17 Variation - fonctions de référence

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm ; M est un point de ce segment, distinct de A et B.

- On pose $AM = x$, avec $0 < x < 6$.
- Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{MA} + \frac{1}{MB}$.

Déterminer la position de M pour laquelle $f(x)$ est minimale.
Quelle est cette valeur minimale ?

1. Donner le sens de variation de u, définie par $u(x) = x^2 - 2x + 8$.
2. Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 8}$. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Donner le sens de variation de f en indiquant les propriétés utilisées.
3. Soit $g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+8}}$.
   (a) Donner le sens de variation de g en indiquant les propriétés utilisées.
   (b) Justifier que g est définie sur $\mathbb{R}$.

Dans un repère orthonormé, C_f est la courbe représentative de la fonction racine carrée. A est le point de coordonnées $(2; 0)$, M est un point quelconque de la courbe C_f, d'abscisse x.

1. Représenter C_f, placer A et un point M.
2. Où se trouve le point M le plus proche de A ? Justifier.
   Quelle est alors la distance minimale AM ?

1. (a) u et v étant 2 fonctions définies sur I, que peut-on dire du sens de variation de $u + v$ sur I ?
   (b) u étant une fonction définie et positive sur I, quel est le sens de variation de $\sqrt{u}$?
   (c) u étant une fonction définie, strictement positive, quel est le sens de variation de $\frac{1}{u}$?
2. Application
   (a) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x} - 2x + 8$ sur $]0, +\infty[$.
   (b) Déterminer le sens de variation de la fonction g définie par : $g(x) = \sqrt{5x^2 + x + 4}$.
   (c) Déterminer le sens de variation de la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

18 Valeur absolue

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. Représenter f dans un repère orthogonal. Justifier le tracé.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |-x^2 + 3x + 4|$.
   (a) Ecrire $g(x)$ sans valeur absolue.
   (b) Tracer la courbe représentant g dans le même repère ; on justifiera la construction.
3. Résoudre graphiquement et par le calcul : $g(x) \leq 2$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

1. Donner le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Représenter graphiquement f, et résoudre graphiquement l'inéquation $|x| \geq 3$.
3. Quel est l'ensemble des solutions de l'inéquation $|x| \geq 3$ lorsque :
   (a) $x \in [-3; 0]$
   (b) $x \in [-1; 3]$
   (c) $x \in [-5; 2]$

Soit $f(x) = |x+3| - |-2x+4|$ où x est un réel.

1. Ecrire $f(x)$ sans le symbole «valeur absolue».
2. Représenter graphiquement f.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq -7$.
4. Retrouver le résultat de 3. par le calcul.

1. Rappeler la définition et la notation de la « valeur absolue» de x, où x est un réel.
2. Avec la calculatrice, donner une valeur approchée de la valeur absolue de : $1 - \frac{17}{3}$; $\sqrt{3} - 1$; $\frac{1}{4-\sqrt{17}}$.
3. Donner la valeur exacte de la valeur absolue de : $1 - \frac{17}{3}$; $\sqrt{3} - 1$; $\frac{1}{4-\sqrt{17}}$; $(1-\pi)^2$; $(1-\pi)$; $(\pi - 1)$.

19 Dérivées (1)

$ABCD$ est un carré de côté 1. Le point E est situé sur (AB), et n'est pas sur la demi-droite $[BA)$, avec $BE < BA$.
Le point F est sur le segment $[AD]$ et $BE = DF$. Les droites (BC) et (EF) se coupent en M.

Où placer E pour que l'aire du triangle BEM soit maximale ?

Dans une pièce de bois parallélépipédique de longueur 12, de largeur 8, et d'épaisseur x, $x \leq 8$ (en cm), on découpe un cube d'arête x.

Comment choisir x pour que le volume restant soit maximal ?

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 5.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Soit g la fonction définie pour tout réel x par :

$$g(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 2.$$

   (a) Calculer $g'(x)$; en déduire les variations de g.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction g et calculer $g(1)$.
3. En déduire le tableau de variation de la fonction f.

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$$f(x) = -x^4 + x^3 + 2.$$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Etudier le signe de $f'(x)$.
3. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Tracer la courbe représentative de f à l'écran de la calculatrice, et vérifier la cohérence avec le tableau de variation.

20 Dérivées (2)

Sur un circuit, une voiture de sport réalise un départ-arrêté d'un kilomètre. Le nombre de mètres parcourus en fonction du temps x, exprimé en secondes, est donné par la fonction f définie sur [0 ; 30] par : $f(x) = \frac{x^5 - 75x^4 + 1500x^3}{4050}$.
La vitesse de la voiture est donnée en $m.s^{-1}$ en fonction du temps x par la fonction f', dérivée de la fonction f.

1. Calculer la vitesse maximale atteinte par cette voiture durant ce km départ arrêté.
2. Etait-t-il nécessaire de faire ce test sur un circuit ou aurait-on pu le faire sur une autoroute française ?

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x + 1)(3x - 4).$$

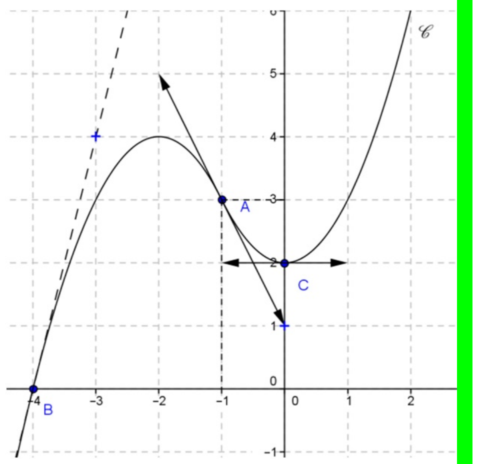
1. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$, courbe représentative de f au point A d'abscisse -1.
2. Quel est le point B de la courbe $\mathcal{C}$ en lequel la tangente a pour coefficient directeur 7 ?
3. Montrer que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'intersection entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses ont des coefficients directeurs opposés.

Dans un repère du plan, on donne $A(0, 0)$, $B(2, 5)$ et $C(6, 2)$.

Déterminer une fonction polynôme du troisième degré, définie sur [0,6], dont la courbe passe par les points A et C et dont les tangentes en A et C sont respectivement les droites (AB) et (AC).

On donne ci-contre la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Lire $f'(-1)$.
2. Donner le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en C.
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en B.

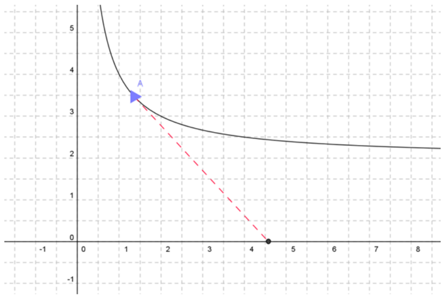


Retour au Sommaire

21 Dérivée (3)

Sur l'écran d'un jeu vidéo représenté ci-dessous, on voit les avions qui descendent de gauche à droite en suivant la trajectoire indiquée et tirent un rayon laser selon la tangente à leur trajectoire en direction des cibles placées sur l'axe (Ox) aux abscisses numérotées de un à huit.

On sait que la trajectoire de l'avion a pour équation : $y = 2 + \frac{2}{x}$



1. L'avion va-t-il toucher une cible au moment où il sera au point d'abscisse 2 ?
2. Déterminer les coordonnées de l'avion permettant d'atteindre la cible numéro deux.

On considère la fonction f définie sur [2;8] dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	2		3		6.5		8
f(x)			6				1
		↗		↘		↗	
	0				-2		

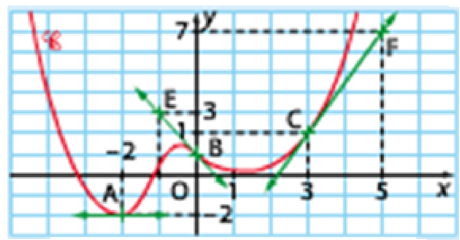
Pour chaque question, préciser si l'affirmation proposée est vraie, fausse ou si les renseignements sont insuffisants. Justifier.

1. $f'(2.5) < f'(5)$
2. $f'(7) < f'(7.2)$
3. $f'(6.5) = 0$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = -x^2 + 3x + 4$ et C_f désigne sa courbe représentative.

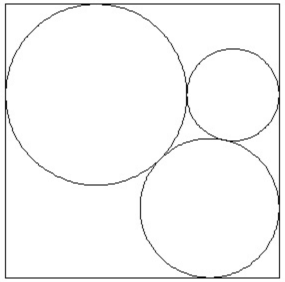
1. Calculer $f'(x)$, après avoir précisé sur quel ensemble f est dérivable.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 2.
3. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 2.
4. Etablir le tableau de variations de f.

La courbe C ci-dessous représente une fonction f dérivable pour tout nombre a. En chacun des points A, B et C la courbe admet une tangente. Déterminer graphiquement les nombres suivants :
$f(0)$; $f(3)$; $f(-2)$; $f'(0)$; $f'(3)$; $f'(-2)$.

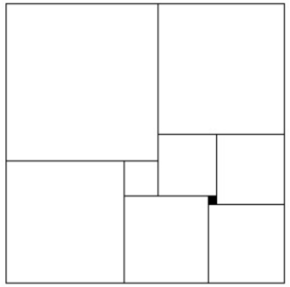


22 Olympiades

Dans le carré suivant de côté 1, on a dessiné 3 cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit.
Le grand cercle et le cercle moyen sont tangents à 2 côtés du carré, le petit cercle est tangent à un coté.
Le centre du grand cercle et le centre du petit sont sur une même droite parallèle au côté du carré.
Quelles sont les distances séparant les centres des cercles ? Quels sont les rayons des cercles ?



Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité.
Quelles sont les dimensions du rectangle ?



Simon et Juliette doivent repeindre un mur. S'ils travaillaient ensemble, ils mettraient 36 minutes pour le faire. En travaillant seul, Simon aurait besoin d'une demi-heure de plus que Juliette pour accomplir cette même tâche.

Combien de temps faudrait-il à Simon pour repeindre le mur en travaillant seul ?

- Choisissez un nombre entier impair;
- Elevez le au carré, puis ajoutez-lui 13;
- Faites la division du nombre obtenu par 4 et retenez-en le reste.

Je vous parie qu'il s'agit de 2 !

Pouvez-vous expliquer ce tour ?

23 Statistiques

Démontrer la propriété de la variance :

$$V = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=p} n_i x_i^2 - \bar{x}^2.$$

.

Une coopérative laitière fabrique un fromage qui doit contenir, selon les étiquettes, 50 % de matière grasse.
Un organisme dont le rôle est de contrôler la qualité des produits prélève 100 fromages afin d'analyser leur taux de matière grasse. Les résultats de l'analyse sont les suivants :

Taux	[42 ; 45[	[45 ; 47,5[	[47,5 ; 50[	[50 ; 52,5[	[52,5 ; 55]
Effectif	12	24	36	24	4

1. Calculer la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type s de cette série (arrondir à 10^{-2}).
2. Une production de fromages peut être vendue sous l'appellation « 50 % de matière grasse » si les deux conditions suivantes sont remplies :
   - Au moins 80 % des fromages analysés sont dans l'intervalle $[\ \bar{x} - 2s\ ,\ \bar{x} + 2s\ ]$.
   - 50 est dans l'intervalle $[\ \bar{x} - 2s\ ,\ \bar{x} + 2s\ ]$.

   Est-ce que la production de la coopérative précédente peut recevoir l'appellation « 50 % de matière grasse » ?

1-VarStats
$\sum x = 58270$
$\sum x^2 = 3472400$
n=1000

Sur l'écran d'une calculatrice, on a relevé certains résultats concernant une série statistique. Il manque la moyenne et l'écart-type. Pouvez-vous retrouver ces données manquantes ? Expliquer.

Voici les résultats en secondes des participants aux demi-finales du 100 m messieurs lors d'une compétition d'athlétisme :
Demi-finale n°1 :
10,32; 10,37; 10,37; 10,39; 10,41; 10,43; 10,43; 10,56
Demi-finale n°2 :
10,22; 10,30; 10,31; 10,44; 10,41; 10,67; 10,58; 10,35

1. Pour chaque demi-finale :
   (a) Calculer le temps moyen réalisé par les athlètes.
   (b) Calculer et interpréter au moyen d'une phrase le temps médian réalisé par les athlètes.
2. Calculer l'étendue de chaque série.
3. Quelle fut la demi-finale la plus homogène ?

24 Suites - Sens de variation

Etudier le sens de variation de la suite u, définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n^3}{2^n}$.

Dans chaque cas, étudier le sens de variation de la suite u, éventuellement à partir d'un certain rang :

1. $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - n^2 + 4$.
2. Pour tout entier naturel $n > 0, u_n = \dfrac{2^n}{n}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cos n\dfrac{\pi}{2}$
4. $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$
5. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{n-1}{2n^2+1}$
6. $u_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n$

Dans chaque cas, indiquer si la proposition est vraie ou fausse. On justifiera la réponse lorsqu'elle est vraie, et on donnera un contre-exemple lorsqu'elle est fausse.

1. Si une suite u n'est pas croissante sur $\mathbb{N}$, alors elle est décroissante sur $\mathbb{N}$.
2. Si la suite u vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n$, alors, la suite est croissante sur $\mathbb{N}$, quel que soit le choix du premier terme.
3. Si la suite u vérifie : $u_0 \geq u_1 \geq u_2$, alors u est décroissante sur $\mathbb{N}$.
4. Si $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, et si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors u est croissante sur $\mathbb{N}$.
5. La suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{12u_n}{n+1}$ est décroissante à partir du rang 11. (On admettra que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$).

1. Donner la définition de « u est une suite croissante sur $\mathbb{N}$ », puis de « u est une suite décroissante sur $\mathbb{N}$ ».
2. Dans chaque cas, à partir du calcul effectué et décrit ci-dessous ou de l'information donnée, indiquer comment en déduire le sens de variation de la suite u, définie sur $\mathbb{N}$:
3. Je calcule $u_{n+1} - u_n$.
4. En supposant que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq 0$ et u_n garde un signe constant, je calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
5. f est une fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ et pour tout entier naturel n, $u_n = f(n)$.

25 Algorithme et suite (1)

Considérons la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n + 2$.

Ecrire un algorithme permettant de déterminer le plus petit entier n pour lequel $u_n > 1000$.

Ecrire un algorithme pour calculer la $21^{\text{ème}}$ et la $31^{\text{ème}}$ valeur de la suite u définie par :

$u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 4u_n + 1$.

Ecrire un algorithme pour calculer la $21^{\text{ème}}$ et la $31^{\text{ème}}$ valeur de la suite u définie par :

$u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n strictement positif, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$.

Ecrire un algorithme pour calculer la $21^{\text{ème}}$ et la $31^{\text{ème}}$ valeur de la suite u définie par :

Pour tout entier naturel n, $u_n = n^2 + 2n + 3$.

26 Algorithme et suite (2)

À l'automne 2016, Claude a acheté une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de $1500m^2$ entièrement engazonné, mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de $50m^2$ et la remplace par du gazon.

Ecrire un algorithme afin qu'il affiche au bout de combien d'années, la surface du terrain engazonné de Claude sera inférieure à $500m^2$.

Programmer alors cet algorithme sur votre calculatrice (écrire sur votre copie votre programme). Quel résultat obtient-on ?

Afin d'entretenir une forêt vieillissante, un organisme régional d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5% des arbres existants et de replanter 3000 arbres. En 2016 la forêt compte 50000 arbres. On donne l'algorithme ci-dessous :

```
U prend la valeur 50 000
N prend la valeur 0
Tant que N < 60000
N prend la valeur N + 1
U prend la valeur 0,95U + 3000
Fin du Tant que
Afficher N
```

Quelles sont les variables de cet algorithme ? Dresser un tableau d'avancement des variables et expliquer ce que permet d'obtenir cet algorithme.

Une population de poissons qui en 2016 est de 2000 individus, voit son effectif multiplié chaque année par 1,2.

Ecrire un algorithme afin qu'il affiche en quelle année cette population dépassera les 20 000 individus.

Déterminer la réponse à l'aide de votre calculatrice.

On considère l'algorithme suivant :

```
VARIABLES :
  U,N
INITIALISATION :
  U prend la valeur 40 000
  N prend la valeur 0
TRAITEMENT
  Tant que U > 10000
    N prend la valeur N+1
    U prend la valeur 0,875.U + 1200
  Fin du Tant que
SORTIE :
  Afficher N
```

1. Cet algortithme permet d'obtenir :

a) la valeur de U_{40000}
b) toutes les valeurs de U_0 à U_n
c) le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leq 10000$
d) le nombre de termes inférieurs à 1200

2. La valeur affichée est :

a. 33 b. 34
c. 9600 d. 9970,8

27 Raisonnement par récurrence

Soit A une fonction de deux entiers naturels n et m définie par :

- A(0,n)=n+1 quel que soit l'entier n
- A(m+1,0)=A(m,1) quel que soit l'entier m
- A(m+1,n+1)=A(m, A(m+1, n)) quels que soient les entiers n et m

1. Calculer $A(0,0)$, $A(0,1)$ et $A(1,0)$.
2. Calculer $A(m,n)$ pour tout entier m inférieur à 3 et tout entier n inférieur à 5.
3. Conjecturer les expressions de $A(1,n)$ et $A(2,n)$ en fonction de n, puis les démontrer.
4. Démontrer que $A(3,n) = 2^{n+3} - 3$ pour tout entier n.

A est la fonction d'Ackerman

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1. Démontrer que la suite u est croissante.
2. Démontrer que pour tout entier n, $u_n = 3^n + 1$.

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 2$.
On veut montrer par récurrence que $u_n = 2^{n+2} - 2$.

1. Quelle est la propriété $P(n)$?
2. Pour quelle valeur de n vérifie-t-on l'initialisation ? Cette étape est-elle vérifiée ?
3. La propriété $P(n)$ est-elle héréditaire, c'est-à-dire si on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier donné n, $P(n+1)$ est-elle vraie ?
4. Conclure.

28 Raisonnement par l'absurde

Montrer que si une suite u converge alors sa limite est unique.

Soit u une suite géométrique telle que $u_0 = 2$ et de raison q non nulle.
Démontrer que la suite u ne s'annule jamais.

Définition : On appelle nombre rationnel tout nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q deux entiers sans autre diviseur commun positif que 1.

Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Parfois, pour démontrer une propriété P, il peut être pratique de raisonner par l'absurde. Le principe est simple :

- on suppose le contraire de la propriété P (la négation)
- on exploite cette hypothèse pour aboutir à une impossibilité, une absurdité, contradiction
- on en conclut que l'hypothèse de départ est erronée : cela signifie que la propriété P est vraie.

Soit x et y deux réels tels que $xy = 3$.
Justifier que x et y sont non nuls.

29 Suites - Limites (1)

Déterminer la limite de chaque suite :

$$u_n = \frac{cos(n)}{n^2} \qquad v_n = \frac{3n+(-1)^n cos(n)}{n-1},\ (n \geq 2)$$
$$w_n = \frac{3^n}{2^{2n}} \qquad t_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}}$$

Dans chaque cas déterminer la limite de la suite :

$$u_n = \sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad v_n = (\frac{1}{3})^n + \frac{1}{3n}$$
$$w_n = \frac{(n-1)(4-n)}{n^2+1} \qquad t_n = 6^n - 3^{2n}$$

Déterminer la limite de chaque suite :

$$u_n = n\sqrt{n} \qquad v_n = n^3 - n^2$$
$$w_n = \frac{n^2-2n}{3+n} \qquad t_n = \frac{3n-1}{n^2}\ (n \geq 1)$$
$$a_n = \frac{(n+1)(3-n)}{2n^2+1} \qquad b_n = (n - \frac{1}{n})(\frac{n+1}{2n^2})$$

Soit u une suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.
La suite v est définie pour tout entier n par : $v_n = \frac{1}{u_n} + 1$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement à l'infini de la suite u.
2. Prouver que la suite v est arithmétique.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
4. En déduire la limite de la suite u.

30 Suites - Limites (2)

La suite des nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$, etc... converge-t-elle ?

Conjecturer et justifier votre réponse.

Soit u la suite définie par $u_0 = 13$ et pour tout entier n $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

1. Montrer que la suite v définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
3. Quelle est la limite de la suite u ?

On pose, pour $n > 0$, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + ... + \frac{1}{(n+n)^2}$.

1. Déterminer un encadrement de u_n.
2. En déduire la limite de cette suite ?

Chacune des situations suivantes peut être modélisée par une suite. Dans chaque cas :

1. Donner une expression de U_{n+1} en fonction de U_n, U_0 étant le premier terme.
2. Dire si la suite est arithmétique, géométrique (on précisera alors la raison) ou ni arithmétique ni géométrique. Justifier.
   1er cas : La population d'une ville augmente de 500 habitants chaque année. 2ème cas : La concentration d'un médicament dans le sang diminue de 8% chaque heure après l'injection de ce médicament. 3ème cas : Lors d'une épidémie, le nombre de cas déclarés augmente de 10% chaque jour pendant deux semaines. 4ème cas : L'étude de la population d'une ville montre que chaque année elle perd 2% de ses habitants, mais voit arriver une cinquantaine de nouveaux habitants.

31 Produit scalaire (1)

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés de côtés respectifs 5 et 3, disposés comme ci-dessous. O est le milieu de $[GD]$. Les droites (OA) et (EB) sont-elles perpendiculaires ?

$ABCD$ est un losange de centre O et de côté a tel que $\widehat{BAD} = 60°$.

En utilisant la méthode la mieux adaptée, calculer :

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$
2. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
4. $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA}$
5. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
6. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CB}$

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 10$, et $AD = 3$.
M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$.

1. Dans quel intervalle le réel x varie-t-il ?
2. Exprimer MA et MB en fonction de x.
3. Démontrer que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MC} = x^2 - 10x + 9$.
4. Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle DMC est-il rectangle en M ?

Dans chaque cas, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, en indiquant la formule utilisée :

1. ABC est un triangle, tel que $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 7$.
2. ABC est un triangle tel que $AB = AC = 5$, et $\widehat{BAC} = 45°$.
3. ABC est un triangle tel que $AB = 7$, et $AH = 2$, H étant le pied de la hauteur issue de C, $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AB}$ étant de sens contraire.
4. Dans un repère orthonormé, $A(-2; -1)$, $B(3; -2)$ et $C(6; 2)$.

32 Produit scalaire (2)

On se place dans un repère orthonormé.

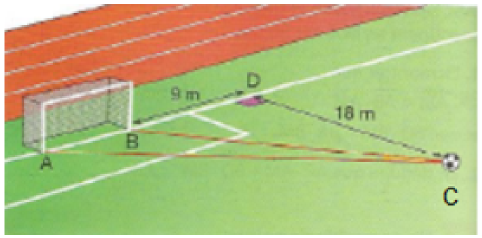
Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ passant par le point $A(1;2)$ et tangent à la droite d d'équation $x+y=7$.

- $ABCD$ est un carré de côté a.
- I et J sont deux points du plan tels que :

$$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{5}\overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD}$$

- K est le milieu de $[AB]$ et L celui de $[BC]$.

1. Faire un dessin
2. Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.



La largeur des buts est de 7,32 m.
Donner une valeur approchée à 10^{-2} près, en degré, de l'angle de tir.
$BD = 9\ m$
$CD = 18\ m$.

1. Énoncer les quatre expressions du produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan.
2. Application : Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en utilisant l'expression du produit scalaire la mieux adaptée.
   (a) $AB = 4$; $AC = 3$; $BC = 6$.
   (b) $AB = 6$ et ABC isocèle en C.
   (c) $AB = AC$ et $\widehat{BAC} = 30^o$.
   (d) $APQR$ carré de côté 6,
   B milieu de $[PQ]$ et C milieu de $[RQ]$.

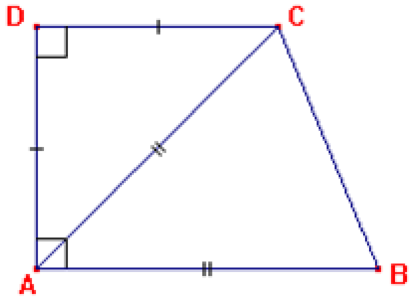
33 Trigonométrie Angles orientés

A quelle(s) heure(s) les aiguilles d'une horloge pointent-elles dans des directions opposées ?

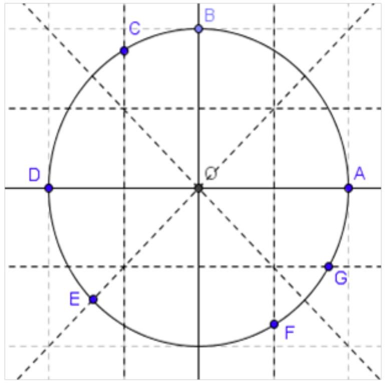
1. $ABCD$ est un carré de centre O direct (c'est-à-dire que si on tourne autour du carré sur son cercle circonscrit dans le sens direct, on trouve dans l'ordre les points A, B, C et D). Lire graphiquement :
   (a) Deux mesures de l'angle $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD})$;
   (b) Les mesures principales de $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB})$; $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OA})$; $(\overrightarrow{DA};\overrightarrow{CO})$.
2. MNP est un triangle équilatéral direct et I est le milieu de $[NM]$. Lire graphiquement les mesures principales des angles $(\overrightarrow{NM};\overrightarrow{MP})$ et $(\overrightarrow{PN};\overrightarrow{PI})$.

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un trapèze rectangle de bases $[AB]$ et $[CD]$ tel que $AC = AB$. Trouvez la mesure principale de chacun des angles orientés suivants.

a) $(\overrightarrow{DC};\overrightarrow{BA})$
b) $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$
c) $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})$
d) $(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AD})$
e) $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD})$



A, B, C, D, E, F et G sont 7 points du cercle trigonométrique. Donner la mesure principale des angles orientés de vecteurs suivants :



Angles	Mesure principale
$(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OE})$	
$(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA})$	
$(\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OD})$	
$(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OF})$	
$(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OE})$	
$(\overrightarrow{OF};\overrightarrow{OE})$	

34 Trigonométrie sinus cosinus

Résoudre chacune des équations suivantes :

1. $2sin^2(x) - 3sin(x) - 2 = 0$ sur $[-2\pi, \pi]$
2. $4sin^2(2x + \frac{\pi}{3}) - 2 = 0$ sur $[-\frac{\pi}{2}\ ;\ 3\frac{\pi}{2}]$
3. $cos(3x) = -cos(x)$ sur $[-2\pi\ ;\ \pi]$

1. Placer sur le cercle trigonométrique le point M, image du réel x tel que $x \in [-\frac{\pi}{2}\ ;\ 0]$, et $cos(x) = \frac{4}{5}$.
2. Calculer la valeur exacte de $sin(x)$.
3. A l'aide du cercle trigonométrique et de la question 1), donner la valeur exacte de : $sin(-x)$; $sin(\pi - x)$; $cos(\pi + x)$; $cos(\frac{\pi}{2} + x)$.

On placera sur le cercle les points S, T, U et W respectivement images des réels $-\pi$, $\pi - x$, $\pi + x$ et $\frac{\pi}{2} + x$.

Soit a un réel donné.

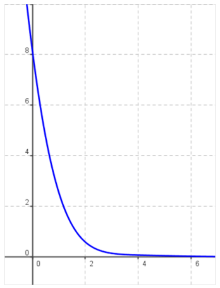
1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $cos(x) = cos(a)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : sin(x) = sin (a).
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(2sin(x) + \sqrt{3})(cos(x) + 1) = 0$
   (b) Donner la mesure principale de chacune des solutions.
   (c) Donner les solutions de l'équation dans $[-2\pi\ ;\ 3\pi]$.

$(\mathcal{C})$ est le cercle trigonométrique de centre O et (O, I, J) un repère orthonormé direct.

1. Placer sur $(\mathcal{C})$ les points A, B, C, D, E et F images respectives des réels : 3π, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{-3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{6}$.
2. Donner le sinus et le cosinus des réels ci-dessus.

35 Fonctions trigonométriques

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos x)e^{1-x}$ dont on a donné la courbe ci-contre.



1. Emettre des conjectures sur cette fonction.
2. Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
   (a) Calculer $f'(x)$.
   (b) Montrer que pour tout x, $\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$;
   (c) En déduire le sens de variation de f.
3. Etudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution dans $[0 ; +\infty[$ et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

f est la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{2 + \cos x}$

1. Justifier que f est définie pour tout réel x.
2. Comparer $f(x)$ et $f(x + 2\pi)$, puis $f(x)$ et $f(-x)$; expliquer alors pourquoi il suffit d'étudier f sur $[0 ; \pi]$.
3. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[0 ; \pi]$. Déduisez-en les variations de f sur cet intervalle.
4. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-3\pi ; 3\pi]$.

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par : $f(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + \cos x + \dfrac{3}{2}$. Justifier si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x - \sin x$
2. $f'(x) = \sin x \times (2\cos x - 1)$
3. f est strictement croissante sur $[0 ; \dfrac{\pi}{3}]$.
4. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions dans $[0 ; \pi]$.

1. Enoncer des propriétés des fonctions sinus et cosinus.
2. Etudier les variations de $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ et dresser leur tableau de variation sur $]-\pi ; \pi]$.
3. Résoudre les équations suivantes dans l'intervalle demandé :
   (a) $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ dans $]-\pi ; \pi]$
   (b) $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]0 ; 2\pi]$

36 Probabilités - Variables aléatoires

On place dans une urne 6 boules rouges et des boules noires. On choisit successivement et sans remise deux boules au hasard.

Combien de boules noires doit-on mettre dans l'urne pour que la probabilité d'avoir une boule de chaque couleur soit $\frac{1}{2}$?

Chaque matin du mardi au vendredi, le boulanger prépare 70 croissants et 30 pains au chocolat et les place dans une corbeille. Paul est toujours son premier client. Il choisit au hasard une viennoiserie dans la corbeille.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Déterminer la probabilité que, durant les quatre jours, Paul ait choisi :
   (a) Quatre viennoiseries identiques.
   (b) Exactement deux pains au chocolat.
   (c) Au moins un croissant.

A un jeu de hasard, la probabilité de gagner est $\frac{1}{4}$.

1. On fait 8 parties de ce jeu, le résultat de chacune des parties étant indépendant du résultat des autres parties.
   (a) Quelle est la probabilité de gagner les 8 parties ?
   (b) Quelle est la probabilité de gagner au moins une partie ?
2. Combien de parties doit-on faire pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 0,99 ?

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré. On gagne 2 € si on obtient 1, 2 ou 3. On gagne 3 € si on obtient 4 ou 5. On gagne 5 € si on obtient 6. On note X la variable aléatoire correspondant au gain.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance de X et interpréter.
3. Calculer l'écart type de X.
4. Déterminer la probabilité de gagner au moins 3 €.

37 Probabilités : Loi binomiale

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1. Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille ?
2. Soit n un entier positif non nul.On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs ?
   (c) Quel doit être le nombre minimum de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?
   (d) Durant un trimestre, il y a 36 cours de mathématiques. Quel nombre de filles interrogées peut-on espérer ?

Sur son lecteur mp3, Mickaël dispose de 25 chansons de son groupe préféré. 5 chansons parmi les 25 sont inédites. Il choisit au hasard 14 chansons. Une chanson peut être choisie plusieurs fois. On note X la variable aléatoire égale au nombre de chansons inédites.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Déterminer la probabilité (arrondir à 10^{-4}) de tomber sur :
   (a) une seule chanson inédite ;
   (b) trois chansons inédites exactement ;
   (c) au plus deux chansons inédites ;
   (d) au moins trois chansons inédites. On pourra ici utiliser l'approximation d'un résultat obtenu précédemment.
3. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter.

A l'exercice 4 du bac blanc, on a proposé un QCM aux élèves : il y avait 5 questions et on proposait trois résultats différents à chaque question. Une seule réponse était exacte parmi les 3 proposées. Un élève répond au hasard à chaque question de ce QCM. Pour chaque question : on note S l'issue «l'élève a bien répondu à la question » et E l'issue « l'élève a mal répondu », soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès rencontrés lors de ces 5 questions.

1. Justifier que ce questionnaire est assimilé à un schéma de Bernoulli. Donner la loi de probabilité de X.
2. (a) Calculer la probabilité que l'élève ait obtenu exactement 3 bonnes réponses.
   (b) Calculer la probabilité que l'élève ait obtenu au moins 4 bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance de X et interpréter ce résultat.

Un vendeur propose des encyclopédies à domicile. Il visite 10 clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de $\frac{1}{15}$ et que les décisions des clients sont indépendantes. X est le nombre d'encyclopédies vendues en une journée.

1. Expliquez pourquoi la loi de X est une loi binomiale ; précisez les valeurs des pramètres n et p.
2. (a) Exprimez $p(X = k)$ pour k entier de 0 à n.
   (b) Interprétez ce que représente $p(X = 5)$ et calculez à 10^{-4}.
   (c) Calculez la probabilité qu'au moins 3 encyclopédies soient vendues.
3. Calculez $E(X)$.
4. Le vendeur gagne 100 €par encyclopédie vendue. Quel gain moyen le vendeur peut-il espérer ?

38 Intervalles de fluctuation et de confiance

Un laboratoire pharmaceutique affirme que son nouveau médicament contre le mal des transports est efficace dans 85% des cas. Une association indépendante collecte des données lors de plusieurs traversées Les Sables-d'Olonne-l'île d'Yeu auprès de passagers qui ont pris ce médicament et qui étaient systématiquement malades lors de traversées antérieures. Parmi les 57 personnes interrogées, 42 n'ont pas été malades comme d'habitude.

Ces statistiques sont-elles conformes à l'affirmation du laboratoire pharmaceutique ?

Un professeur propose un QCM contenant 10 questions indépendantes. Chaque question a trois réponses possibles, dont une seule est exacte. On donne également la table ci-dessous :

1. La probabilité pour qu'un élève choisisse au hasard la bonne réponse est a) $p = 0,1$; b) $p = 0,3$; c)$p = \frac{1}{3}$
2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de bonnes réponses obtenues. Quelle est la loi de X ?
3. L'intervalle de fluctuation à 95 % est : a) $[0\ ;\ 0,6]$; b) $[0,1\ ;\ 0,5]$; c) $[0,2\ ;\ 0,6]$
4. Déterminer la probabilité qu'un élève répondant au hasard aura au moins 7 bonnes réponses.

k	$P(X \leq k)$
0	0,0173
1	0,1040
2	0,2991
3	0,5593
4	0,7869
5	0,9234
6	0,9803
7	0,9966
8	0,9996
9	0,9999
10	1

Pour obtenir l'autorisation de mise sur le marché, les médicaments doivent passer avec succès différents types d'essais. Pour les essais pré-cliniques, un médicament est testé sur des souris. On constate la guérison de 90 % des souris malades. Pour les essais cliniques de phase II, ce même médicament est administré à 200 patients atteints par la maladie. On constate la guérison de 162 malades. On se propose de déterminer si l'efficacité du médicament constatée chez les souris se confirme chez les humains.
On suppose que la probabilité de guérison d'un patient est $p = 0,90$. X est la variable aléatoire qui compte le nombre de patients guéris dans l'échantillon de 200 patients.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95 %.
2. Peut-on affirmer que ce médicament est aussi efficace sur les souris que sur les patients ?

Donner la définition de l'intervalle de fluctuation à 95% d'une fréquence correspondant à une loi binomiale de paramètres n, p.
Exercice :
Dans un lycée, 40 % des élèves préfèrent les livres de science-fiction aux autres types de livres.
On interroge au hasard, 15 élèves de ce lycée.
On admet que la variable aléatoire X, qui compte le nombre d'élèves préférant les livres de science-fiction sur les 15 choisis, suit une loi binomiale.

1. Quels sont les paramètres de cette loi ?
2. Calculer $p(7 \leq X \leq 9)$.
3. Déterminer l'intervalle de fluctuation à 95%.

39 Probabilités conditionnelles

Un ancêtre de Luce a caché un trésor. La probabilité qu'il ait caché le trésor au pied de l'un de 30 pommiers du verger choisi au hasard est de 0,9. Luce a déjà cherché en vain au pied de 29 des 30 pommiers.

Quelle est la probabilité que le trésor se trouve au pied du dernier pommier ?

Un sondage est effectué dans une entreprise comprenant 20% de cadres et 80% d'employés On sait que 40% des cadres et 15% des employés parlent l'anglais. On appelle C l'événement «être cadre», E l'événement «être employé» et A l'événement «parler l'anglais».

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. On choisit au hasard une personne de l'entreprise.
   (a) Calculez la probabilité de l'événement $C \cap A$.
   (b) Calculer $P(A)$.
3. On choisit une personne de cette entreprise qui parle anglais. Quelle est la probabilité que cette personne soit un cadre ?

Une entreprise achète une machine neuve. On considère que si une panne se produit un jour n, la probabilité qu'une panne survienne le jour suivant est $\frac{3}{5}$ et que si aucune panne ne se produit le jour n, la probabilité qu'une panne survienne le jour suivant est $\frac{2}{7}$.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on note p_n la probabilité de l'événement : «une panne se produit le jour n». Donner p_1 et justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{11}{35}p_n + \frac{2}{7}$. (On peut utiliser un arbre pondéré).
2. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = p_n - \frac{5}{12}$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et exprimer u_n puis p_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite p_n. Interpréter.

Dans une ville, 35% des habitants sont des femmes. 96% de femmes et 56% des hommes connaissent le magazine Elle. On interroge un habitant au hasard et on considère les évènements A et C suivants :

- A : « la personne interrogée est une femme. »
- C : « la personne interrogée connaît le magazine Elle. »

1. Donner $P_A(C)$ et $P_{\overline{A}}(C)$.
2. Construire un arbre de probabilités représentant la situation.
3. Calculer les probabilités $P(A \cap C)$ et $P(C)$.
4. Calculer $P_C(A)$. Interpréter.
5. Les évènements A et C sont-ils indépendants ? Justifiez.

40 Lois Continues - Uniforme et exponentielle (1)

Enoncer et démontrer la propriété de durée de vie sans vieillissement d'une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.

On estime qu'un chêne pédonculé vit en moyenne 240 ans.

1. La durée de vie, en années, d'un chêne est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité peut être approchée par une loi exponentielle. Quel est son paramètre ?
2. Un chêne produit ses premiers glands à 50 ans. Calculer la probabilité qu'un chêne produise des glands.
3. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un chêne soit comprise entre 200 et 500 ans.

Le choix d'un réel x dans l'intervalle [-1,5] se fait suivant la loi uniforme.

1. Quelle est la probabilité que l'on ait : $|x| \leq 2$?
2. Quelle est la probabilité que l'on ait : $2x^2 - 1 > 0$?
3. Soit $t > 0$. Le choix d'un réel x dans $[-t, t]$ se fait suivant la loi uniforme.
   (a) Calculer t sachant que $p([-0,25; 0,5]) = \dfrac{1}{8}$
   (b) Calculer alors $p([2,2; 3])$.

1. On choisit un nombre au hasard entre 2 et 10. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre choisi.
   (a) Quelle loi suit X ?
   (b) Déterminer la probabilité $P(3 \leq X \leq 7)$.
   (c) Calculer l'espérance de X et l'interpréter.
2. La durée de vie (en heures) d'un certain type d'ampoules électriques est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.
   (a) Donner la fonction de densité de T.
   (b) Calculer la probabilité pour qu'une ampoule du même type n'ait pas de défaillance avant 100 heures.
   (c) Calculer l'espérance de T et interpréter.

41 Lois Continues - Uniforme et exponentielle (2)

Soit f la fonction définie sur $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^2}$.

1. Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de densité f.
   (a) Déterminer $P(2 \leq X \leq 8)$.
   (b) Déterminer le plus grand réel h tel que $P(X \leq h) \leq 0,95$.

---

1. En rendant un devoir, le professeur annonce que, suite à de nombreuses tricheries, il a décidé de noter chaque copie aléatoirement entre 5 et 15.
   (a) Quelle est la probabilité qu'un élève ait une note supérieure à 12 ?
   (b) Quelle note un élève peut-il espérer obtenir ?
   (c) Le professeur indique à un élève que sa note est supérieure à 12. Quelle est la probabilité qu'elle soit supérieure à 16 ?
2. La variable aléatoire X égale à la durée de vie d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle. On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à deux jours est, à 10^{-3} près, égale à 0,160.
   (a) Calculer, à 10^{-3} près, le paramètre de la loi.
   (b) Calculer les probabilités des événements $(X = 7)$ et $(6 < X < 10)$.
   (c) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un atome ayant déjà 5 jours dépasse 7 jours.

---

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. Montrer que $P(X \leq E(X))$ est indépendante de λ.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. Pour quelle(s) valeur(s) de t, les événements $(X < t)$ et $(X > t)$ ont-ils la même probabilité ?
3. La durée de vie (en heures) d'un certain type d'ampoules électriques est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle. On sait que la durée de vie moyenne d'une ampoule est 50 heures. On choisit au hasard une ampoule ayant déjà fonctionné 3 heures. Quelle est la probabilité que sa durée de vie soit supérieure à 38 heures ?

---

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-5\ ;\ 2]$.
   (a) Déterminer : $P(X = 3)$; $P(0 \leq X \leq 1)$; $P(-6 \leq X \leq 3)$
   (b) Calculer E(X).
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. Exprimer en fonction de λ , $P(1 \leq X \leq 3)$.
3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ, telle que $P(X \leq 1) = 0,18$. Alors la valeur de λ est :
   a) $\lambda = \ln(\dfrac{50}{41})$; b) $\lambda = \ln(\dfrac{41}{50})$; c) $\ln(0,82)$;
   d) $\lambda = \dfrac{ln(8,2)}{ln(100)}$
   Plusieurs réponses sont possibles.

42 Loi normale

Le nombre N de globules rouges par mm^3 de sang est en moyenne de $4,5 \times 10^6$. Pour 95% des humains, ce nombre est compris entre 4×10^6 et 6×10^6.

1. En supposant que N suit une loi normale, en déterminer les paramètres.
2. Déterminer la probabilité que parmi 100 personnes choisies au hasard, au moins 60 aient un taux de globules rouges supérieur à $4,3 \times 10^6$.

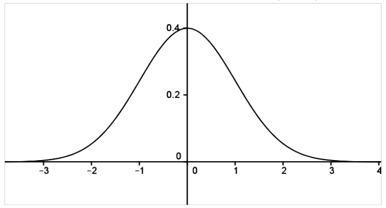
Une usine fabrique des pièces dont la taille théorique est 50 mm. On suppose que la variable aléatoire X qui, à une pièce associe sa taille suit la loi normale $N(50; 0,1^2)$

1. Calculer la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard mesure entre 49,8 et 50,2 mm.
2. L'entreprise décide de faire varier σ pour que la probabilité qu'une pièce prélevée au hasard mesure entre 49,8 et 50,2 mm soit 0,98.
   (a) On pose $Z = \dfrac{X-50}{\sigma}$. Quelle loi suit Z ?
   (b) Déterminer σ.

X est une variable aléatoire qui suit la loi centrée réduite $\mathbb{N}(0,1)$.

1. Montrer que pour tout réel x positif,
   $P(-x \leq X \leq x) = 2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.
2. On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$.
   (a) Justifier que G est bien définie. Que peut-on dire de G ?
   (b) Démontrer que $\lim\limits_{n \mapsto \infty} G(x) = \frac{1}{2}$ et calculer $G(0)$.
3. On considère la fonction H définie par $H(x) = p(-x \leq X \leq x)$.
   (a) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x)$.
   (b) Justifier que H est dérivable, calculer $H'(x)$ et dresser le tableau de variation de H.
   (c) Si α est un nombre de l'intervalle $]0; 1[$, justifier que $1-\alpha$ est aussi un nombre de l'intervalle $]0; 1[$.
   (d) Quel théorème du cours a-t-on démontré ?

Sur chacun des graphiques ci-dessous la fonction représentée est la fonction densité de la loi N(0,1).



Dans chacun des cas ci-dessous :
Reproduire le graphique.
Représenter graphiquement les probabilités indiquées et donner éventuellement leur valeur.
a) $p(-1 \leq X \leq 1)$ *b)* $p(-2 \leq X \leq 2)$ *c)* $p(-3 \leq X \leq 3)$
d) $p(X \leq 0)$ *e)* $p(0 \leq X)$
f) $p(X \leq -u \quad ou \quad X \geq u)$ avec $u > 0$.

43 Nombres complexes - Module, forme algébrique

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie, pour tout entier naturel n par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = (\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4})z_n$. On note A le point du plan d'affixe z.

1. (a) Calculer sous forme algébrique les complexes z_1, z_2, z_3 et z_4.
   (b) Dans un repère orthonormé direct, placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
3. Quelle est la nature de la suite (d_n) ? En déduire une expression de d_n en fonction de n et de d_0. Donner une interprétation géométrique des nombres d_n.
4. On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_kA_{k+1}$. L_n est la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs $A_0, \ldots, A_n$. Déterminer cette longueur en fonction de n puis sa limite quand n tend vers l'infini.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. |z|=1
2. |z|=-3
3. |z-2i|=3
4. |z-2i|=|3-4i|
5. |z-2|=|z-4i|

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 4i| = |z - (5 + 2i)|$
2. $|z - 4| = |z - 5 + i|$
3. $|iz - 3| = 2$
4. $|\frac{(z-4)}{i}| = |iz + 3|$

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1. $Re(z) = 1$
2. $Im(z) = 2$
3. $Re(z) = 2Im(z)$
4. $z = \bar{z}$

44 Nombres complexes (forme trigonométrique)

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(cos\theta + isin\theta)^n = cos(n\theta) + isin(n\theta)$$

Cette formule est connue sous le nom de ***formule de Moivre***.

1. Rappeler les propriétés du module et argument d'un produit, d'un quotient, d'une puissance de nombres complexes.
2. Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.
   (a) $z = (cos\frac{\pi}{8} + isin\frac{\pi}{8})^6$
   (b) $z = sin\alpha + icos\alpha$
   (c) $z = (1+i)(cos\frac{\pi}{9} + isin\frac{\pi}{9})$
   (d) $z = (1+i)^{2016}$

VRAI ou FAUX à justifier.

1. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$. « Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est un imaginaire pur. »
2. Soit z un complexe non nul. « Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i+z| = 1 + |z|$».
3. Dans le plan complexe, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1+i$, $b = 3i$ et $c = (\sqrt{3} + \frac{1}{2}) + i(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2)$.
   « Le triangle ABC est un triangle équilatéral. »

1. Rappeler la forme trigonométrique et la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.
2. Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants :
   $z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = -2i$; $z_3 = 4 - 4i$; $z_4 = \frac{4}{1-i}$.
   On donnera aussi l'écriture sous forme exponentielle.

45 Nombres complexes et Géométrie

1. Soit f et g les transformations du plan d'expressions complexes : Pour f : $z' = -iz + 2 - i$ Pour g : $z' = 2z + 3 - 2i$
   (a) Déterminer les expressions complexes de fog et gof. f et g sont-elles permutables ?
   (b) Montrer que gof possède un point invariant (qui a pour image lui-même) unique Ω ; calculer son affixe ω.
2. Soit s la transformation du plan d'expression complexe $z' = \bar{z}+2i$.
   (a) Déterminer l'expression complexe de sos. En déduire que $s^{-1} = s$.
   (b) Montrer que l'ensemble des points fixes (ou points invariants) de s est une droite (D), en donner une équation.
   (c) Montrer que s est la symétrie orthogonale d'axe (D).

Dans le plan complexe, on donne A et B les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 3 + 5i$

Déterminer les affixes des points :

1. A' et B' symétriques respectifs de A et B par rapport à l'axe des réels.
2. A'' et B'' symétriques respectifs de A et B par rapport à l'axe des imaginaires purs.
3. A''' et B''' symétriques respectifs de A et B par rapport l'origine du repère.

1. VRAI ou FAUX à justifier.

   z désigne un nombre complexe.

   (a) Si $Re(z) = 0$ alors $z = 0$.
   (b) Si $z \neq 0$ alors $Ré(z) \neq 0$.
   (c) Si $Im(z) = 0$ alors z est réel.
2. Donner la réciproque de chaque affirmation. Est-elle vraie ?
3. Donner la contraposée de chaque affirmation. Est-elle vraie ?

Traduire les propositions suivantes à l'aide d'une égalité entre affixes des points :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
2. $\overrightarrow{AB} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
3. I est le milieu de $[AB]$.
4. $EFGH$ est un parallélogramme.

46 Nombres complexes - équations

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. Soit (E') l'équation : $z^2 + \frac{1}{z^2} - 5(z + \frac{1}{z}) + 6 = 0$.
   Montrer que (E) et (E') ont les mêmes solutions dans $\mathbb{C}$.
3. On pose $Z = \frac{z+1}{z}$. Calculer $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ en fonction de z.
4. Soit z une solution de (E').
   Montrer que Z est une solution de l'équation $Z^2 - 5Z + 4 = 0$.
5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les deux équations $z^2 - z + 1 = 0$ et $z^2 - 4z + 4 = 0$.
6. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

On considère la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{(z-2+i)}{(z+i)}$, avec z nombre complexe différent de $-i$.

1. Déterminer l'image de $2i$ par f.
2. Résoudre l'équation $f(z) = 1 + i$.
3. Déterminer les antécédents éventuels par f de :
   a. 0 ; b. $-i$; c. $3 - 2i$

On pose $P(z) = 2z^3 - 10z^2 + 21z - 18$

1. Déterminer des réels a, b, c tels que
$$P(z) = (z-2)(az^2 + bz + c).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 1cm. A,B,C et D désignent les points d'affixes respectives $z_A = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$, $z_B = \bar{z_A}$, $z_c = -z_A$ et $z_D = iz_A$.

Déterminer en justifiant la nature du quadrilatère $ABCD$.

Point méthode : Savoir résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

- **équation du** 1^{er} **degré d'inconnue** z**.** (la méthode est la même que dans $\mathbb{R}$, on isole l'inconnue z)
- **équation d'inconnue** z **et** $\bar{z}$ (on ne sait pas résoudre directement une équation où interviennent en même temps z et $\bar{z}$. On va donc transformer z en $x + iy$ et résoudre un système de deux équations à deux inconnues dans $\mathbb{R}$)
- **équation du second degré** (on calcule Δ)

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z :

1. $(2+i)z - 3 + i = 0$;
2. $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$;
3. $2z^2 - 6z + 5 = 0$.

47 Fonction exponentielle (1)

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - x}$.

Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.

Donner un encadrement à 10^{-2} près de ces solutions.

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $(e^{-x} - e)(e^{3x} + 5) = 0$
2. $e^{x^2} = e^{5x} - 4$
3. $(e^x - 1)(1 - x) \geq 0$
4. $e^{x+1} \geq \dfrac{1}{e^x}$

On considère la fonction f définie sur [-3 ; 4] par :

$$f(x) = (x - 2)e^x$$

1. (a) Montrer que la dérivée de f est définie par : $f'(x) = (x - 1)e^x$.
   (b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations complet de f sur [-3 ; 4].
2. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe de f au point A d'abscisse 0.
3. Justifier que le point A est un point d'inflexion pour la courbe de f.

1. Enoncer les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
2. Ecrire plus simplement les réels suivants :
   $A = e \times (e^x)^2$; $B = \dfrac{e^{2x} \times e^{-4x}}{e^{3x+1}}$; $C = e^{2x} - e^x$.

48 Fonction exponentielle - TVI

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 1000]$ par
$f(x) = \dfrac{e^{2x}+3}{6(e^x-1)}$.
Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ suivant les valeurs du paramètre réel m.

1. Démontrer que l'équation $e^{2x+1} - 2x - 3 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[-4\ ;\ 0]$.
   (a) Etudier les variations de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par
   $f(x) = e^{2x+1} - 2x - 3$.
   (b) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Justifier.
   (c) Donner une valeur approchée de chaque solution, arrondie au dixième.

Soit f définie sur $[-2; 2]$ par $f(x) = e^{(x^2)} + 2x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Soit h, définie sur $[-2; 2]$ par $h(x) = xe^{x^2} + 1$. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $h(x)$.
3. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $[-2\ ;\ 2]$.
4. En déduire les variations de f sur $[-2\ ;\ 2]$.
5. Donner à 10^{-2} près la valeur de x pour laquelle f atteint son minimum.

1. (a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
   (b) Démontrer que l'équation : $e^x - x - 2 = 0$ a au moins une solution dans l'intervalle $[1\ ;\ 2]$.
2. (a) Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à une fonction strictement monotone sur un intervalle.
   (b) f est une fonction continue sur [-2 ; 4], dont le tableau de variation est donné ci-dessous :

x	-2		0		1		4
f(x)			3				0
		↗		↘		↗	
	-2				-1		

Donner, en justifiant, le nombre de solutions de chaque équation :
a) $f(x) = -1$; b) $f(x) = 0,5$; c) $f(x) = 2$. Justifier.

49 Fonction exponentielle (2)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.
On considère la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

1. Déterminer une équation de (T).
2. ϕ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\phi(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} - f(x)$ Démontrer que $\phi'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2}{4(1+e^x)^2}$.
En déduire la position de C_f par rapport à (T).

1. Résoudre les équations ou inéquations proposées :
   (a) $e^{3-x} = 1$;
   (b) $(e^x - 1)(e^x - e) < 0$;
   (c) $(e^{x^2} - 1)(e^x - e) < 0$;
2. Etudier le signe des fonctions suivantes :
   (a) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x^2 - 2x)(e^x - 1)$
   (b) h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{x^2-3}{1+e^x}$

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^x + 1$. On note C_f la courbe représentative de la fonction f et f' sa fonction dérivée.

1. Etudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[-1\ ;\ 0]$. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 est $y = x + 1$.
4. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f .

	Instruction	Réponse
1	$f(x) = x \cdot exp(-x) + 1$	$xe^{-x} + 1$
2	$f''(x) =$ dérivée seconde $[f(x)]$	$e^{-x}(x-2)$
3	résoudre $[e^{-x}(x-2) > 0]$	$x > 2$

   (a) Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Etudier la convexité de f.
   (c) En déduire la position relative de C_f par rapport à T sur $]-\infty\ ;\ 2]$.

1. Soit q un réel strictement positif.
   (a) Donner le sens de variation des fonctions $x \mapsto q^x$ suivant les valeurs de q.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$. (Indiquer aussi les valeurs remarquables.)
   (c) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe de $x \mapsto e^x$ au point $(0, 1)$?
   (d) Ecrire cinq propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
2. Ecrire le plus simplement les réels suivants : $A = e^x \times e^{-x+1}$; $B = (e^{2x})^3(e^{-x})^6$.

50 Logarithme - Propriétés algébriques

(u_n) est définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - 2$ et : (v_n) est définie par $v_n = e^{u_n \ln(2)}$.

Déterminer $\lim\limits_{n \mapsto \infty} \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

1. Résoudre $\ln(3 - 3x) = -2$.
2. Résoudre $\ln(3 - 2x) = 1$.
   (a) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on a : $\ln(\dfrac{1+x}{1-x}) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$.
   (b) Résoudre. $\ln(\dfrac{1+x}{1-x}) < \ln(1+x)$.

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $2\ln(x) = \ln(x-4) + \ln(x-3)$.
2. $\ln(x^2) = \ln[(x-4)(x-3)]$.
3. $\ln(x) + \ln(x-4) > 0$.
4. $\ln(x(x-4)) > 0$.

1. Enoncer les propriétés algébriques du logarithme népérien.
2. Simplifier l'écriture des nombres :
   $A = \ln(5) + \ln(\dfrac{1}{25}) + \ln(\sqrt{5})$
   $B = 3\ln(\sqrt{7}) - \dfrac{1}{2}\ln(49)$
   $C = \ln(e^2\sqrt{e}) - \ln(\dfrac{1}{e})$

51 Logarithme - Etude de fonction

Soit k un nombre réel.
x étant un réel strictement positif, discuter suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation :

$$(E) \qquad \ln(x) = kx^2$$

1. Etudier les variations de la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + \ln(x) - 2x$.
2. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
3. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

f est la fonction définie sur $[0; +\infty]$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)x^3}$ où $g(x) = x - 2(1+x)\ln(1+x)$.
3. Etudier les variations de g.
4. Construire le tableau de variation de f sur $[0; +\infty[$.

1. Donner le tableau de variation de la fonction ln (limites comprises).
2. Etudier les variations des fonctions suivantes :
   (a) $f : x \mapsto \ln(x) + x$ sur $]0\ ; +\infty[$
   (b) $g : x \mapsto \dfrac{3}{(\ln(x))}$ sur $]0\ ; +\infty[$
   (c) $h : x \mapsto \ln(x^2 + 5)$ sur $\mathbb{R}$.

52 Limites de fonctions (1)

Pour chaque affirmation, répondre $Vrai$ ou $Faux$ en justifiant la réponse.

1. La limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{cos(x)}{1+x^2}$ n'existe pas.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-|x-1| = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-6} = \dfrac{4}{5}$

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2-x^2}{5x^2-3x-2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
3. En déduire que la courbe représentative de f admet 3 asymptotes dont on donnera les équations.

<u>Enoncé 1</u> : On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2+2x-3}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Justifier que la courbe représentative de f admet 3 asymptotes dont on donnera les équations.

<u>Enoncé 2</u> : f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x : $1 \leq f(x) \leq 2$. On considère la fonction g définie pour tout réel $x \neq 0$ par : $g(x) = \dfrac{2f(x)+1}{x^2}$.
Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont-elles asymptotes à C_g, courbe représentative de g ? Justifier.

On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	$-\infty$		-2		0	1		$+\infty$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$		$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1

1. Ecrire les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition de f.
2. Préciser l'équation des éventuelles asymptotes à la courbe de f.
3. Tracer une allure possible de la courbe de f ainsi que ses asymptotes.

53 Limites de fonctions (2)

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :
   $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x+5}$.
   (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   (b) Interpréter graphiquement.
2. a est un réel. Etudier $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+2} - ax$ suivant les valeurs du réel a.

---

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{-x^2+4}$ (étudier les limites à droite et à gauche).
2. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 - cos(x)$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x - sin(x)}{x^2}$.
4. La fonction f est définie sur $]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2-x^2}{5x^2-3x-2}$.
   Montrer que la courbe de f admet une asymptote horizontale et une asymptote verticale et étudier la position relative de la courbe de f et de son asymptote horizontale.

---

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{x+3}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer des réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+3}$.
3. D est la droite d'équation $y = x + 1$. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x+3}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x+3}$. Interpréter graphiquement.

Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + \dfrac{1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 1$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + \dfrac{1}{x} - x^2$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} x^2 + \dfrac{1}{x^4}$ $\quad \lim\limits_{x \to 2} x^2 + \dfrac{1}{(x-2)^2}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 5x$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 2x - 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + \dfrac{1}{x} + 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-3x+1}{2x-4}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x-2}{5x+3}$

54 Primitives - Calculs techniques

On pose $f_n(x) = (\sqrt{x})^n$, n entier naturel non nul et $x > 0$.
Déterminer une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction racine carrée.
(On pourra calculer la dérivée de la fonction f_n pour différentes valeurs de n).

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 2x^3 + 1$
2. $f(x) = e^{-3x}$
3. $f(x) = cos(3x)$
4. $f(x) = 3xe^{x^2-1}$
5. $f(x) = x^3 - e^3 + e^{-x}$
6. $f(x) = \dfrac{e^x}{2e^x + 1}$

1. Déterminer la primitive F sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2 - x + 1)}}$ qui vérifie $F(2) = 1$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I =]-2,5 ; 3[$ par : $f(x) = \dfrac{11}{2x^2 - x - 15}$
   (a) Déterminer des réels a et b tels que : $f(x) = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{2x+5}$
   (b) Déterminer la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. F est une fonction définie sur I. Donner la définition de : « F est une primitive de f sur I. »
2. (a) Justifier que les fonctions F et G ci-dessous sont deux primitives sur $]-1, +\infty[$ d'une même fonction f à déterminer.
   $F(x) = \dfrac{3x+7}{x+1}$ $G(x) = 9 + \dfrac{4}{x+1}$;
   (b) Sans calculer $F(x) - G(x)$, dire si chacune des propositions suivantes peut être vraie ou fausse. Justifier.
      i. $G(x) - F(x) = 6$
      ii. $G(x) - F(x) = 6x$
      iii. $G(x) - F(x) = \dfrac{6}{x+1}$
      iv. $G(x) - F(x) = \dfrac{6x+6}{x+1}$

55 Intégrales (Calculs)

Soit F la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$F(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Calculer la dérivée de F. En déduire $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$.

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_e^1 \frac{\ln(x)}{x}\ dx$;
$B = \int_1^3 \frac{2x+3}{(x^2+3x+10)^2}\ dx$;
$C = \int_2^3 x\sqrt{2x^2-3}\ dx$;

$D = \int_1^2 x^{-4} dx$;

$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)\ cos^2(x)\ dx$.

On pose : $I = \int_0^x cos^2 t\ dt$ et $J = \int_0^x sin^2 t\ dt$.

1. Calculer : $I + J$ et $I - J$.
2. En déduire I et J.

Calculer les intégrales suivantes :

$A = \int_0^1 -t^2 + 6t\ dt$;

$B = \int_4^1 \frac{3}{x^5}\ dx$;
$C = \int_1^2 e^{-t+1}\ dt$;

$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin 2t\ dt$;

56 Fonction intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[a;b]$ par :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

1. Montrer qu'il existe un nombre réel α appartenant à l'intervalle $[a;b]$ tel que $F(\alpha) = \frac{1}{2}F(b)$.
2. Ce réel α est-il unique ?

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[\frac{1}{2};+\infty[$ par :

$$F(x) = \int_{\frac{1}{2}}^x \ln(t)\ dt$$

En utilisant un théorème du cours, justifier que F est dérivable et déterminer $F'(x)$. En déduire le sens de variation de F sur $[\frac{1}{2};+\infty[$.

Soit G la fonction définie sur l'intervalle $[1;3]$ par :

$$G(x) = \int_1^x \frac{1}{2+cost}\ dt$$

Etudier les variations de G sur $[1;3]$

Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[1;5]$ par :

$$F(x) = \int_1^x (3t^2+1)\ dt$$

1. Déterminer $F(1)$.
2. Calculer l'image de 3 par F.
3. En utilisant un théorème du cours, justifier que F est dérivable et déterminer $F'(x)$

57 Fonction intégrale et suites

1. Démontrer que la suite (J_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par $J_n = \int_1^n e^{-t}\sqrt{t+1}dt$ est croissante.

2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t}dt$. Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$. En déduire que $J_n \leq I_n$.

3. On veut calculer I_n, soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = (1+t)e^{-t}$

   (a) Montrer que pour tout t, $f(t) = -f'(t) + e^{-t}$

   (b) Déterminer une primitive de f

   (c) Calculer I_n en fonction de n.

   (d) En déduire que (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n). Conclure.

Soit la suite d'intégrales $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}, n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Que peut-on en conclure ?

3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = 1 - J_n$ avec $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$

   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < J_n < \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Soit la suite (In) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}dx$.

1. Etudier le sens de variation de (I_n).

2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, on a : $\frac{1}{4} < \frac{1}{1+e^x} < \frac{1}{2}$. En déduire un encadrement de I_n et la limite de la suite (I_n).

Pour tout entier n on pose : $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}dx$.

1. Calculer I_0.

2. Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3. Justifier que, pour tout entier n : $I_n \leq \int_0^1 x^n dx$ et en déduire la limite de (I_n).

58 Matrices (1)

Voci un algorithme :

```
Choisir un nombre a
Choisir un nombre b
Pour i allant de 1 à 12
   a prend la valeur a − 2b
   b prend la valeur −a + 2b
Fin Pour
Afficher a
Afficher b
```

En utilisant des matrices, déterminer ce qu'on obtient en choisissant $a = 1$ et $b = 1$.

On donne la matrice $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 8 & d \end{pmatrix}$ où a et d sont des réels.

1. Calculer A^2.
2. Déterminer les valeurs de a et d pour lesquelles $A^2 = 2A$.

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 à la calculatrice.
2. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
3. Sans utiliser la calculatrice, montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer si possible $A + B$; AB ; AC ; CA ; $BA + C$ et $A + C$.
2. Vérifier les résultats à la calculatrice.
   (a) Déterminer si A et B sont inversibles. Si oui, donner A^{-1} et B^{-1}.
   (b) Qu'en est-il de C ?

59 Matrices (2)

Voci un algorithme :

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la valeur de A^n, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.
2. Démontrer votre conjecture par récurrence.
3. En déduire A^{18}.

1. Résoudre en utilisant des matrices le système $\begin{cases} a+b+c=4 \\ 4a-2b+c=-5 \\ a-b+c=0 \end{cases}$
2. Déterminer la fonction polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points $A(1;4)$, $B(-2;-5)$ et $C(-1;0)$.

En utilisant les matrices, déterminer la fonction polynôme de degré 2 dont la courbe passe par les points $A(1;4)$, $B(-2;-5)$ et $C(-1;0)$.

1. Traduire chacun des systèmes suivants sous forme matricielle :
   (a) $\begin{cases} 2x+3y+2z=3 \\ x+2y-5z=1 \\ 3x-4y+8z=0 \end{cases}$
   (b) $\begin{cases} 6x+2y=5 \\ 9x+3y=2 \end{cases}$
   (c) $\begin{cases} 6x+2y=4 \\ 9x+3y=6 \end{cases}$
2. Résoudre le premier système en utilisant la calculatrice.
3. (a) Vérifier que la calculatrice ne permet pas de résoudre les deux autres systèmes.
   (b) Déterminer l'ensemble des solutions de chacun d'entre eux.

60 Matrices inversibles

On considère la matrice notée R_θ définie par : $R_\theta = \begin{pmatrix} cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ est un nombre quelconque.

1. Prouver, que pour entier naturel n, $(R_\theta)^n = (R_{n\theta})$.
2. Dans cette partie, on prend $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Démontrer que $R^6 = I_2$ puis en déduire que R est inversible et calculer R^{-1}.
3. Déterminer la matrice R^{2016}.

Léa veut calculer sa moyenne à l'aide des trois notes qu'elle a obtenues aux trois devoirs du trimestre. Elle remarque que :

- Si le professeur affecte le coefficient 1 à tous les devoirs, sa moyenne est de 11.
- Si le professeur décide d'affecter un coefficient 2 au premier devoir, sa moyenne sera de 11,25.
- En revanche s'il décide d'affecter un coefficient 2 plutôt au second devoir, sa moyenne devient 10,5.

Quelles sont les trois notes obtenues par Léa ce trimestre ?
Vous traduirez la situation en écriture matricielle de la forme $AX = Y$ (où les matrices A ; X et Y seront à préciser).

Considérons une matrice carrée d'ordre 2 quelconque $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels quelconques.

- Prouver que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I_2$.
- En déduire que si $ad - bc \neq 0$, alors M est inversible. Retrouver dans ce cas l'inverse de M.

1. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ alors A^{-1} est égal à :

   a) $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1.5 & 0.5 \end{pmatrix}$
   d) aucune des 3 matrices précédentes

2. La matrice associée au système $\begin{cases} 2x + 3y = a \\ 5x - 7y = b \end{cases}$ est :

   a) inversible
   b) non inversible
   c) inversible pour certaines valeurs de a et b et non inversible pour d'autres
   d) a pour inverse une matrice de la forme $s \times \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

61 Matrices - Marches aléatoires

Une urne A contient 2 boules blanches et une urne B contient 4 boules rouges. On procède au tirage aléatoire simultané d'une boule de chaque urne et la boule extraite est changée d'urne.

Quelle est la probabilité qu'il y ait au bout d'un grand nombre de tirages 2 boules rouges dans l'urne A ?

Une coccinelle se déplace sur un triangle. Arrivée à un sommet, elle choisit au hasard une arête partant de ce sommet et la parcourt jusqu'à atteindre l'autre sommet. On note X_n la variable aléatoire égale à 1, 2 ou 3 si la coccinelle se trouve au sommet 1, 2 ou 3 au bout de n déplacements. On pose $P_n = (P(X_n = 1)\ ;\ P(X_n = 2)\ ;\ P(X_n = 3))$.

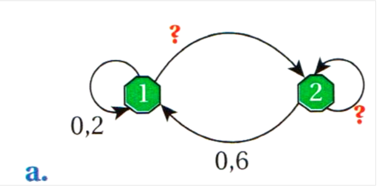
1. Déterminer M la matrice de transition correspondant à la marche aléatoire le la coccinelle.
2. Déterminer la probabilité qu'elle se trouve au sommet 1 au bout de trois déplacements.

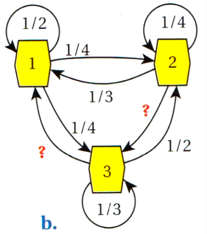
La population d'une ville se répartit entre locataires et propriétaires. La population globale ne varie pas mais, chaque année, pour des raisons familiales ou professionnelles 10% des propriétaires deviennent locataires tandis que 20% des locataires deviennent propriétaires. L'évolution des populations de propriétaires et de locataires s'apparente à une marche aléatoire sur un graphe probabiliste à 2 sommets.

1. Représenter ce graphe et écrire la matrice de transition M de cette marche aléatoire.
2. Déterminer l'état stable de cette marche aléatoire. Interpréter le résultat.

On considère une marche aléatoire entre les sommets d'un graphe. Pour chacun des graphes ci-dessous :

1. Compléter les probabilités manquantes ;
2. Ecrire la matrice de transition pour la marche (sommet de départ en colonne, sommet d'arrivée en ligne).

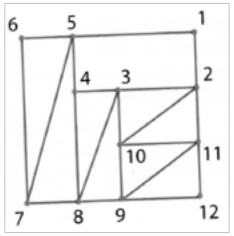




62 Graphes (1)

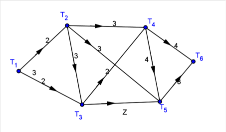
On veut créer un système qui ne se déclenche que si on saisit le code ABC à partir d'un clavier d'ordinateur.
Construire un graphe qui répond au problème.
Proposer un algorithme traduisant le procédé.

Lors de la réalisation d'un lotissement le promoteur doit prendre en compte la demande des services publics :
«Pouvoir passer dans ce réseau en empruntant chaque rue, une fois et une seule».
Le plan ci-dessous respecte-t-il le cahier des charges ? Si oui, donner un itinéraire possible pour la tournée du facteur.



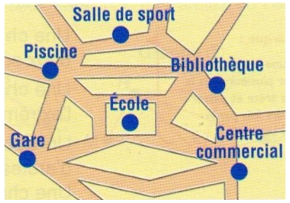
Les sommets T_1 à T_6 du graphe ci-contre représentent les tâches à exécuter pour la réalisation d'un chantier du début (T_1) à la fin(T_6).
L'existence d'une arête orientée $T_i - T_j$ indique que la tâche T_j ne peut être exécutée que si la tâche T_i est déjà exécutée.
Le nombre figurant sur une arête est égal à la durée de la tâche correspondant à l'origine de l'arête.

Quelle est la durée minimale du chantier ?



Le plan ci-contre représente le réseau des pistes cyclables desservant certains sites d'une agglomération.

1. Construire le graphe associé à ce réseau.
2. Décrire ce graphe.
3. Indiquer, dans un tableau, le degré de chacun de ses sommets. Le graphe est-il complet ? Justifier.
4. Combien de pistes cyclables la municipalité doit-elle construire pour que deux sites quelconques de l'agglomération soient reliés directement ?



63 Graphes (2)

On note M la matrice d'ordre 2 suivante :

$M = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & a-b \end{pmatrix}$
où a et b sont deux réels de l'intervalle $]0;1[$.

1. Expliquez pourquoi M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre 2.

2. Déterminer l'état stable de ce graphe en fonction de a et b.

Marie a acheté une plante à fleurs bleues. Les deux premières années la fleur de la plante reste bleue. Puis les années suivantes, sans traitement particulier, la plante obéit aux règles de floraison suivantes :
Si la plante donne une fleur bleue l'année n, alors elle donne de façon équiprobable, une fleur rose ou bleue l'année $n+1$.
Si la plante donne une fleur rose l'année n, l'année $n+1$ elle donne alors une fleur rose.

1. Traduire la situation par un graphe probabiliste.

2. Donner la matrice de transition de ce graphe.

3. Calculer la probabilité qu'à la quatrième année, la fleur soit bleue .

4. Déterminer algébriquement l'état stable et interpréter le résultat.

Lisa est un bébé qui se déplace en rampant sur son tapis de jeu. Aux quatre coins A, B, C, D de celui-ci il y a un jouet. Chaque déplacement de Lisa l'amène d'un coin à un autre du tapis.
Si Lisa est en$A$, elle va en rampant en B ou en D, une fois sur deux.
Si Lisa est en B, elle va en rampant en A ou en C, une fois sur deux.
Si Lisa est en C, elle va en rampant en B ou en D, une fois sur deux.
Mais si Lisa est en D, elle va une fois sur trois en A et deux fois sur trois en C.

1. Modéliser cette situation par un graphe probabiliste.

2. On suppose qu'au départ, Lisa est en A. Quelles sont les possibilités de voir Lisa en A, en B, en C ou en D, après un déplacement ? deux déplacements ? trois déplacements ?

3. Sans calculs pouvez-vous dire avec quelle probabilité Lisa s'endormira en D (avec son doudou) au bout de 99 déplacements ?

Deux villes A et B totalisent une population de 22 000 habitants.
On constate que 84% des habitants de A habitent encore A l'année suivante et que 30% des habitants de B partent chaque année habiter A. On modélise l'évolution de la répartition de la population entre les deux villes par un graphe.

Déterminer un tel graphe et donner sa matrice de transition.

64 Graphes (3)

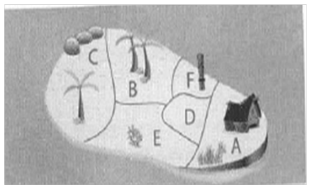
M et Mme Matheux participent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance. Certains participants se saluent en se serrant la main. Personne ne serre sa propre main et aucun ne serre la main de son conjoint. Deux personnes se serrent la main au plus une fois.
M Matheux constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de main en nombre tous distincts.

Combien M et Mme Matheux ont-ils échangé de poignées de mains avec les autres membres de la réunion ?

Sept villes A, B, C, D, E, F et G sont reliées par des routes. On note M la matrice associée à ce graphe, les sommets étant ordonnés selon l'ordre alphabétique : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Dessiner un graphe représentant la situation.
2. Donner le nombre de chemins de longueur 3 reliant le sommet A au sommet F. Les citer tous.
3. Existe-t-il un itinéraire permettent de visiter ces villes en utilisant une fois et une seule toutes les routes ?

Des rescapés d'un naufrage sont pris en otage par des pirates et retenus sur une île. L'un d'entre eux réussit à capter un message extérieur leur indiquant que s'ils réussissent à trouver un chemin qui traverse une fois et une seule toutes les frontières entre les six régions de l'île, un bateau pourra les prendre en charge et les sauver.
L'île est représentée ci-dessous. Les survivants pourront-ils s'échapper ?



1. Un cube peut être considéré comme un graphe.
   (a) Quel est l'ordre de ce graphe ?
   (b) Combien ce graphe a-t-il d'arêtes ?
   (c) Quel est le degré de chaque sommet ?
   (d) Expliquer pourquoi ce graphe n'est pas complet.
2. On rajoute les diagonales de chaque face du cube.
   (a) Obtient-on un graphe complet ?
   (b) Peut-on trouver un sous graphe complet ? Si oui, de quel ordre ? Donner un exemple.
   (c) Combien faut-il ajouter d'arêtes pour que le graphe initial soit complet ?

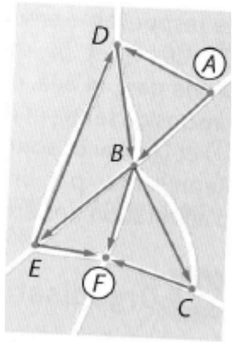
65 Graphes (4)

Un robot est programmé pour accepter les «mots» formés des lettres a et b seulement. Le robot démarre en D et il s'arrête dès qu'il arrive à la fin. On suppose que le robot avance, de deux pas seulement, quand la saisie passe de a à b, puis de b à a.
Le robot met 10 secondes pour faire un pas.
Sinon, il attend 3 secondes entre la saisie de deux lettres, en ronronnant. Pour chacun des mots suivants, calculer le temps entre l'arrêt et le démarrage du robot.
1. baba 2. aaababb 3. bbababababa 4. baabbaabbaa

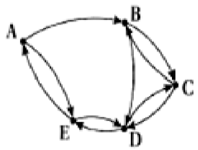
Six bâtiments de A à F composent un pôle industriel.
Toutes les voies ont un sens unique.
On arrive dans la zone par le bâtiment A et on la quitte par le F.

1. Ecrire la matrice du graphe formée à partir des bâtiments et des voies de ce pôle.

2. Déterminer le nombre de trajets qui partent de A et arrivent en F en suivant : a. deux rues ; b. trois rues ; c. quatre rues.



Une exposition est organisée dans un parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'installer un plan de circulation. Il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées. On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D et E. Certaines allées sont sens unique, d'autres sont à double sens. Le graphe ci-contre modélise cette nouvelle situation.



1. Démontrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.

2. Quel est ce cycle ? en est-il de même pour B ?

On considère le graphe ci-dessous. Répondre aux questions suivantes :

1. Ce graphe est-il orienté ?

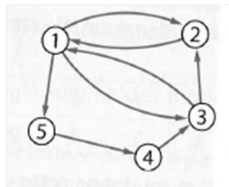
2. Quel est l'ordre de ce graphe ?

3. Combien a-t-il d'arêtes ?

4. Quel est le degré de chaque sommet ?

5. Donner la matrice d'adjacence de ce graphe.

6. Si on ajoute une boucle au sommet 3, quel est le degré de ce sommet ? Démontrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A.



66 Arithmétique

Existe-t-il un (des) entier(s) relatif(s) x tel que $65 + x^2$ soit le carré d'un nombre ?

n est un entier naturel.

1. (a) Vérifier que $2n^2 + 8n + 28 = (n+2)(2n+4) + 20$.
   (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $(n+2)$ divise $2n^2 + 8n + 28$.
2. (a) Montrer que pour tout entier n, $(n+2)$ divise $2n^2 + 10n + 12$.
   (b) En déduire le (ou les) entier(s) naturel(s) n tels que $(n+2)$ divise $4n^2 + 20n + 28$.

1. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles n^2 divise $2n^2 + 8n + 28$.
   (a) Soit $(x; y)$ un couple d'entiers naturels tels que $x^2 + 4y^2 = 164$. Montrer que $y \leq 6$.
   (b) En déduire tous les couples $(x; y)$ d'entiers naturels vérifiant $x^2 + 4y^2 = 164$.

1. Ecrire la liste des diviseurs de 54.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que 3 divise $A = 3n^2 + 6n + 9$.
3. Soit n un entier naturel. Montrer que $(n+3)$ divise $n^2 + 4n + 3$.

67 Divisions congruences (1)

1. Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 4.
2. Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 8.
3. Enoncer et démontrer le critère de divisibilité par 11.

En étudiant les restes possibles de x dans la division euclidienne par 6, résoudre les équations suivantes :

1. $2x \equiv 4[6]$.
2. $2x \equiv 5[6]$.
3. $x + 2 \equiv 4[6]$.

1. Déterminer le chiffre des unités de 3^{2016}.
2. Déterminer le reste de 2^{2016} dans la division par 5.
3. En déduire le chiffre des unités de 2^{2016}.
4. Quel est alors le chiffre des unités de $2^{2016} + 3^{2016}$?

a, b sont des entiers et n un entier naturel.

1. Rappeler la définition de $a \equiv b[n]$.
2. Les entiers 128 et 15 sont-ils congrus modulo 11 ?
3. Déterminer les entiers naturels n tels que $27 \equiv 5[n]$.
4. Quel est le reste dans la division euclidienne de 3^n par 8 ?

68 Divisions congruences (2)

L'objectif de l'exercice est de trouver tous les entiers naturels n tels que $n^2 + 11$ est divisible par $n + 11$.

1. Avec une calculatrice ou un tableur, trouver tous les entiers $n \leq 121$, vérifiant cette propriété.
2. Simplifier l'expression : $n^2 + 11 - (n + 11)(n - 11)$.
3. En utilisant les questions précédentes, répondre au problème posé.

1. Trouver l'ensemble des entiers naturels $n \geq 2$ tels que : $27 \equiv 6(mod n)$.
2. On cherche l'ensemble des entiers naturels n tels que $3n \equiv 7[11]$. Compléter le tableau ci-dessous et conclure.

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$3n \equiv$											
$3n - 7 \equiv$											

3. Déterminer les entiers naturels n tels que $n^3 + 2n^2 - 1$ soit divisible par 5.

Soit n un entier naturel.

1. Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste de la division euclidienne de 2^n par 5.
2. Dans chaque cas, étudier, suivant les valeurs de n, la divisibilité par 5 de : $2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1$

Soit a et b deux entiers relatifs, n un entier naturel non nul.

1. Que signifie l'expression : « a et b sont congrus modulo n » ? Quelle notation utilise-t-on ?
2. Enoncer les propriétés de compatibilité des congruences avec les opérations.
3. Démontrer que, a, b, c et d étant des entiers,
   - Si $a \equiv b[n]$ et si $c \equiv d[n]$ alors, $ac \equiv bd[n]$.
   - Si $a \equiv b[n]$, alors, $\forall\ p$ entier naturel, $ap \equiv bp[n]$.
4. On donne : $a \equiv 7[9]$ et $b \equiv 4[9]$. Déterminer les restes dans la division par 9 de : $a+b$; $4a+3b$; a^2+b^2 ; $2a^2-5b^2$; $(3a+1)(b+2)$.

69 Gauss Bézout

1. Soit N, a et b des entiers naturels non nuls, tels que a et b soient premiers entre eux. Montrer que si a et b divisent N , alors ab divise N.
2. Soit p un nombre premier strictement supérieur à 5. Montrer que $p^4 - 1$ est divisible par 240.

---

1. Enoncer le théorème de BEZOUT.
2. Applications :
   (a) Soit n un entier naturel. Calculer $PGCD(5n + 3, 2n + 1)$.
   (b) Existe-t-il un entier n tel que ces expressions $(n - 6)/15$ et $(n - 5)/12$ soient des entiers ?

---

1. Enoncer le théorème de BEZOUT et le théorème de GAUSS.
2. Démontrer le théorème de GAUSS à partir du théorème de BEZOUT.
3. Soit x et y des entiers relatifs.
   (a) Montrer que l'équation : $17x - 40y = 1$ admet au moins un couple solution.
   (b) Résoudre cette équation.
   (c) En déduire l'existence d'un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1(mod 40)$

---

1. Enoncer l'identité de BEZOUT.
2. Soit $a = 145$ et $b = 55$. Ecrire l'algorithme d'Euclide pour trouver $PGCD(a, b)$. En déduire un couple (u, v) d'entiers relatifs tel que $au + bv = PGCD(a, b)$.

70 PGCD

Deux entiers naturels a et b sont tels que $PGCD(a, b) = 7$. Quel est le PGCD de $4a + 7b$ et $5a + 9b$?

Soit n un entier naturel, $n > 1$.

1. Démontrer que n et $n^2 - 1$ sont premiers entre eux.
2. En déduire le PGCD de $n^3 + n$ et $n^4 - 1$. On précisera la propriété utilisée.

Soit n un entier naturel non nul, $a = 5n+1$ et $b = 2n-1$. On se propose de déterminer le $PGCD(a, b)$ suivant les valeurs de n.

1. Calculer $2a - 5b$. En déduire les valeurs possibles de $PGCD(a, b)$.
2. Compléter le tableau ci-dessous, en utilisant les congruences modulo 7 :

$n \equiv \cdots$							
$a \equiv \cdots$							
$b \equiv \cdots$							

3. Répondre alors au problème posé.

On divise 4294 et 3521 par un même entier naturel non nul n, et les restes respectifs obtenus sont 10 et 11.

1. Traduire ces informations en utilisant la définition de la division euclidienne.
2. Calculer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, le PGCD de 4284 et 3510.
3. En déduire n.

71 Géométrie dans l'espace (1)

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. P est un plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$, avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$, et $A(x_A,y_A,z_A)$ est un point non situé dans P. H est le projeté orthogonal de A sur P. Montrer que la distance AH, c'est-à-dire la distance du point A au plan P est : $AH=\dfrac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.
2. (a) On considère le plan P d'équation cartésienne $x-2y+z-1=0$. La sphère de centre $A(1;3;-4)$ et de rayon 1 coupe-t-elle le plan P ?
   (b) On donne $B(2;-1;m)$. Discuter suivant les valeurs de m, la position relative du plan P et de la sphère de centre B et de rayon 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

1. On note d la droite passant par $A(1;-2;-1)$ et $B(3;-5;-2)$.
   (a) Donner une représentation paramétrique de d.
   (b) Le système ci-dessous est-il une représentation paramétrique de d ? $\begin{cases} x=-1+4u \\ y=1-6u \quad (u \quad réel) \\ z=-2u \end{cases}$
2. P est le plan passant par $A(2,0,-1)$ et perpendiculaire à la droite (AB) avec $B(0,1,3)$.
   (a) Donner une équation cartésienne de P.
   (b) Définir P par la donnée d'un point et de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

- d est la droite passant par $A(1,0,-1)$ et $B(3,-2,1)$.
- d' est la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \quad (t réel) \\ z=-1-t \end{cases}$
- P est le plan d'équation $4x+y+5z+3=0$

1. Montrer que d et d' ne sont pas coplanaires.
2. Etudier les positions relatives de P et d.
3. Etudier les positions relatives de P et d'.

$(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

1. P est le plan d'équation : $3x+4y-z+2=0$. Donner les coordonnées de deux points de P et d'un vecteur normal à P.
2. Soit D la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=2+4t \\ y=-1-t \quad (t réel) \\ z=2-3t \end{cases}$ Donner les coordonnées de deux points de D et d'un vecteur directeur de D.

72 Géométrie dans l'espace (2)

$ABCD$ est un tétraèdre. E est le point de l'arête $[AB]$ tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Le plan P passant par E et parallèle au plan (BCD) coupe l'arête $[AC]$ en F et l'arête $[AD]$ en G. On note I, J et K les milieux respectifs des segments $[FG]$, $[EG]$ et $[EF]$.
Démontrer que les droites (BI), (CJ) et (DK) sont concourantes.

Tracer un tétraèdre $ABCD$ et placer un point I sur la face ACD du tétraèdre. On cherche l'intersection des plans (BAI) et (BCD).

1. Quel point de cette intersection connaît-on ?
2. Déterminons un autre point
   (a) Citer une droite de (BAI) et une droite de (BCD) qui sont coplanaires et non parallèles.
   (b) Justifier que leur point d'intersection est commun aux plans (BAI) et (BCD).
   (c) Justifier que les plans sont sécants et donner leur intersection.

$ABCD$ est un tétraèdre et I est le milieu de $[BC]$. On considère les points J, K, milieux respectifs des segments $[AI]$, $[DI]$.

1. Démontrer que les droites (JK) et (AD) sont parallèles.
2. Déterminer, en justifiant sa construction, la section du tétraèdre $ABCD$ par le plan (JKG) où G est le point de $[CD]$ tel que : $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

ABCDEFGH est un cube. I,J ,K sont les milieux respectifs des arêtes [AB],[BC], et [AE].

1. Citer deux droites sécantes deux droites parallèles deux droites ni sécantes, ni parallèles.
2. Préciser la position relative
   Des droites : a) (FC) et (AF) ; b) (CI) et (AE); c) (EB) et (HC)
   De la droite (HK) et du plan (ABE) ;
   De la droite (AB) et du plan (HIJ) ;
   De la droite (IJ) et du plan (GHF) ;
   De la droite (CD) et du plan (HEA).
   Des plans : a) (AEF) et (EFG) ; b) (BDC) et (EAH) ;
   c) (DKH) et (FBJ) ; d) (ADG) et (EBC).

IREM

Campus Universitaire des Cézeaux
3 place Vasarely
TSA 60026 – CS 60026 –
63178 Aubière cedex

Tél. : **04 73 40 70 98** – Mail : **irem@univ-bpclermont.fr** – Site : **www.irem.univ-bpclermont.fr**