Calcul d'une racine cinquième par AL-KASHI

1 La méthode de RUFFINI-HORNER

Appelée aussi *algorithme de* HORNER, *méthode de* HORNER ou *règle de* RUFFINI, cette méthode fut publiée à quelques années d'intervalle par PAOLO RUFFINI (1804) [1], par FRANÇOIS-DÉSIRÉ BUDAN (1807) [2] et par WILLIAM GEORGE HORNER (1819) [3]. Il semble que ces trois mathématiciens aient mené leurs travaux de façon indépendante. Cette méthode sera popularisée par DE MORGAN et J. R. YOUNG, qui feront intervenir la notion de dérivée.

La méthode de RUFFINI-HORNER est utilisée pour :
- calculer la valeur d'un polynôme en un point,
- calculer la valeur approchée d'une racine d'un polynôme,
- calculer le quotient d'un polynôme de la variable X par $(X - x_0)$.

1.1 Historique

Bien avant que RUFFINI et HORNER ne publient leur méthode, des algorithmes analogues ont été utilisés en Chine et dans le monde arabe :

En Chine :

- Au début du VII$^{\text{ème}}$ siècle, WANG XIAOTONG (ou WANG HSIAO THUNG) écrit un traité contenant 20 problèmes géométriques qui s'expriment par des équations de degré 3 et 4, résolues numériquement par la méthode de HORNER.
- Au XIII$^{\text{ème}}$ siècle, YANG HUI présente étape par étape cette méthode qu'il attribue à LIU YI et JIAN XIAN vers 1200.
- QIN JIUSHAO écrit, vers 1247, le *Livre des nombres en neuf chapîtres* dans lequel il donne « l'art de l'extraction de la racine avec des coefficients positifs et négatifs » ; on y trouve en exemple la résolution d'une équation de degré 10.

Dans le monde arabe :

Dès le XII$^{\text{ème}}$ siècle, AL SAMAWAL et SHARAF AL DIN AL TUSI semblent avoir utilisé cette méthode pour la recherche des racines d'un équation algébrique. Au XV$^{\text{ème}}$ siècle, AL KASHI l'utilise pour extraire des racines énièmes.

1. *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* (opere matematiche)
2. *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque* (Courcier, Paris)
3. *A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation* (Philosophical Transactions)

1.2 Le principe

Considérons un polynôme de degré n :

$$P_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

et un nombre N.

La division euclidienne de $P_0(x)$ par $(x - N)$ donne :

$$P_0(x) = (x - N)P_1(x) + P_0(N)$$

où P_1 est un polynôme de degré $n - 1$:

$$P_1(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i$$

avec les relations :

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_n \\ b_{n-2} &= N.b_{n-1} + a_{n-1} \\ &\vdots \\ b_0 &= N.b_1 + a_1 \end{aligned}$$

En continuant de la même façon, on divise $P_1(x)$ par $(x-N)$, le quotient étant $P_2(x)$ et le reste $P_1(N)$, et on répète l'opération jusqu'à $P_{n-1}(x)$. On a alors :

$$P_0(x) = ((\dots((a_n.(x-N) + P_{n-1}(N)).(x-N) + P_{n-2}(N)).(x-N) + \dots).(x-N) + P_1(N)).(x-N) + P_0(N)$$

Posons alors $\alpha = x - N$, et on a le polynôme :

$$Q(\alpha) = a_n\alpha^n + P_{n-1}(N)\alpha^{n-1} + \cdots + P_1(N)\alpha + P_0(N)$$

Si N est la partie entière d'une racine x_0 de l'équation $P_0(x) = 0$, alors $(x_0 - N)$ est la partie décimale de cette racine, donc $Q(\alpha) = 0$ admet une racine x_1 telle que $0 \leqslant x_1 < 1$.

En appelant N_1 la partie entière de $10x_1$, on a la première décimale de x_0. Pour obtenir cette première décimale, il suffit de chercher la partie entière de la racine de l'équation $10^n Q\left(\dfrac{\alpha}{10}\right) = 0$.

On recommence le processus avec pour nouveau polynôme :

$$R(y) = a_n y^n + 10.P_{n-1}(N)y^{n-1} + \cdots + 10^{n-1}.P_1(N)y + 10^n.P_0(N)$$

1.3 Le calcul pratique

Avec les notations précédentes, calcul des coefficients de $P_1(x)$:

P_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
P_1	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = N.b_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = N.b_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$b_0 = N.b_1 + a_1$	$P_0(N)$

Calcul des coefficients de $P_2(x)$:

P_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
P_1	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} = N.b_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = N.b_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$b_0 = N.b_1 + a_1$	$P_0(N)$
P_2	$c_{n-2} = a_n$	$c_{n-3} = N.c_{n-2} + b_{n-2}$	$c_{n-4} = N.c_{n-3} + b_{n-3}$	$\dots$	$P_1(N)$	

Et on continue, le tableau complet étant :

	c_0	c_1	c_2		c_j			c_n
P_0	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	$\dots$	$\dots$	a_1	a_0
	0	$a_n.N$	$a_n.N^2 + a_{n-1}.N$	$k.N$	$\dots$	$\dots$		$\sum_{i=1}^{n} a_i N^i$
ℓ_0	a_n	$a_n.N + a_{n-1}$	$k = a_n.N^2 + a_{n-1}.N + a_{n-2}$	$k.N + a_{n-3}$	$\dots$	$\dots$		$\sum_{i=0}^{n} a_i N^i$
	0	$a_n.N$	$2a_n.N^2 + a_{n-1}.N$		$\dots$			
ℓ_1	a_n	$2a_n.N + a_{n-1}$	$3a_n.N^2 + 2a_{n-1}.N + a_{n-2}$	$\dots$				
	0							
ℓ_i	a_n			B				
	0			$A.N$				
ℓ_{i+1}	a_n		A	$A.N + B$				
	$\dots$	$\dots$	$\dots$					
	$\dots$	$\dots$	$\dots$					
	0	a_n						
	a_n	$n.a_n.N + a_{n-1}$						
	0							
ℓ_n	a_n							

L'élément qui se trouve à la ligne ℓ_i et la colonne c_j vaut :

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{j} \binom{i+k}{k} a_{n-j+k}.N^k$$

et le coefficient du nouveau polynôme correspondant à la puissance i de la variable est :

$$b_i = c_{i,n-i} = \sum_{k=0}^{n-i} \binom{i+k}{k} a_{i+k}.N^k$$

Remarque :

Considérons $P_0(x)$ sous ses deux formes :

$$P_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} b_n (x-N)^n$$

Ceci revient à écrire :

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} b_n X^n = P_0(X+N)$$

Appliquons la formule de Taylor à $P(X+N)$, et on obtient :

$$Q(X) = \sum_{i=0}^{n} \frac{P_0^{(i)}(N)}{i!} X^i$$

D'où on déduit :

$$b_i = \frac{P_0^{(i)}(N)}{i!}$$

1.4 Exemples

1.4.1 Exemple 1

Résolution de l'équation :

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

En remarquant qu'il existe une racine x_0 comprise entre 1 et 2, on pose $x_0 = 1 + u$
Appliquons l'algorithme de Horner à cette équation :

	1	-1	-1	-1
	0	1	0	-1
	1	0	-1	-2
1	0	1	1	
	1	1	0	
	0	1		
	1	2		
	0			
	1			

D'où u est racine de l'équation :

$$u^3 + 2u^2 - 2 = 0$$

Recherche de la première décimale :
Soit à résoudre l'équation :

$$v^3 + 20v^2 - 2000 = 0$$

qui admet une racine comprise entre 8 et 9. Donc $x_0 = 1,8...$
Posons donc $v = 8 + w$

	1	20	0	-2000
	0	8	224	1792
	1	28	224	-208
8	0	8	288	
	1	36	512	
	0	8		
	1	44		
	0			
	1			

D'où w est racine de l'équation :

$$w^3 + 44w^2 + 512w - 208 = 0$$

Et, pour obtenir la décimale suivante, on est amené à résoudre l'équation :

$$t^3 + 440t^2 + 51200t - 208000 = 0$$

1.4.2 Exemple 2

Recherche de la racine cubique de 12 326 394.

La forme de 12326394 montre que sa racine cubique est un nombre dont la partie entière possède 3 chiffres, c chiffre des centaines, d chiffre des dizaines, u chiffre des unités.

Pour déterminer c, déterminons la partie entière de la solution de l'équation :

$$x^3 - 12 = 0$$

On a donc $c = 2$.

Pour la détermination de d, il faut d'abord déterminer le polynôme équivalent à $x^3 - 12 = 0$ par une translation de 2.

	1	0	0	-12
	0	2	4	8
	1	2	4	-4
2	0	2	8	
	1	4	12	
	0	2		
	1	6		
	0			
	1			

d est la partie entière de la solution de l'équation :

$$x^3 + 60x^2 + 1200x - 4326 = 0$$

La racine étant comprise entre 3 et 4, on a

$$d = 3$$

	1	60	1200	-4326
	0	3	189	4167
	1	63	1389	-159
3	0	3	198	
	1	66	1587	
	0	3		
	1	69		
	0			
	1			

u est la partie entière de la solution de l'équation :

$$x^3 + 690x^2 + 158700x - 159394 = 0$$

La racine étant comprise entre 1 et 2, on a

$$u = 1$$

	1	690	158700	-159394
	0	1	691	159391
	1	691	159391	-3
1	0	1	692	
	1	692	160083	
	0	1		
	1	693		
	0			
	1			

On a finalement

$$(x-231)^3 = 3$$

2 Extraction d'une racine cinquième par al-Kashi

2.1 Introduction

Dans la *Clé de l'arithmétique*, al-Kashi donne un tableau pour obtenir la racine cinquième de 44424 08995 06197 :

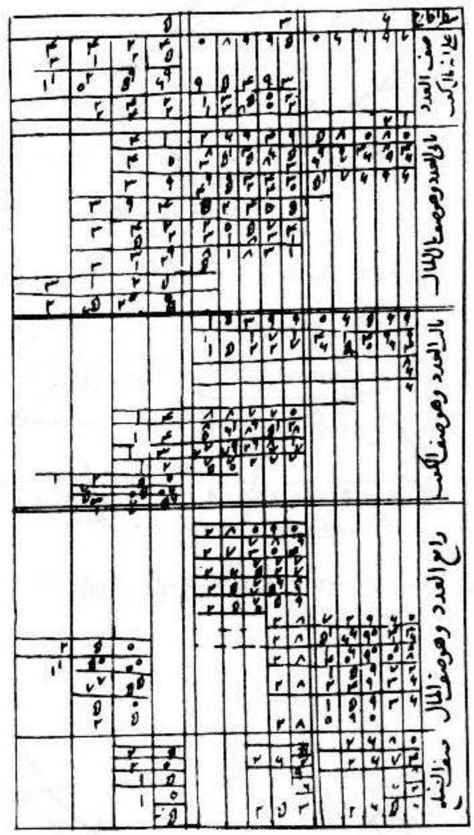

Fig. 19 (p. 78) - Extraction de la racine cinquième du nombre 44 240 899 506 197. Tiré de la Clé de l'arithmétique d'al-Kāšī (manuscrit de Leyde, 1554).

(D'après *Les mathématiques arabes* de Youschkevitch)

D'après Youschkevitch, le résultat donné par al-Kashi est :

$$\sqrt[5]{44240899506197} \approx 536\frac{21}{414237740281}$$

La méthode utilisée étant l'approximation par défaut :

$$\sqrt[n]{a^n + r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

En effet, soit a la partie entière de $\sqrt[n]{a^n+r}$, et ρ sa partie décimale, on a :

$$(a+\rho)^n = a^n + r$$

$$a^n + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \rho^i = a^n + r$$

$$\rho = \frac{r}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \rho^i}$$

Or $\rho < 1$, donc on peut donner une approximation par défaut de ρ en le remplaçant par 1 dans le deuxième membre de l'équation précédente, soit :

$$\rho \approx \frac{r}{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}}$$

Et, en remarquant que :

$$(a+1)^n - a^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i}$$

On obtient la formule utilisée par al-Kashi :

$$\sqrt[n]{a^n+r} \approx a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

2.2 Traduction du tableau

ligne n° : 0				5					3					6
1	4	4	2	4	0	8	9	9	5	0	6	1	9	7
2	3	1	2	5										
3	1	2	9	9	0	8	9	9	5					
4	1	0	5	6	9	5	4	9	3					
5		2	4	2	1	3	5	0	2	0	6	1	9	7
6		2	4	2	1	3	8(5)	0	2	0	6	1	7	6
7													2	1
8			4	1	2	6	9	4	9	5	8	0	8	0
9					8(9)	1	3	6	5	9	0	3	8	4
10			4	0	3	5	5	8	3	6	7	6	9	6
11					9	0	3	4	3	1	7	6	9	6
12			3	9	4	5	2	4	0	5				
13		3	9	4	5	2	4	0	5					
14			4	2	2	0	5	7	4					
15		3	5	2	3	1	8	3	1					
16			3	9	8	1	8	3	1					
17		3	1	2	5	0	0	0	0					
18	3	1	2	5										
19	2	5	0	0										
20		6	2	5										
21					1	5	3	9	9	0	6	5	6	0
22							1	7	1	4	1	4	9	6
23					1	5	2	2	7	6	5	0	6	4
24							1	7	0	4	5	4	4	8
25							1	6	9	4	9	6	1	6
26					1	4	8	8	7	7	0	0	0	0
27			1	4	8	8	7	7	0					
28					8	1	9	1	2					
29			1	4	0	6	8	5	8					
30					7	9	5	8	1					
31			1	3	2	7	2	7	7					
32					7	7	2	7	7					
33			1	2	5	0	0	0	0					
34	1	2	5	0										
35		7	5	0										
36		5	0	0										
37		3	7	5										
38		1	2	5										
39					2	8	0	9	0					
40							7	8	6					
41					2	7	3	0	4					
42							7	7	7					
43					2	6	5	2	7					
44							7	6	8					
45					2	5	7	5	9					
46							7	5	9					
47					2	5	0	0	0					
48								2	8	7	2	9	6	0
49										1	6	0	4	4
50								2	8	5	6	9	1	6
51	2	5	0							1	6	0	0	8
52	1	0	0					2	8	4	0	9	0	8
53	1	5	0							1	5	9	7	2
54		7	5					2	8	2	4	9	3	6
55		7	5											
56		5	0							1	5	9	3	6
57		2	5					2	8	0	9	0	0	0
58											2	6	8	0
59			2	5			2	6	5					
60			2	0			2	6	2		2	6	7	4
61			1	5			2	5	9		2	6	6	8
62			1	0			2	5	6		2	6	6	2
63				5			2	5	3		2	6	5	6

(Les chiffres en rouge sont sous-entendus dans le tableau)

2.3 L'algorithme de Horner appliqué à ce cas

Le nombre dont on cherche la racine cinquième, 4424 08995 06197 est divisée, de la droite vers la gauche, en tranches de cinq chiffres. Le nombre de chiffre de 4424 08995 06197 nous indique que sa racine cinquième possède trois chiffres.

2.3.1 Détermination du chiffre des centaines.

Ici, la tranche la plus à gauche (on dira première tranche) est 4424. La plus grande puissance cinquième inférieure à ce nombre est $5^5 = 3125$.

Appliquons la méthode de Horner à l'équation

$$x^5 - 4424 = 0$$

	1	0	0	0	0	-4424
	0	5	25	125	625	3125
	1	5	25	125	625	-1299
	0	5	50	375	2500	
	1	10	75	500	3125	
	0	5	75	750		
5	1	15	150	1250		
	0	5	100			
	1	20	250			
	0	5				
	1	25				
	0					
	1					

Si on appelle $P(x)$ le polynôme $x^5 - 4424$, on peut écrire :

$$P(x) = (x-5)^5 + 25(x-5)^4 + 250(x-5)^3 + 1250(x-5)^2 + 3125(x-5) - 1299$$

Dans les 5 premières colonnes du tableau d'al Kashi, on remarque le calcul des coefficients :

- pour le degré 4 : ligne 63 à 59
- pour le degré 3 : ligne 57 à 51
- pour le degré 2 : ligne 38 à 34
- pour le degré 1 : ligne 20 à 18
- pour le degré 0 : ligne 1, 2 et 3

2.3.2 Détermination du chiffre des dizaines.

On peut calculer facilement :

$$P(6) - P(5) = 1 + 25 + 250 + 1250 + 3125 = 4651$$

Ce qui permet de chercher le deuxième chiffre sans tâtonnement, en effet :

$$\sqrt[5]{4424} \approx 5 + \frac{1299}{4651} \approx 5,279$$

Le chiffre suivant est donc 3.

Pour continuer, on multiplie $P(x)$ par 10^5, puis on effectue le changement de variable :

$$y = 10 \times (x - 5)$$

On obtient alors le polynôme :

$$Q(y) = y^5 + 250y^4 + 25000y^3 + 1250000y^2 + 31250000y - 129908995$$

Et écrivons maintenant $Q(y)$ en fonction de $(y-3)$

	1	250	25000	1250000	31250000	-129908995
	0	3	759	77277	3981831	105695493
	1	253	25759	1327277	35231831	-24213502
	0	3	768	79581	4220574	
	1	256	26537	1406858	39452405	
	0	3	777	81912		
3	1	259	27304	1488770		
	0	3	786			
	1	262	28090			
	0	3				
	1	265				
	0					
	1					

On a donc

$$Q(y) = (y-3)^5 + 265(y-3)^4 + 28090(y-3)^3 + 1488770(y-3)^2 + 39452405(y-3) - 24213502$$

Dans la deuxième tranche des colonnes du tableau d'al Kashi, on remarque le calcul des coefficients :

– pour le degré 4 : ligne 63 à 59
– pour le degré 3 : ligne 47 à 39
– pour le degré 2 : ligne 33 à 27
– pour le degré 1 : ligne 17 à 13
– pour le degré 0 : ligne 3, 4 et 5

2.3.3 Détermination du chiffre des unités.

On peut calculer facilement :

$$Q(4) - Q(3) = 1 + 265 + 28090 + 1488770 + 39452405 = 40969531$$

Ce qui permet de chercher le deuxième chiffre sans tâtonnement, en effet :

$$\sqrt[5]{442408995} \approx 53 + \frac{24213502}{40969531} \approx 53,591$$

Le chiffre suivant (des unités) est donc 6.

Effectuons le changement de variable :

$$t = 10 \times (y-3)$$

On a

$$10^5 Q(y) = t^5 + 2650t^4 + 2809000t^3 + 1488770000t^2 + 394524050000t - 2421350200000$$

Posons alors :

$$R(t) = t^5 + 2650t^4 + 2809000t^3 + 1488770000t^2 + 394524050000t - 2421350206917$$

Écrivons maintenant $R(t)$ en fonction de $t-6$.

	1	2650	2809000	1488770000	394524050000	-2421350206917
	0	6	15936	16949616	9034317696	2421350206176
	1	2656	2824936	1505719616	403558367696	-21
	0	6	15972	17045448	9136590384	
	1	2662	2840908	1522765064	412694958080	
	0	6	16008	17141496		
6	1	2668	2856916	1539906560		
	0	6	16044			
	1	2674	2872960			
	0	6				
	1	2680				
	0					
	1					

On a donc :

$$R(t) = (t-6)^5 + 2680(t-6)^4 + 2872960(t-3)^3 + 1539906560(t-6)^2 + 412694958080(t-6) - 21$$

Dans la troisième tranche des colonnes du tableau d'al Kashi, on remarque le calcul des coefficients :

- pour le degré 4 : ligne 63 à 58
- pour le degré 3 : ligne 57 à 48
- pour le degré 2 : ligne 26 à 21
- pour le degré 1 : ligne 11 à 8
- pour le degré 0 : ligne 6 et 7

De plus, on peut déterminer :

$$537^5 - 536^5 = R(7) - R(6) = 1 + 2680 + 2872960 + 1539906560 + 412694958080 = 414237740281$$

2.3.4 Conclusion

$$\boxed{\sqrt[5]{44240899506197} = 536 + \frac{21}{414237740281}}$$