CORRIGE DE L'EPREUVE DU

RALLYE MATHEMATIQUES D'AUVERGNE

EDITION 2018

Problème 1 : L'horloge de Kurschak

Nous laissons à l'appréciation du professeur d'expliquer à ses élèves la procédure pour créer à l'aide de GeoGebra la construction attendue. Il a été apprécié lors de la correction de cet exercice le fait de « cacher » les éléments géométriques afin de ne laisser que la figure finale souhaitée.

Problème 2 : Le maléfice de Rogue

1. Après exploitation de tous les indices, on trouve (après un peu de boulot tout de même) les huit possibilités suivantes : (P=potion, V=vin, A=avancer, R=reculer).

p v p a p v r	p v a p p v r	r p v p a p v	r p v a p p v
r p p v a p v	r p a p v p v	p p v r a p v	p p v a r p v

2. Sachant que la grande bouteille est en 4 et qu'elle ne contient donc pas de poison, il ne reste que 5 cas possibles :

p v p a p v r	r p v a p p v	r p p v a p v
p p v r a p v	p p v a r p v	

ce qui ne permet pas de conclure... Mais :

(a) Si la petite bouteille est en position 1, il reste deux cas possibles :

r p v a p p v	r p p v a p v

Hermione ne pourrait donc pas trouver la réponse si nous étions dans ce cas... Ce cas n'est donc pas celui de l'histoire !

(b) Si la petite bouteille est en 2, il reste un seul cas possible :

p v p a p v r

Hermione peut donc trouver la réponse qui est donc "a" est en 4,"r" est en 7. Ce cas peut donc être un cas possible de l'histoire...

(c) Si la petite bouteille est en 3, il reste 3 cas possibles :

r p v a p p v	p p v r a p v	p p v a r p v

Hermione ne peut donc pas trouver la réponse...

(d) Si la petite bouteille est en 5, il reste 4 cas possibles :

r p v a p p v	r p p v a p v	p p v r a p v	p p v a r p v

Hermione ne peut donc pas trouver la réponse...

(e) Si la petite bouteille est en 6, il reste un seul cas :

p v p a p v r

Hermione peut donc trouver la réponse qui est donc "a" est en 4,"r" est en 7. Ce cas peut donc être un cas possible de l'histoire...

(f) Si la petite bouteille est en 7, il reste 5 cas possibles :

p v p a p v r	r p v a p p v	r p p v a p v
p p v r a p v	p p v a r p v	

Hermione ne peut donc pas trouver la réponse...

Conclusion : Sachant qu'Hermione a trouvé la réponse, la petite bouteille se trouve soit en 2, soit en 6... Dans les deux cas, la bouteille pour avancer est en position 4 et celle pour reculer est en position 7. Et hop, direction les flammes noires !

Problème 3 : Deux-mille-dix-huit

Remarquons tout d'abord que l'on passe d'un nombre pair au nombre pair suivant en ajoutant 2, et qu'il en est de même pour passer d'un nombre impair au nombre impair suivant.
Cherchons une relation logique entre les premiers nombres de chaque colonne de nombres pairs.

Colonne 4 : il y a 2 nombres dans la colonne paire précédente donc le premier nombre de la colonne 4 est égal au premier nombre de la colonne 2 auquel on a ajouté 2 fois 2. (voir remarque précédente).
Colonne 6 : il y a 4 nombres dans la colonne paire précédente donc le premier nombre de la colonne 6 est égal au premier nombre de la colonne 4 auquel on a ajouté 4 fois 2.
Colonne 8 : il y a 6 nombres dans la colonne paire précédente donc le premier nombre de la colonne 8 est égal au premier nombre de la colonne 4 auquel on a ajouté 6 fois 2.
Ainsi de suite... On en déduit donc le tableau suivant :

numéro de colonne	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
premier nombre	2	6	14	26	42	62	86	114	146	182	222	266	314	366	422	482	546
numéro de colonne	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68
premier nombre	614	686	762	842	926	1014	1106	1202	1302	1406	1514	1626	1742	1862	1986	2114	2246

Le nombre 2018 se trouve donc dans la colonne numéro 64... 1986 étant le premier nombre de cette colonne, 2018 est le 17^{e} nombre de cette colonne.

Faisons de même avec les premiers nombres des colonnes impaires.
Colonne 3 : il y a 1 nombre dans la colonne impaire précédente donc le premier nombre de la colonne 3 est égal au premier nombre de la colonne 1 auquel on a ajouté 2.
Colonne 5 : il y a 3 nombres dans la colonne impaire précédente donc le premier nombre de la colonne 5 est égal au premier nombre de la colonne 3 auquel on a ajouté 3 fois 2.
Colonne 7 : il y a 5 nombres dans la colonne impaire précédente donc le premier nombre de la colonne 7 est égal au premier nombre de la colonne 5 auquel on a ajouté 5 fois 2.
Ainsi de suite... On en déduit donc le tableau suivant :

numéro de colonne	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33
premier nombre	1	3	9	19	33	51	73	99	129	163	201	243	289	339	393	451	513
numéro de colonne	35	37	39	41	43	45	47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67
premier nombre	579	649	723	801	883	969	1059	1153	1251	1353	1459	1569	1683	1801	1923	2049	2179

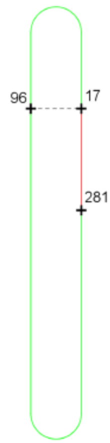
Le premier nombre de la colonne 63 est donc 1923 et le premier nombre de la colonne 64 est donc 2049. Ainsi, le 17^{e} nombre de la colonne 63 est 1955 et le 17^{e} nombre de la colonne 65 est 2081.

Conclusion, le nombre à gauche de 2018 est 1955 et le nombre à droite de 2018 est 2081.

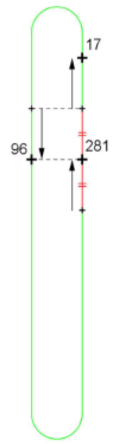
Problème 4 : Télésiège

Note : Pour éviter toutes confusions, nous adopterons l'unité de distance l'*espacement inter-siège* noté « eis ».
On commence par schématiser la situation en représentant le télésiège en deux instants :

Instant 1 : les sièges 96 et 17 se croisent



Instant 2 : les sièges 96 et 281 se croisent



Les deux instants sont séparés de 35s et les sièges ont parcouru la moitié de la distance rouge.
Il faut donc $2 \times 35\text{ s} = 70\text{ s}$ pour que les sièges parcourent intégralement la distance rouge.

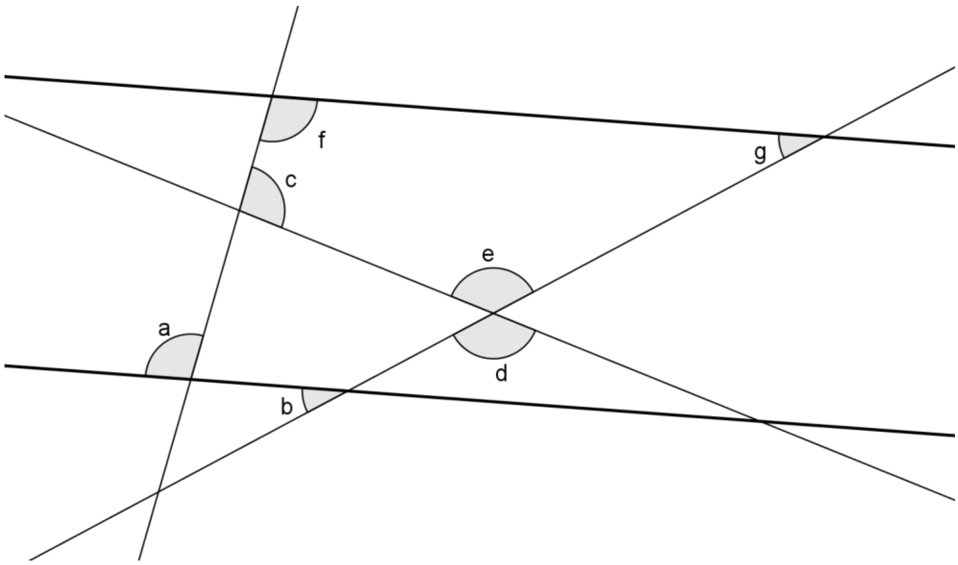
Etant donné la disposition des numéros de sièges de tous, la remise à 0 se fait entre les deux groupes d'amis (n° 17 et n° 281). On ne peut donc pas connaître la distance rouge, mais celle de la distance verte est de : n°281 – n°17 = 264 eis.

Un siège réalise un tour complet (distance rouge + distance verte) en $2 \times 5\text{ min }15\text{ s} = 630\text{ s}$.
Donc, un siège parcourt la distance verte en $360\text{ s} - 70\text{ s} = 560\text{ s}$.

Récapitulons :
• Distance verte : Un siège parcourt 264 eis en 560 s.
• Tour complet : Un siège parcourt ? eis en 630 s. Par proportionnalité : $? = \frac{264 \times 630}{560} = 297$
Un tour complet mesure donc 297 eis. Le télésiège comporte donc **<u>297 sièges.</u>**

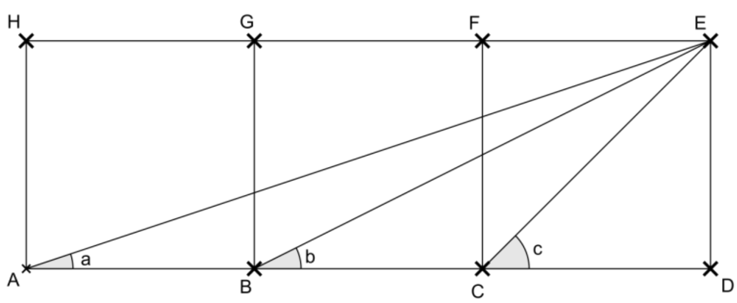
Problème 5 : Angles au choix

Premier énoncé : Voici une figure réalisée avec le logiciel GeoGebra de la configuration proposée à laquelle on ajoute une droite parallèle à celle déterminant les angles $\hat{a}$ et $\hat{b}$ de la façon suivante :



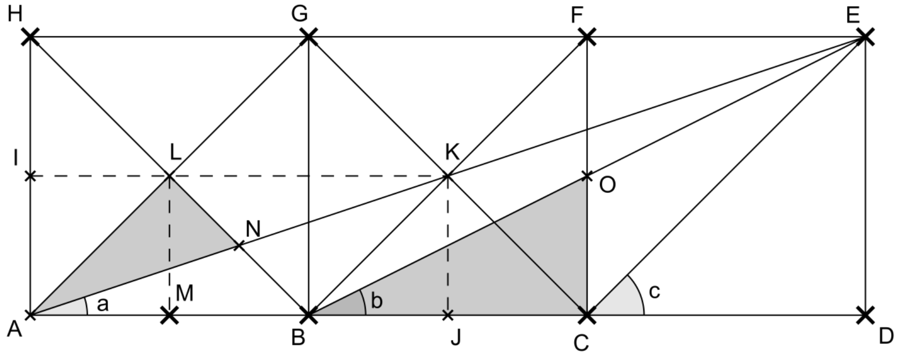
Les angles $\hat{a}$ et $\hat{f}$ sont alternes-internes avec leurs droites supports parallèles donc $\hat{a} = \hat{f}$.
Les angles $\hat{b}$ et $\hat{g}$ sont correspondants avec leurs droites supports parallèles donc $\hat{b} = \hat{g}$.
Enfin $\hat{e}$ et $\hat{d}$ sont opposés par le sommet donc $\hat{e} = \hat{d}$.
On en déduit que $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} = \hat{f} + \hat{g} + \hat{c} + \hat{e}$

Second énoncé :
<u>Méthode 1 :</u> On reprend la figure donnée en ajoutant des notations utiles pour les justifications que nous allons voir :



En considérant que la longueur ED = 1 cm, on obtient donc que BD = 2 cm et AD = 3 cm.
Les triangles AED, BED et CED sont chacun rectangles en D.
On utilise ensuite la trigonométrie dans AED : $\tan \hat{a} = \frac{ED}{AD} = \frac{1}{3}$, puis dans BDE : $\tan \hat{b} = \frac{ED}{BD} = \frac{1}{2}$ et enfin dans ECD : $\tan \hat{c} = \frac{ED}{CD} = \frac{1}{1} = 1$.
Ainsi $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan(1) = 90°$

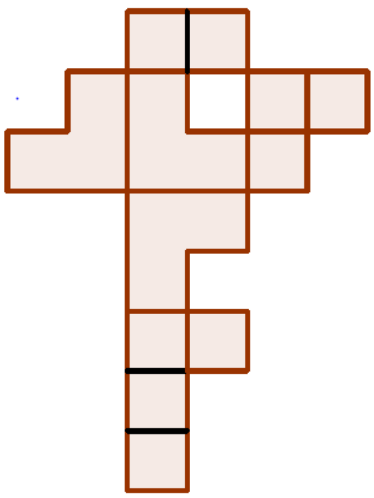
<u>Méthode 2 :</u> On reprend la figure donnée en ajoutant des notations utiles et les diagonales des carrés ABGH et BCFG :



Le triangle EDC étant rectangle et isocèle en D, $\hat{c} = 45°$.
De plus, les diagonales d'un carré étant perpendiculaires, $\widehat{\mathrm{ALN}} = 90°$.
Dans AGK, L est le milieu de [AG] et (LN) est parallèle à (GK) donc $\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{GK}} = \frac{1}{2}$. Or GK = AL donc $\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{AL}} = \frac{1}{2}$.
On sait aussi que dans OBC rectangle en C, $\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{BC}} = \frac{1}{2}$; On peut alors en déduire que LAN et CBO sont semblables et ainsi $\widehat{\mathrm{LAN}} = \hat{b}$.
Enfin, $\widehat{\mathrm{LAN}} + \hat{a} = 45°$ donc $\hat{a} + \hat{b} = 45°$ et finalement$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 90°$

Problème 6 : Le choix du patron

Voici un des patrons possibles pour l'énoncé n°1 :



Voici un des patrons possibles pour l’énoncé n°2 :