# Rallye Mathématique d'Auvergne 2021

# 25e édition

## Corrigé des épreuves qualificatives

## Du mardi 15 mars 2022

Durée : 2 h – Niveaux : 3e et 2de

### Organisateurs

Académie de Clermont-Ferrand
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Clermont-Ferrand
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

### Partenaires

L'Université Clermont Auvergne, le Centre National de la Recherche Scientifique, le Comité International du Jeux Mathématique, Souris-Lab, Casio, Texas Instruments Numworks, Volvic et Cruzilles.

Conception et rédaction : IREM, APMEP

Contact : rallye.mathematique@ac-clermont.fr

# LE MOT MYSTERE



**Quel est le 16e mot ?**

La lettre qui apparait le plus grand nombre de fois en étant aux extrémités dans la liste proposée est la lettre R, on la compte 15 fois au minimum (le mot-mystère en contient peut-être aussi un ou deux) dont 11 fois aux extrémités.

En comptant les symboles sur la grille, cela donne :

| Ꚉ | ◭ | ✠ | ጠ | Ξ | ϟ | Ч | ⥯ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12 | 6 | 9 | 20 | 16 | 3 | 8 | 6 |

<u>Remarque :</u> un symbole placé à une intersection de deux mots est compté deux fois.

On en déduit que le R est donc le symbole Ξ (et qu'il y a un R dans le mot-mystère)

Les deux mots horizontaux en bas à gauche de la grille ΞጠꚈ✠Ξ et ΞጠЧ✠Ξ sont identiques, sauf pour leur lettre centrale (et éventuellement leur sens de lecture). De plus, ils commencent et finissent par R. En observant les mots de la liste, il ne peut s'agir que de RAGER et RATER.

Ainsi les symboles ጠ et ✠ sont associés aux lettres A et E :
- dans la liste des mots on compte 8 A et 19 E ;
- dans la grille on compte 20 ጠ et 9 ✠.

La lettre A est donc le symbole ✠ et la lettre E le symbole ጠ (et le mot-mystère contient un A et un E).

Toujours en travaillant sur les deux mots horizontaux RAGER et RATER, on déduit que les lettres G et T sont cachées par les symboles Ꚉ et Ч :
- dans la liste des mots on compte 11 G et 7 T ;
- dans la grille on compte 12 Ꚉ et 8 Ч.

Ainsi la lettre G est le symbole Ꚉ et la lettre T le symbole Ч (et le mot-mystère contient un G et un T).

A ce stade, on a trouvé toutes les lettres du mot-mystère (R, A, E, T et G) et si on a rempli la grille avec lettres trouvées au fur et à mesure, on constate qu'un mot absent de la liste y a été complété. Il s'agit du mot-mystère qui est donc <u>**GATER**</u> (vertical, en bas à droite, à lire de bas en haut puisque « retag » n'est pas un mot valide).

Mais si on souhaite terminer la grille, on peut rapidement trouver le symbole de la lettre S. Elle apparait 6 fois dans la liste de mots et le mot STASE ne peut se placer qu'à un seul endroit compte tenu des lettres déjà placées. Ainsi la lettre S est donc le symbole ⥯.

Ensuite, avec les trois mots contenant la lettres I et les possibilités restantes sur la grille, on déduit que le symbole de la lettre I est ϟ.

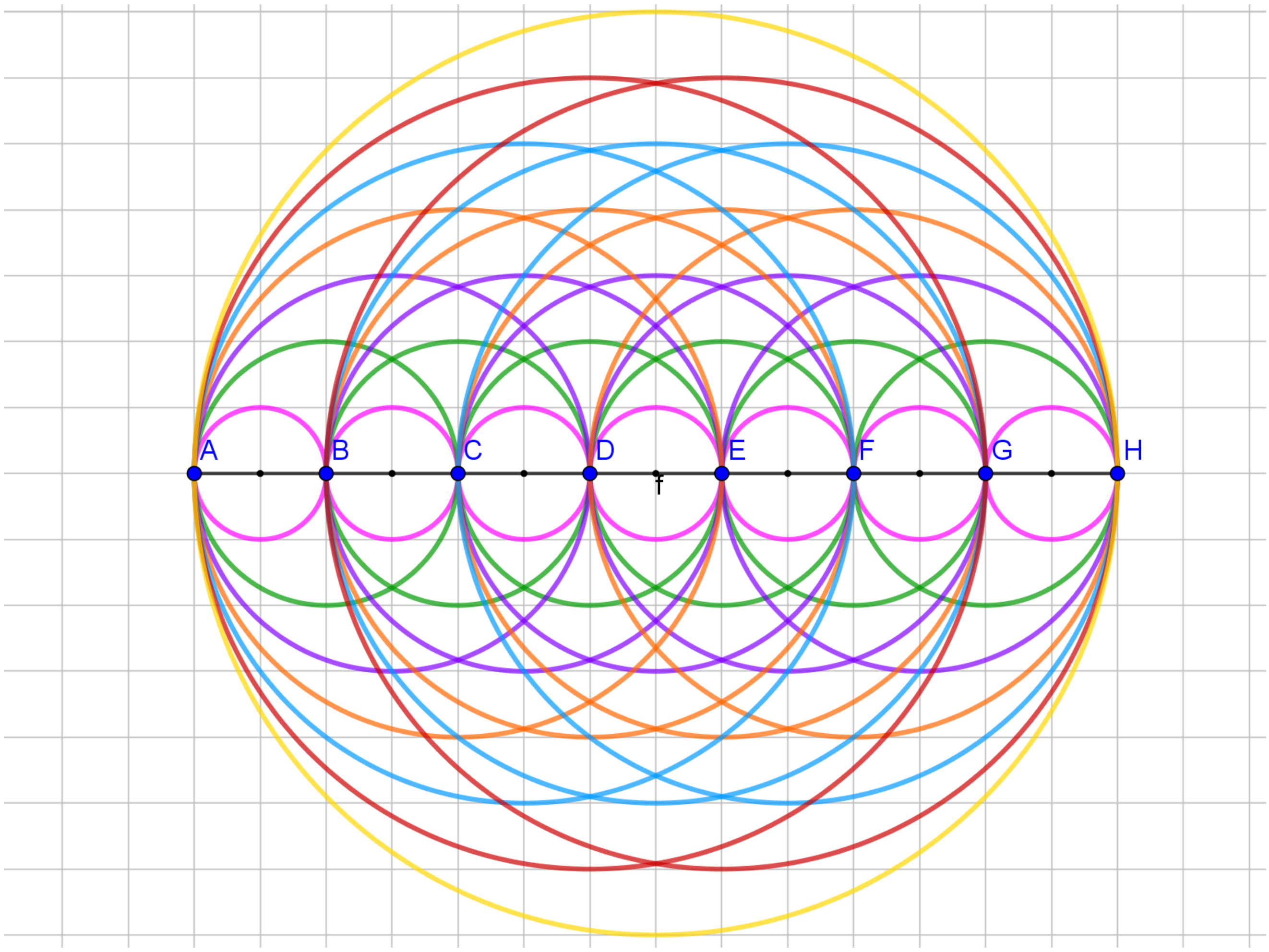
Pour finir, le mot TRAIN donne la lettre N : ◭.

# POINTS DE RENCONTRES

NIVEAU 3

**Combien de points d'intersection entre des cercles obtient-on dans la figure complète avec tous les cercles ?**

On peut procéder en traçant tous les cercles à la main ou à l'aide d'un logiciel de géométrie puis compter les intersections avec méthode. Voici ce que l'on obtient :




On peut aussi procéder en raisonnant comme suit.
Les points sont nommés de gauche à droite : A, B, C, D, E, F, G et H.

Les cercles ayant comme diamètre deux points consécutifs (en rose) ou le cercle de diamètre maximum [AH] (en jaune) sont uniquement tangents aux autres cercles en des points placés sur la droite. Nous ne cherchons donc que les intersections entre les autres cercles (vert, orange, violet, bleu, rouge).

On étudie tous les cercles passant par A. En excluant celui de diamètre [AB] et [AH] (rose et jaune), on en compte 5. Chacun de ses 5 cercles est sécant aux cercles dont les diamètres ont une extrémité à l'intérieur du cercle et l'autre extrémité à l'extérieur du cercle.

Par exemple : notons $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AD] (violet). Il est sécant aux cercles ayant pour diamètre une extrémité à l'intérieur de $\mathcal{C}$ (il y a 2 points : B et C) et l'autre extrémité est à l'extérieur de de $\mathcal{C}$ (il y a 4 points : E, F, G et H). Cela fait un total de $2 \times 4 = 8$ cercles sécants à $\mathcal{C}$ : ceux de diamètre [BE], [BF], [BG], [BH], [CE], [CF], [CG] et [CH].

On procède ainsi pour chacun de ces 5 cercles passant par A :

| Diamètre | Points intérieurs | Points extérieurs | Nb de cercles sécants |
|---|---|---|---|
| [AC] | B | D, E, F, G et H | 5 |
| [AD] | B et C | E, F, G et H | 8 |
| [AE] | B, C et D | F, G et H | 9 |
| [AF] | B, C, D et E | G, H | 8 |
| [AG] | B, C, D, E et F | H | 5 |

Il y a donc un total de 35 cercles sécants avec les cercles passant par A, soit 70 points d'intersection (2 points d'intersection par cercle, un « en haut » et un « en bas »).

On fait de même, de gauche à droite pour les autres points (B puis C puis D puis E), en omettant tout ce qui se passe « à droite » du point considéré puisque toutes les intersections faisant intervenir un cercle passant par un point « à gauche » auront déjà été comptées.

| Point considéré | Diamètre | Points intérieurs | Points extérieurs « à droite » | Nb de cercles sécants |
|---|---|---|---|---|
| B | [BD] | C | E, F, G et H | 4 |
| | [BE] | C et D | F, G et H | 6 |
| | [BF] | C, D et E | G et H | 6 |
| | [BG] | C, D, E et F | H | 4 |
| C | [CE] | D | F, G et H | 3 |
| | [CF] | D et E | G et H | 4 |
| | [CG] | D, E et F | H | 3 |
| D | [DF] | E | G et H | 2 |
| | [DG] | E et F | H | 2 |
| E | [EG] | F | H | 1 |

Cela fait un total général de 70 intersections pour ces cercles.

Finalement on compte **140 points d'intersection au total** (sans compter les 8 points de tangence des cercles en A, B, C, D, E, F, G et H).

Défi 3

# PYRAMIDE $\mathcal{X}$

NIVEAU 1

**Quelle est la valeur de $\mathcal{X}$ ?**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 23 | | | | |
| | | | | |
| | 6 | | | |
| | | | | |
| a | a | b | a | b |

1/ Dans la pyramide ci-contre, la partie centrale (en jaune), nous permet d'écrire que $2(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = 6$ donc $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 3$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathcal{X}$ | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| f | g | d | h | | |
| d | | e | | b | |
| a | h | a | b | a | a |

Dans la pyramide principale :

2/ On retrouve la même base (**a**-**b**-**a**) dans la pyramide principale, ce qui permet d'écrire que $\mathbf{d} = 6$.

3/ La partie rose à droite, nous donne :

$$2\mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Avec $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = 3$, on en déduit que :

$$\mathbf{a} = 1 \text{ et } \mathbf{b} = 2$$

4/ D'autre part, la partie en vert à gauche nous donne $\mathbf{a}+\mathbf{h} = \mathbf{d} = 6$, donc $\mathbf{h} = 5$.

5/ On connait ainsi tous les nombres à la base de la pyramide principale, ce qui permet de la remplir entièrement :

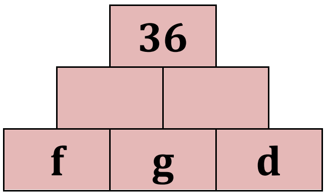
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 62 | | | | | |
| 36 | 26 | | | | |
| 21 | 15 | 11 | | | |
| 12 | 9 | 6 | 5 | | |
| 6 | 6 | 3 | 3 | 2 | |
| 1 | 5 | 1 | 2 | 1 | 1 |

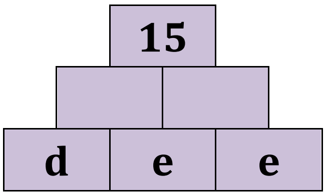
**La valeur de $\mathcal{X}$ est donc 62.**

Remarque : Comme $\mathbf{a}+\mathbf{h} = \mathbf{d}$ on a $\mathbf{h}+\mathbf{a} = \mathbf{d}$, et comme $\mathbf{a}+\mathbf{b} = \mathbf{e}$ on a $\mathbf{b}+\mathbf{a} = \mathbf{e}$. On peut ainsi compléter ainsi la deuxième ligne de la pyramide :

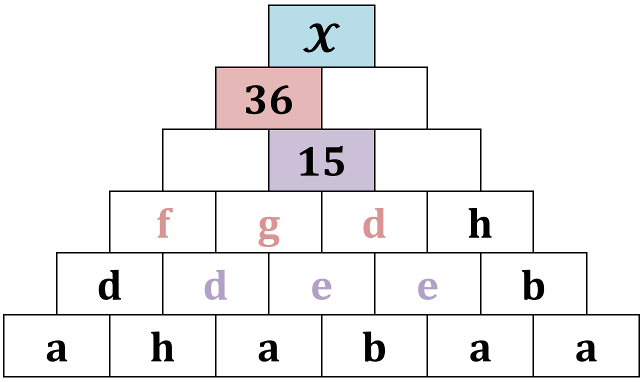
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| d | d | e | e | b | |
| a | h | a | b | a | a |

Les deux pyramides :

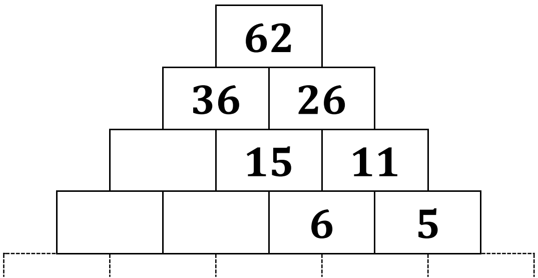



… permettent alors de remplir les deux cases ci-dessous :




… et avec **d** = 6 et **h** = 5 (en repartant de l’étape 4), il est possible de compléter la partie haute de la pyramide principale sans avoir à compléter les lignes inférieures.



# BALANCE TON POIDS



Remarque : Dans ce corrigé, on représente les balances par des égalités de masses. Par exemple, les exemples du sujet s'écrivent $\boxed{2\text{g} + 5\text{g} = \text{objet}}$ et $\boxed{5\text{g} = \text{objet} + 2\text{g}}$.

**1/ On dispose de 3 poids de masse 2 g, 5 g et 9 g.**
**a) Avec ces trois poids, peut-on déterminer si un objet pèse 6 g ?**

En plaçant le poids de 5g sur le même plateau que l'objet et les deux autres poids de 2g et 9g, on obtient l'équilibre des deux plateaux :

$$\boxed{5\text{g} + \text{objet} = 9\text{g} + 2\text{g}}$$

On vérifie ainsi que l'objet fait bien 6g.

**1/ On dispose de 3 poids de masse 2 g, 5 g et 9 g.**
**b) Avec ces trois poids, peut-on déterminer si un objet pèse 8 g ?**

En cherchant des façons de placer des poids, on peut avoir le sentiment que ça n'est pas possible, mais il faut pouvoir expliquer pourquoi. La façon la plus simple est de tester toutes les pesées possibles ; elles sont, au maximum, au nombre de 13, ce qui est faisable.

Afin de vérifier qu'un objet pèse 8g, il faudrait qu'il y ait l'un des cas ci-dessous :

- avec un seul poids (noté $p$) :
  $\boxed{8 = p}$ ;
- avec deux poids (notés $p_1$ et $p_2$) :
  $\boxed{8 = p_1 + p_2}$ ;
  ou $\boxed{8 + p_1 = p_2}$ donc $8 = p_2 - p_1$ ;
- avec trois poids (notés $p_1$, $p_2$ et $p_3$) :
  $\boxed{8 = p_1 + p_2 + p_3}$ ;
  ou $\boxed{8 + p_1 = p_2 + p_3}$ donc $8 = p_2 + p_3 - p_1$ ;
  ou $\boxed{8 + p_1 + p_2 = p_3}$ donc $8 = p_3 - p_1 - p_2$.

Il n'y a pas de poids de 8g donc les possibilités à un poids sont à écarter.

De même, les sommes ou différences de deux poids ne sont pas égales à 8g, donc les possibilités à deux poids n'en sont pas non plus.
Reste les cas à trois poids. La somme $p_1 + p_2 + p_3$ est égale à 16g, donc ne fonctionne pas ; pour les deux cas de soustraction, comme 9g est supérieur à 5g + 2g, le poids de 9g ne pourra pas être soustrait. Il reste donc trois possibilités :

| | | |
|---|---|---|
| $9\text{g} + 2\text{g} - 5\text{g}$<br>$= 6\text{g}$ | $9\text{g} + 5\text{g} - 2\text{g}$<br>$= 12\text{g}$ | $9\text{g} - 2\text{g} - 5\text{g}$<br>$= 2\text{g}$ |

… dont aucune ne fonctionne.

Il n'est donc pas possible de déterminer qu'un objet pèse 8g avec ces 3 poids.

**2/ On dispose de 3 poids de masse 1 g, 5 g et 8 g.**
**Donnez toutes les masses que l'on peut déterminer avec ces trois poids.**

On peut reprendre les différentes possibilités évoquées à la question précédente :

- avec un seul poids (noté $p$) :
  $\boxed{\text{objet} = p}$
  → permet de peser des objets de 1g, 5g et 8g ;
- avec deux poids (notés $p_1$ et $p_2$) :
  $\boxed{\text{objet} = p_1 + p_2}$
  → permet de peser des objets de 6g, 9g et 13g ;
  ou $\boxed{\text{objet} + p_1 = p_2}$ donc $\text{objet} = p_2 - p_1$
  → permet de peser des objets de 3g, 4g et 7g ;
- avec trois poids (notés $p_1$, $p_2$ et $p_3$) :
  $\boxed{\text{objet} = p_1 + p_2 + p_3}$
  → permet de peser un objet de 14g ;
  ou $\boxed{\text{objet} + p_1 = p_2 + p_3}$ donc $\text{objet} = p_2 + p_3 - p_1$
  → permet de peser des objets de 4g et 12g ;
  ou $\boxed{\text{objet} + p_1 + p_2 = p_3}$ donc $\text{objet} = p_3 - p_1 - p_2$
  → permet de peser un objet de 2g.

En résumé, on peut déterminer d'un objet pèse 1g, 2g, 3g, 4g, 5g, 6g, 7g, 8g, 9g, 12g, 13g ou 14g. C'est à dire tous les entiers de 1 à 14 sauf 10 et 11.

**3/ Avec trois poids, nous souhaitons pouvoir peser la plus grande collection d'objet dont les masses sont des nombres entiers consécutifs de grammes à partir de 1 g. Quelle est la valeur de ces trois poids ?**

Notons $a$, $b$ et $c$ les poids des trois poids avec $a < b < c$ (si deux poids étaient identiques, le nombre de possibilités se trouverait réduit).

Avec une pesée du type $\boxed{\text{objet} = \text{un ou plusieurs poids}}$ on a les possibilités :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $a+b$ | $a+c$ | $b+c$ | $a+b+c$ |

… ce qui fait 7 possibilités.

Avec une pesée du type $\boxed{\text{objet} + p_1 = p_2}$ (donc objet $= p_2 - p_1$), on a les possibilités :

| | | |
|---|---|---|
| $c-a$ | $c-b$ | $b-a$ |

(car $a < b < c$)

… ce qui fait 3 possibilités.

Avec une pesée du type $\boxed{\text{objet} + p_1 = p_2 + p_3}$ (donc objet $= p_2 + p_3 - p_1$), on a les possibilités :

| | |
|---|---|
| $c+a-b$ | $c+b-a$ |

(car $a < b < c$)

… ce qui fait 2 possibilités, et on pourrait avoir la possibilité :

$\boxed{a+b-c}$ SI $a+b \geq c$

… ce qui fait 1 possibilité supplémentaire.

Avec une pesée du type $\boxed{\text{objet} + p_1 + p_2 = p_3}$ (donc objet $= p_1 + p_2 - p_3$), on pourrait avoir la possibilité :

$\boxed{c-a-b}$ SI $a+b \leq c$

… ce qui fait 1 possibilités supplémentaires.

Récapitulons les 12 différentes possibilités :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $c$ | $a+b$ | $a+c$ | $b+c$ |
| $c-a$ | $c-b$ | $b-a$ | $c+a-b$ | $c+b-a$ | $c+a+b$ |

… auxquelles il faut rajouter

| | |
|---|---|
| $a+b-c$ | SI $a+b \geq c$ |
| $c-a-b$ | SI $a+b \leq c$ |

… ce qui fait assurément *une et une seule* possibilité supplémentaire pour un total de 13 possibilités.

Certaines de ces possibilités peuvent conduire à des pesées identiques. Cela fait donc au maximum 13 poids différents. Une solution optimale peut donc peser des objets de poids les nombres entiers de 1 à 13.

Le triplet de poids 1g, 3g et 9g vérifie cette propriété :

$1\text{g} = 1\text{g}$
$2\text{g} = 3\text{g} - 1\text{g}$
$3\text{g} = 3\text{g}$
$4\text{g} = 3\text{g} + 1\text{g}$
$5\text{g} = 9\text{g} - 3\text{g} - 1\text{g}$

$6\text{g} = 9\text{g} - 3\text{g}$
$7\text{g} = 9\text{g} + 1\text{g} - 3\text{g}$
$8\text{g} = 9\text{g} - 1\text{g}$
$9\text{g} = 9\text{g}$
$10\text{g} = 9\text{g} + 1\text{g}$

$11\text{g} = 9\text{g} + 3\text{g} - 1$
$12\text{g} = 9\text{g} + 3\text{g}$
$13\text{g} = 9\text{g} + 3\text{g} + 1\text{g}$

**C'est donc avec des poids de 1g, 3g et 9g que l'on peut réaliser le plus grand nombres de pesée comme demandé dans l'énoncé.**

Remarque : on peut se poser la question de l'unicité de la solution. Voici, une démonstration par construction en supposant que les poids $a$, $b$ et $c$ amène à une solution optimale où l'on peut réaliser toutes les pesées de 1g à 13g.

$c + b + a$ est le maximum que l'on puisse peser. Donc $c + b + a$ doit être égal à 13g et de même $c + b$ est le deuxième plus grand nombre, il doit donc être égal à 12g.
Alors $c + b + a = 13\text{g}$ et $c + b = 12\text{g}$ donne $a = 1\text{g}$ et $a + b + c = 11\text{g}$.

On cherche maintenant à attribuer la masse 10g aux neuf possibilités restantes en repérant la plus grande. Pour rappel les neuf possibilités sont :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cancel{a}$ | $b$ | $c$ | $a + b$ | $a + c$ | $\cancel{b + c}$ |
| $c - a$ | $c - b$ | $b - a$ | $c + a - b$ | $\cancel{c + b - a}$ | $\cancel{c + a + b}$ |

… auxquelles il faut rajouter $c - a - b$ (en effet $b < c$ donc $a + b = b + 1 \leq c$).

Puisque $a = 1$, on peut établir que :

- $c - a$ $\quad c \quad$ $c + a$ sont consécutifs ;
- $b - a$ $\quad b \quad$ $b + a$ sont consécutifs ;
- $c - b - a$ $\quad c - b \quad$ $c - b + a$ sont consécutifs ;

… donc des 9 possibilité ci-dessus, $c + a$ est la plus grande puisque $c > b$ et $c > c - b$.

Pour la dixième possibilité, on a $c + a > c + a - b$.

Donc, c'est bien $c + a$ qui vaut 10g. On en déduit $c = 9\text{g}$.

Enfin, puisque $c + b = 12\text{g}$, on conclut que $b = 3\text{g}$.

D'où l'unicité.

# La Grille a Colorier

NIVEAU 1

**Recoloriez la grille et retrouvez la valeur du nombre caché.**

La difficulté de ce défi est de garder en tête qu'un nombre inscrit dans une case ne renseigne pas sur la couleur de la case elle-même mais seulement des 8, 5 ou 3 cases situées autour de lui (8, 5 ou 3 : suivant que la case soit dans un coin, sur un bord ou ailleurs dans le centre de la grille).

On commence par repérer les **0** dont certains forment de grandes zones de cases adjacentes qui offrent un nombre important de cases à colorier en jaune et on obtient la grille ci-contre.

On prendra garde à deux 0 solitaire qu'on ne peut donc pas encore colorier en jaune.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 4 | 6 | 3 | 2 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 3 | 7 | 3 | 6 | 3 | 6 | 3 | 5 | 2 | 5 | 3 | 6 | 2 | 5 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 6 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 2 | 6 | 2 | 6 | 3 | 7 | 3 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 6 | 4 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 4 | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 6 | 3 | 3 | 1 | 4 | 3 |
| 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 3 | 6 | 4 | 6 | 2 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 6 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 6 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Il est ensuite possible d'entamer la coloration des cases encore blanches à plusieurs endroit en commençant par considérer des cases en bordures puis en avançant de proche en proche. Par exemple, dans la colonne la plus à droite, de haut en bas :

- le 0 a déjà été traité.
- le 2 est entouré par 5 cases dont 3 jaunes et 2 blanches. Il faut donc colorer les 2 cases blanches en bleu.
- le 3 est entouré par 5 cases dont 2 jaunes, 1 bleu et 2 blanches. Il faut donc colorer les 2 cases blanches en bleu.
- le 3 est entouré par 5 cases dont 3 bleues et 2 blanches. Il faut donc colorer les 2 cases blanches en jaune.
- le 4 est entouré par 5 cases dont 2 bleues, 1 jaune et 2 blanches. Il faut donc colorer les 2 cases blanches en bleu.

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 6 | 3 |
| 3 | 6 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |

→

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 6 | 3 |
| 3 | 6 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |

→

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 6 | 3 |
| 3 | 6 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |

→

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 6 | 3 |
| 3 | 6 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |

→

| | | |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 2 | 3 | 2 |
| 3 | 5 | 3 |
| 4 | 6 | 3 |
| 3 | 6 | 4 |
| 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 |

… et on poursuit dans la colonne adjacente : 0 puis le 3, puis le 5, etc..

Remarques : Dans cette grille, il est toujours possible de trouver un nombre dans une case permettant de terminer de colorier toutes les cases autour de lui.

Il est également possible de faire, à un moment donné, une supposition sur la couleur d'une case, colorier le reste en conséquence pour vérifier que cela colle avec les autres informations ou bien qu'au contraire cela conduit à une absurdité. Mais faire des suppositions n'est pas nécessaire dans cette grille.

De même, une erreur peut être assez vite repérée en vérifiant que les nombres « inutilisés » sont en accord avec la coloration.

En procédant ainsi, on arrive au coloriage suivant :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 3 | 3 | 4 | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 |
| 2 | 6 | 4 | 6 | 3 | 2 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 3 | 7 | 3 | 6 | 3 | 6 | 3 | 5 | 2 | 5 | 3 | 6 | 2 | 5 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 6 | 3 |
| 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 | 0 | 3 | 2 | 6 | 2 | 6 | 3 | 7 | 3 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 2 | 6 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 6 | 4 |
| 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 4 | 2 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 1 | 4 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 |
| 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 |
| 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 4 | 3 | 4 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 4 | 3 | 5 | 3 | 5 | 3 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 6 | 3 | 6 | 4 | 6 | 3 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 4 | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 3 | 5 | 2 | 4 | 4 | 6 | 3 | 3 | 1 | 4 | 3 |
| 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 6 | 4 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 2 | 3 | 3 | 6 | 4 | 6 | 2 | 3 | 0 | 3 | 2 | 3 | 0 | 2 | 3 | 6 | 4 | 4 | 3 | 4 | 1 |
| 2 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 1 | 3 | 2 | 4 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 4 | 2 | 4 | 2 | 5 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 4 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 6 | 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 6 | 2 | 4 | 1 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 3 | 6 | 2 | 5 | 2 | 5 | 3 | 6 | 4 | 4 | 2 | 6 | 3 | 5 | 3 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Le message indique « le nombre de carrés bleus ». On compte alors :

| le nombre de carrés bleus par lettre | lettres concernées | nombre de lettres | sous-total |
|---|---|---|---|
| 6 | C, L, S et R | $1+2+2+3=8$ | $8\times 6=48$ |
| 8 | N et U | $1+1=2$ | $2\times 8=16$ |
| 9 | E | 5 | $5\times 9=45$ |
| 10 | A, B, D et O | $1+2+1+1=5$ | $5\times 10=50$ |
| 12 | M | 1 | $1\times 12=12$ |
| | **TOTAL** | **21** | **171** |

On vérifie qu'aucune lettre n'a été oubliée et on conclut :

**La valeur du nombre caché dans la grille est 171.**

Note : Si certaines classes ont considéré que les 6 lettres E et A possédaient également chacune 2 carrés de taille $2\times 2$, cela amène la réponse à $171+6\times 2=$ **183**. Les deux réponses sont acceptées.

# Ô CAPITAINE !

NIVEAU 3

**Le capitaine Mac Mathew pourra-t-il tuer le kraken ?**

~~*Si oui, comment ?*~~

**Si non, expliquer pourquoi.**

Lorsqu'on attaque le kraken :

- 1er cas : si on lui coupe 10 tentacules, il en repousse 1 donc le nombre de tentacule a finalement diminué de 9 ;
- 2e cas : si on lui coupe 11 tentacules, il en repousse 5 donc le nombre de tentacule a finalement diminué de 6 ;
- 3e cas : si on lui coupe 2 tentacules, il en repousse 1 donc le nombre de tentacule a finalement augmenté de 12.

On remarque que le nombre de tentacules en moins ou en plus est toujours un multiple de 3 que l'on peut écrire $3k$ avec $k$ un entier positif ou négatif. Le nombre de tentacules à tout moment est donc de la forme $50 + 3k$ avec $k$ un entier positif ou négatif.

En effectuant la division euclidienne de 50 par 3, on a :

$$\mathbf{50} + 3k = \mathbf{3} \times \mathbf{16} + \mathbf{2} + 3k = 2 + \underbrace{\mathbf{3} \times 16 + \mathbf{3}k}_{\text{factorisable par } \mathbf{3}} = 2 + \mathbf{3}(k + 16)$$

D'après l'énoncé, pour que le capitaine pirate puisse tuer le kraken, il faut que le nombre de tentacules soit nul ou égal à 1. On aurait alors deux cas :

$$\mathbf{50 + 3k = 0}$$

... c'est-à-dire :

$$2 + 3(k + 16) = 0$$

... donc :

$$3(k + 16) = -2$$

... et donc $-2$ est un multiple de 3 ce qui n'est pas le cas.

**OU**

$$\mathbf{50 + 3k = 1}$$

... c'est-à-dire :

$$2 + 3(k + 16) = 1$$

... donc :

$$3(k + 16) = -1$$

... et donc $-1$ est un multiple de 3 ce qui n'est pas le cas.

Les deux cas sont impossibles.

Conclusion : **le capitaine Mac Mathew ne pourra pas tuer le kraken.**

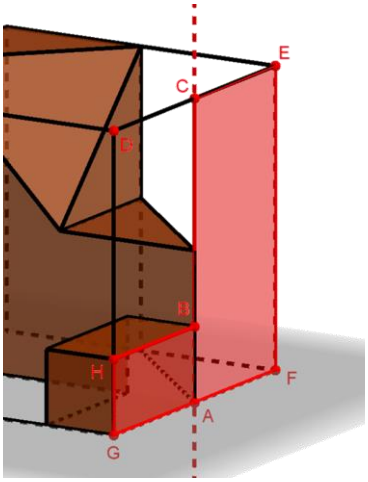
Défi 7

# DANS L'CUBE !

NIVEAU 2

**1/ Dessinez après projection ce que l'on obtient avec le solide ci-dessous, sur la fiche réponse spécifique.**

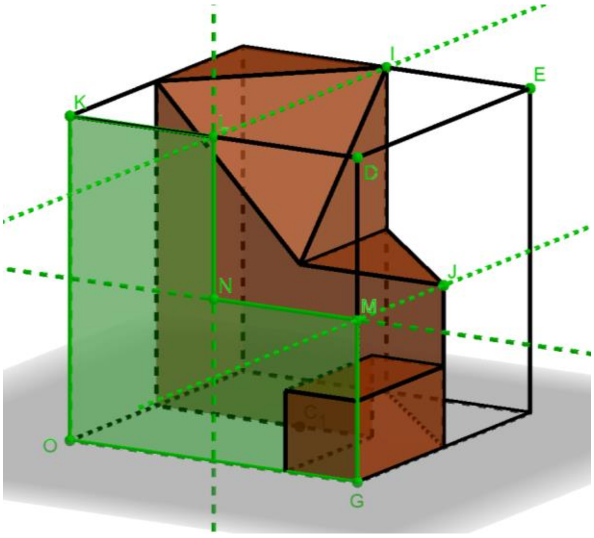
On procède par tracés de parallèles, prolongements de segments et placements de points d'intersection. Rien d'autre n'est nécessaire.




a/ Pour la face de droite :

- prolonger le segment [AB] ; il coupe le segment [DE] en **C**.

L'empreinte du solide sur la face de droite est alors le polygone **BCEFGH**.




b/ Pour la face de gauche :

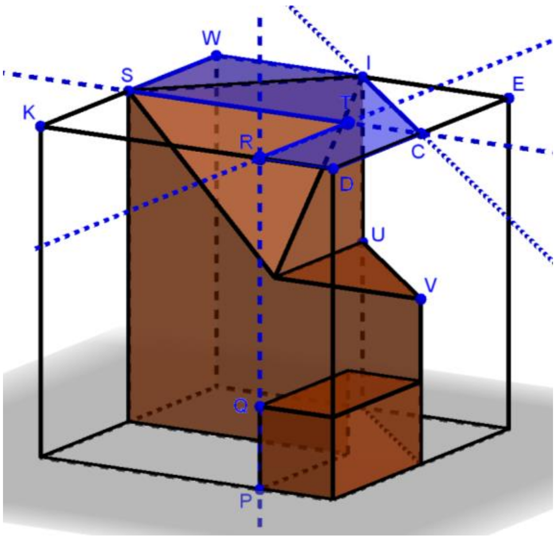
- tracer les parallèles à [DE] passant par I et J ; elles coupent respectivement [KD] et [DG] en **L** et **M** ;
- tracer la parallèle à [KD] passant par M puis la parallèle à [DG] passant par L ; elles se coupent en **N**.

L'empreinte du solide sur la face de gauche est alors le polygone **KLNMGO**.

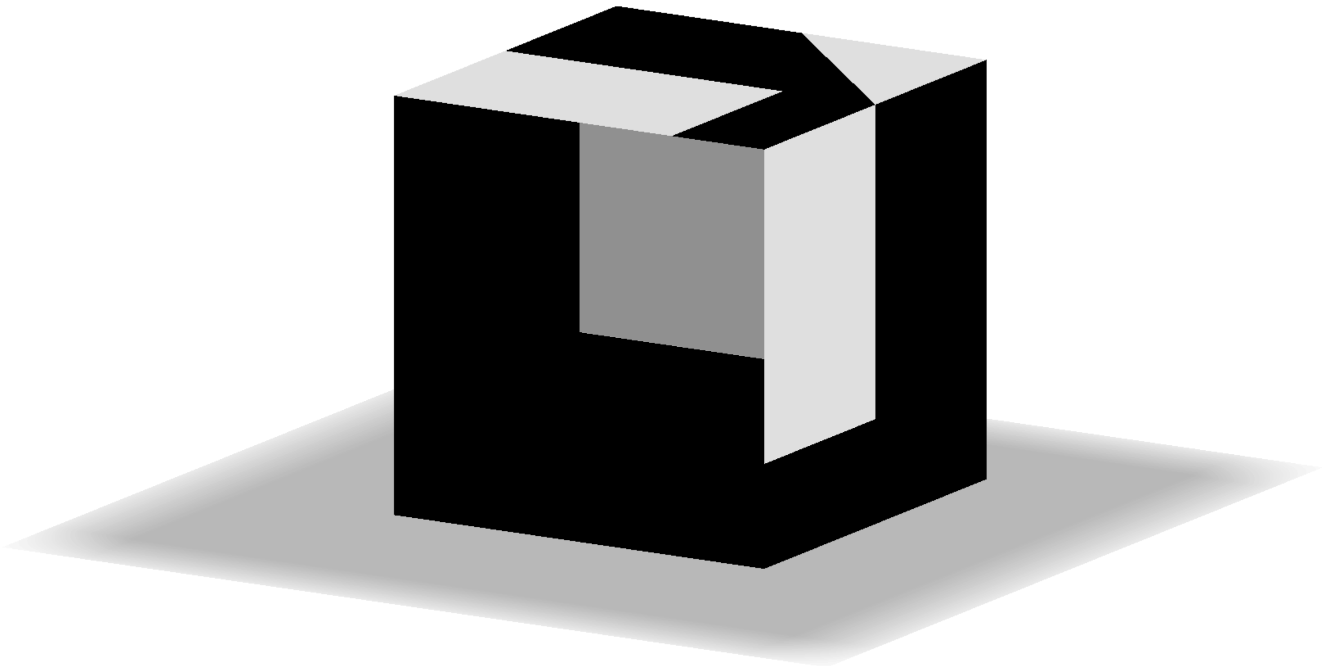
c/ Pour la face supérieure :

- prolonger le segment [PQ] ; il coupe le segment [KD] en **R**.
- tracer la parallèle à [KD] passant par S puis la parallèle à [DE] passant par R ; elles se coupent en **T** ;
- tracer la parallèle à [UV] passant par I ; elle coupe [DE] en **C** (le même point C que pour la face de droite).

L'empreinte du solide sur la face du haut est alors le polygone **CDRTSWI**.



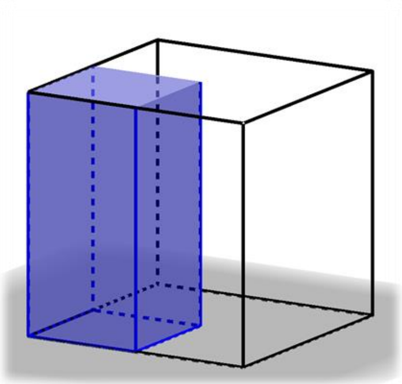
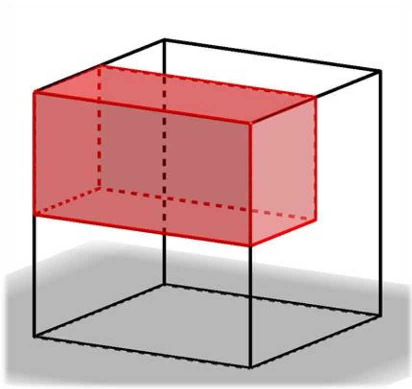
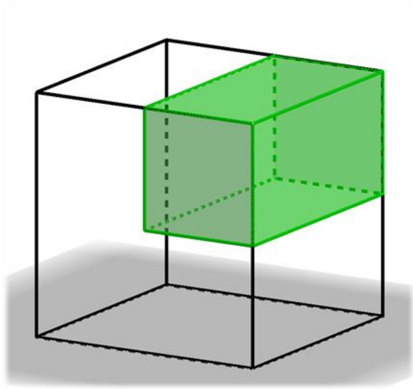
On obtient alors le coloriage suivant :



**2/ Dans le cube de la fiche réponse, dessinez la perspective cavalière du solide le plus volumineux capable de produire la projection ci-dessous.**

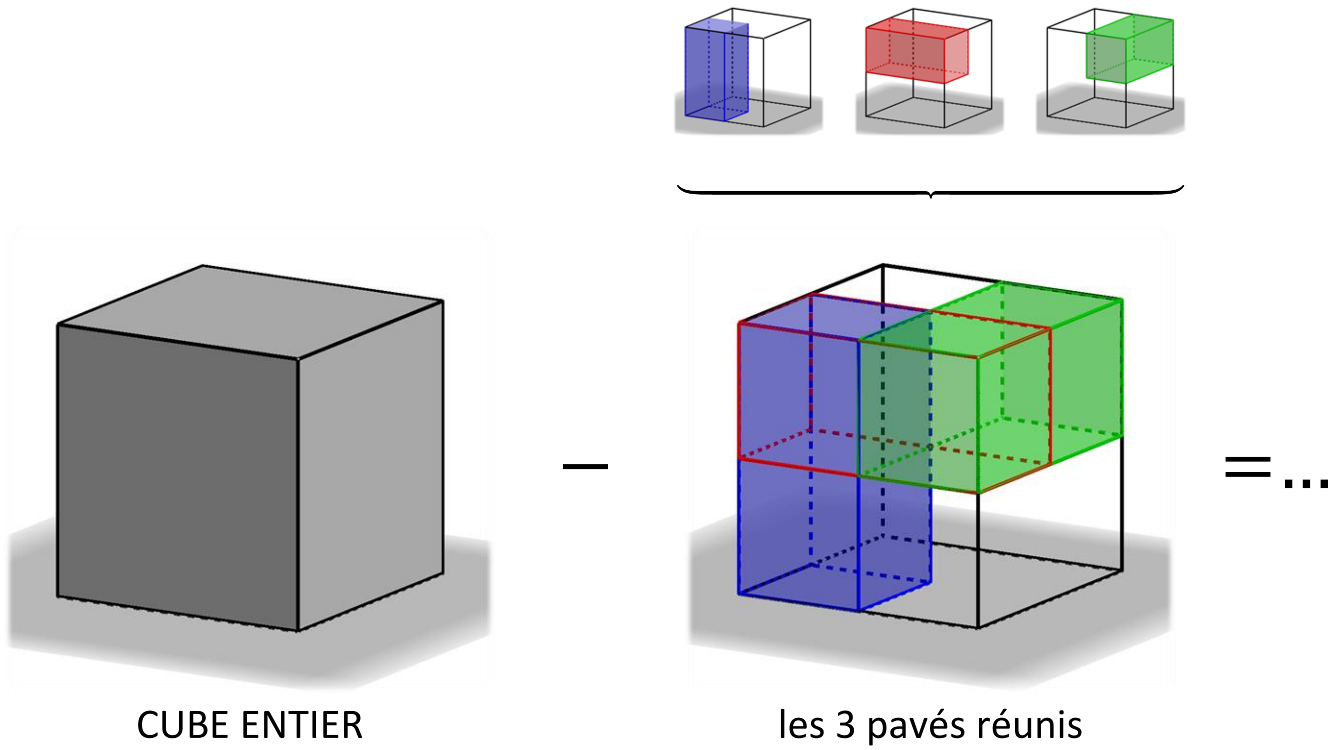
Le carré blanc située sur la face du dessus impose que l'intégralité du pavé situé sous lui est vide (pavé bleu ci-dessous) ;

De même pour les deux faces :

| pavé vide d'après le carré blanc de la face du haut | pavé vide d'après le carré blanc de la face de droite | pavé vide d'après le carré blanc de la face de gauche |
|---|---|---|
|  |  |  |

<u>Remarque :</u> Le pavé rouge est entièrement inclus dans les pavés bleus et verts.

Pour avoir le plus grand volume, il faut donc imaginer le solide que l'on obtient en enlevant ces trois pavés au cube entier.




On obtient alors le solide ci-dessous :