

Consigne : une copie par élève pour le sujet A, une copie pour 2 élèves pour les sujets B et C.

Objectif : remédiation (sujet A), consolidation (sujet B) ou approfondissement (sujet C)

Thème : étude de la convergence d'une suite..

- Sujet A-

Comment peut-on étudier la convergence d'une suite u ? On peut :

- appliquer les règles d'opérations sur les limites
- reconnaître une suite usuelle (suite géométrique ou arithmétique)
- appliquer le théorème des gendarmes si on dispose d'un encadrement de u
- appliquer le théorème de convergence des suites monotones si les hypothèses le permettent.

Commentaires : on identifiera dans chaque exercice , l'une des méthodes citées dans l'encadré ci-dessus.

Exercice 1 :

On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$
 et la suite v définie par pour

tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$. On admettra que pour tout entier naturel n , $u_n \neq -3$ et $u_n \neq 1$.

1. Montrer que la suite v est arithmétique, préciser sa raison et son premier terme.
2. Exprimer pour tout n , v_n puis u_n en fonction de n .
3. En déduire la convergence de u et sa limite.

Exercice 2 :

Etudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{n + \sin n}{n}$

Exercice 3 :

On considère la suite u définie pour tout entier naturel par : $u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n$

1. A l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur, donner les valeurs approchées des 11 premiers termes.
2. Démontrer que si n est un entier supérieur à 30, alors $u_n \geq 2^n$ (on rappelle : si n est un entier naturel non nul, la fonction $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$)
3. En déduire la limite de la suite u . Justifier.

-Sujet B-

Exercice 1 : La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}$.

On admettra que pour tout n , $u_n \neq -4$ et $u_n \neq -3$.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$. Montrer que (v_n) est géométrique convergente.
2. Calculer u_n en fonction de v_n . En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 2 :

Etudier la limite de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = \frac{n + \sin n}{2n + \cos n}$

Exercice 3 : Vrai ou faux à justifier.

1. On considère trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) ayant, pour tout entier naturel n , les propriétés suivantes :

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 1.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

2. La suite définie pour tout entier $n > 1$ par : $u_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ converge vers 0.

3. Une suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} par
$$\begin{cases} u_0 = 1,5 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$$
 pour tout entier naturel n

La suite (w_n) , définie sur \mathbb{N} par $w_n = \ln(u_n - 1)$ est arithmétique.

-Sujet C-

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie dans \mathbb{N} par $u_0 \neq 2$ et pour tout entier n dans \mathbb{N} , $u_{n+1} = 3u_n - 4$.

1. Quelle est la limite réelle ℓ éventuelle de cette suite ?
2. On pose alors pour tout entier naturel n , $v_n = u_n - \ell$.
Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la limite.
3. En déduire que la suite (u_n) ne converge pas.

Exercice 2 :

On pose, pour $n > 0$, $u_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2}$

1. Montrer que, si $0 \leq k \leq n$ alors $\frac{1}{(n+n)^2} \leq \frac{1}{(n+k)^2} \leq \frac{1}{n^2}$
2. En déduire un encadrement de u_n .
3. Quelle est la limite de cette suite ?

Exercice 3 :

Soit u la suite définie par son premier terme u_0 non nul et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n^2$.

1. Calculer les premiers termes de la suite en fonction de u_0 et conjecturer une expression de u_n en fonction de n et de u_0 .
2. Démontrer cette conjecture.
3. Étudier la convergence de la suite u suivant les valeurs de u_0 .