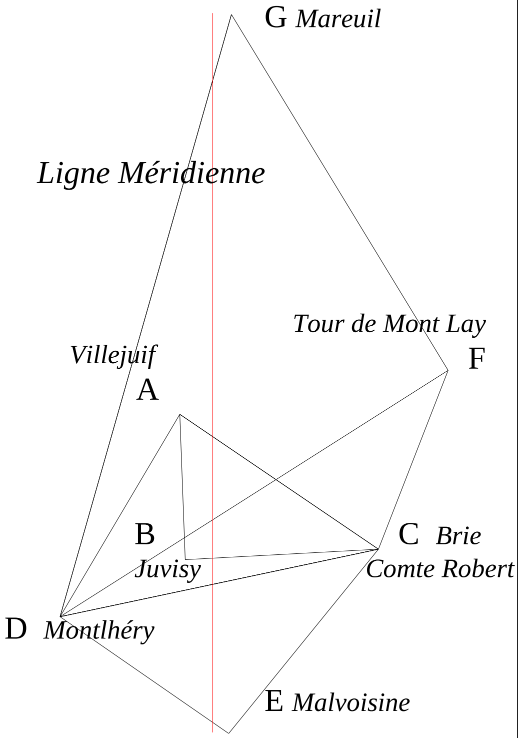
TD : travail interdisciplinaire sur Cassini (à compléter directement sur la feuille)

D'après un TD Irem du groupe mnémosyne : http://expositions.bnf.fr/ciel/maths/pdf/mesurm1.pdf
Sur le calcul de la méridienne:
https://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9ridienne_(g%C3%A9od%C3%A9sie)#La_m.C3.A9ridienne_de_Picard

Document 1

LA TRIANGULATION DE PICARD

En 1668, ***l'abbé Picard*** met en œuvre une opération géodésique de grande envergure.
Selon son rapport à l'Académie, "*outre que par ce moyen on aurait une carte la plus exacte qui ait encore été faite, on en tirerait cet avantage de pouvoir* ***déterminer la grandeur de la terre***".
Picard se servit des principes de la ***triangulation*** :
Il construisit une ***chaîne de treize triangles*** (la figure ci-contre en montre cinq) en partant d'une ***base*** mesurée sur le terrain (une deuxième base permettra une vérification) et complétée par des ***mesures d'angles*** à partir de points visibles les uns des autres (tours, clochers, ...).
Ayant calculé la longueur totale d'un arc de méridien, il ne resta plus qu'à mesurer la latitude aux extrémités pour savoir de quelle fraction de méridien il s'agit.
Picard conçoit lui même ses instruments de mesure et, le premier, va utiliser une lunette munie d'un réticule.



A partir du texte de Picard, documents 1 et 2 répondre aux questions suivantes

1) Dans le triangle ABC, *Picard* mesure la "base" [AB] et les trois angles.

a) Retrouver les valeurs des mesures dans le document 2. Le triangle ABC est-il rectangle ? justifier

AB = 5663 toises, $\hat{A} \approx 54{,}076°$, $\hat{B} \approx 95{,}115°$ et $\hat{C} \approx 30{,}808°$. (convertir les degrés minutes secondes)
Aucun des trois angles ne mesure 90° donc le triangle n'est pas rectangle.

b) Soit H le pied de la hauteur issue de A. Faire une figure simplifiée et calculer AH (en *toises*).

Dans le triangle ABH rectangle en H où H est à l'extérieur du triangle ABC, on obtient :
AH = AB sin $\widehat{ABH}$ = 5663 sin(180° - 95,115) ≈ **5640,4 *toises***.

c) En déduire la valeur de AC et comparer avec celle obtenue par Picard (il y a 6 *pieds* dans une *toise*).

Dans le triangle AHC, rectangle en H, on peut en déduire : AC = $\dfrac{\text{AH}}{\sin \hat{\text{C}}} \approx \dfrac{5640{,}4}{\sin 30{,}808°}$.

Ainsi AC ≈ 11 012,9 *toises*. Et 0,9x6=5,4
On retrouve donc bien les 11 012 *toises* 5 *pieds* obtenus par Picard, à un *pied* près.

Document 2 :

34 *Meſure de la Terre,*

qui ne donnoient les minutes que de ſix en ſix, ils n'ont pas laiſſé d'approcher de la juſteſſe autant qu'il étoit néceſſaire, pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé aux concluſions.

I. TRIANGLE ABC.
Pour connoître le côté AC.

CAB.........54°....4'...35".
ABC.........95.....6....55.
ACB.........30...48....30.
AB.......5663..*Toiſes de meſure actuelle.*
Donc AC.....11012..*Toiſes 5 pieds.*
Et BC......8954..*Toiſes.*

II. TRIANGLE ADC.
Pour DC *&* AD.

DAC.........77°....25'..50".
ADC.........55.......0...10.
ACD.........47....34.....0.
AC.....11012..*Toiſes 5 pieds.*
Donc DC.....13121..*Toiſes 3 pieds.*
Et AD.......9922..*Toiſes 2 pieds.*

III. TRIANGLE DEC.
Pour DE *&* CE.

DEC.........74°....9'..30".
DCE.........40....34....0.
CDE.........65...16....30.
DC.....13121..*Toiſes 3 pieds.*
Donc DE.......8870..*Toiſes 3 pieds.*
Et CE......12389..*Toiſes 3 pieds.*

par M. l'Abbé Picard. 35

IV. TRIANGLE DCF.
Pour DF.

DCF.........113°....47'..40".
DFC.........33.....40.....0.
FDC.........32....32.....20.
DC.......13121....*Toiſes 3 pieds.*
Donc DF.......21658....*Toiſes.*

Notez que dans ce quatriéme triangle, l'angle DFC a été augmenté de 10", qui manquoient à la ſomme des trois angles.

V. TRIANGLE DFG.
Pour DG *&* FG.

DFG.........92°....5'...20".
DGF.........57....34......0.
GDF.........30....20....40.
DF.......21658....*Toiſes.*
Donc DG.......25643....*Toiſes.*
Et FG.......12963....*Toiſes 3 pieds.*

Enſuite de ces cinq triangles, il a été facile de concluſe la diſtance GE entre Malvoiſine & Mareuil, ſans ſuppoſer aucune nouvelle Obſervation.

2) De façon générale, dans un triangle ABC quelconque mais avec des angles aigus, prouver que :

AC x sin $\widehat{C}$ = AB x sin $\widehat{B}$

Les deux valent AH en utilisant les sinus dans un triangle rectangle

On obtient ainsi la formule appelée aussi « formule des sinus » valable dans tout triangle ABC (angles aigus ou obtus) dont la démonstration se fait en 1S et dont on se sert directement dans les calculs de triangulation :

$$\boxed{\frac{AC}{\sin\widehat{B}} = \frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}}}$$

Pourquoi cette formule permet-elle de calculer les distances des côtés de tous les triangles de la chaîne des 13 triangles en utilisant que des mesures d'angles plus faciles à mesurer?
La démonstration ne vient qu'en 1S avec les sinus d'angles orientés de deux vecteurs non compris entre 0 et 90 °.
A partir d'un seul côté du triangle, on déduit les deux autres côtés à partir des 3 angles et ainsi de suite de proche en proche… Il faut simplement mesurer une base (et faire une vérification sur la dernière longueur calculée)

3) Justifier l'affirmation finale de *Picard* : "*il a été facile de conclure la distance GE…* " en effectuant le calcul en toises de GE en n'utilisant que les résultats du document 2 et H le pied de la hauteur issue de G, puis convertir le résultat en mètres, en sachant que la *toise de Picard* est égale à peu près à 1,947 m.

Pour le calcul de GE, on procède dans le triangle DGE avec GD = 25 643 *toises*, DE = 8870,5 *toises* et $\widehat{GDE}$= 128,158° = somme des 3 angles. La formule des sinus ne suffit pas pour résoudre (1 seul angle).
On a GH = GD sin(180 – 128,158), puis DH = DG cos(180 – 128,158).
Le théorème de ***Pythagore*** dans le triangle GHE, rectangle en H, donne alors GE ≈ **31 895,5 *toises*** c'est à dire 31 895 *toises* et 3 *pieds*, soit encore GE ≈ **62 164,33 m**. (31 895,5 x 1,947)

4) Calcul de la longueur d'un méridien … problème de la forme de la Terre !

Document 3

-580	**THALES** (-à Milet) considère la terre comme une grande galette, dans une bulle entourée d'eau.
-570	**PYTHAGORE** considère que la terre est ronde comme une boule, parce qu'il s'agit d'une forme "parfaite".
-335	**ARISTOTE** donne des preuves de la rotondité de la terre, en particulier son ombre sur la lune lors d'une éclipse de lune.
-230	**ERATOSTHENE** (à Alexandrie) mesure un méridien et donne une bonne valeur approchée du rayon terrestre.
+400	**ST AUGUSTIN**, en occident, rejette la sphéricité de la terre. C'est une régression jusqu'au X^{ème} siècle.
IX - XI siècles	Les astronomes et géographes **ARABES** perfectionnent les instruments de mesure et prolongent la tradition grecque.
1670	**PICARD** mesure par triangulation un arc de méridien entre Amiens et Paris.
1669/1716	Les **CASSINI** mesurent un arc de méridien entre Dunkerque et Collioure d'où il ressort que la terre serait aplatie à l'équateur.
	NEWTON déduit du mouvement du pendule à différentes lattitudes l'aplatissement aux pôles.
1736/1743	**MAUPERTUIS** (en Laponie), **BOUGUER** et **LA CONDAMINE** (au Pérou) vérifient, par triangulation, l'aplatissement aux pôles.

a) Localiser sur le graphique du document 4 les villes de Sourdon et de Malvoisine et colorier en rouge la ligne méridienne. Puis expliquer l'extrait du site de wikipedia :

« La projection sur la méridienne de ses triangles lui donne, entre Sourdon et Malvoisine, un arc de 68 347 toises 3 pieds (≈ 133 073 m)». **corrigé à 68 430 toises et 3 pieds.**

De quelles mesures supplémentaires sur le terrain l'abbé Picard a-t-il besoin pour pouvoir faire ses « projections ».

Il faut projeter les triangles pour obtenir une mesure d'une portion de méridien.

Il faut pour calculer cette projection, les angles des côtés des triangles avec la direction du nord (direction de la méridienne).

b) « L'abbé va déterminer la différence de latitude, entre Malvoisine et Sourdon, avec un secteur de 10 pieds de rayon, qu'il appelle ici «portion de cercle». L'étoile de référence est dans le genou de Cassiopée qu'il observe après avoir vérifié par retournement son instrument. Il effectue de nombreuses mesures dont la variation n'excède pas 5". Tous calculs et corrections faits, la différence de latitude entre Malvoisine et Sourdon est de 1° 11' 57".

Il en conclut que le degré du méridien terrestre contient 57 064 toises 3 pieds »

Vérifier le calcul du degré de méridien en toises à partir de la valeur donnée au a) puis en déduire la longueur d'un méridien terrestre (demi-cercle). Convertir le résultat en mètres et comparer avec la valeur obtenue sur le site, puis avec la valeur actuelle (à chercher).

1° 11' 57" = 1+11/60+57/3600 = 1,19917 d'arc de méridien correspond à 68 430,5 toises sur la Terre

donc par proportionnalité : 1° de méridien contient 68 430,5/1,19916666≈ 57 064 (erreur de 5'' sur les mesures).

Ce qui ferait pour la longueur d'un méridien : 57 064,5 (Picard) x180 = 10 271 610 toises

soit x1,947=19 998 925m

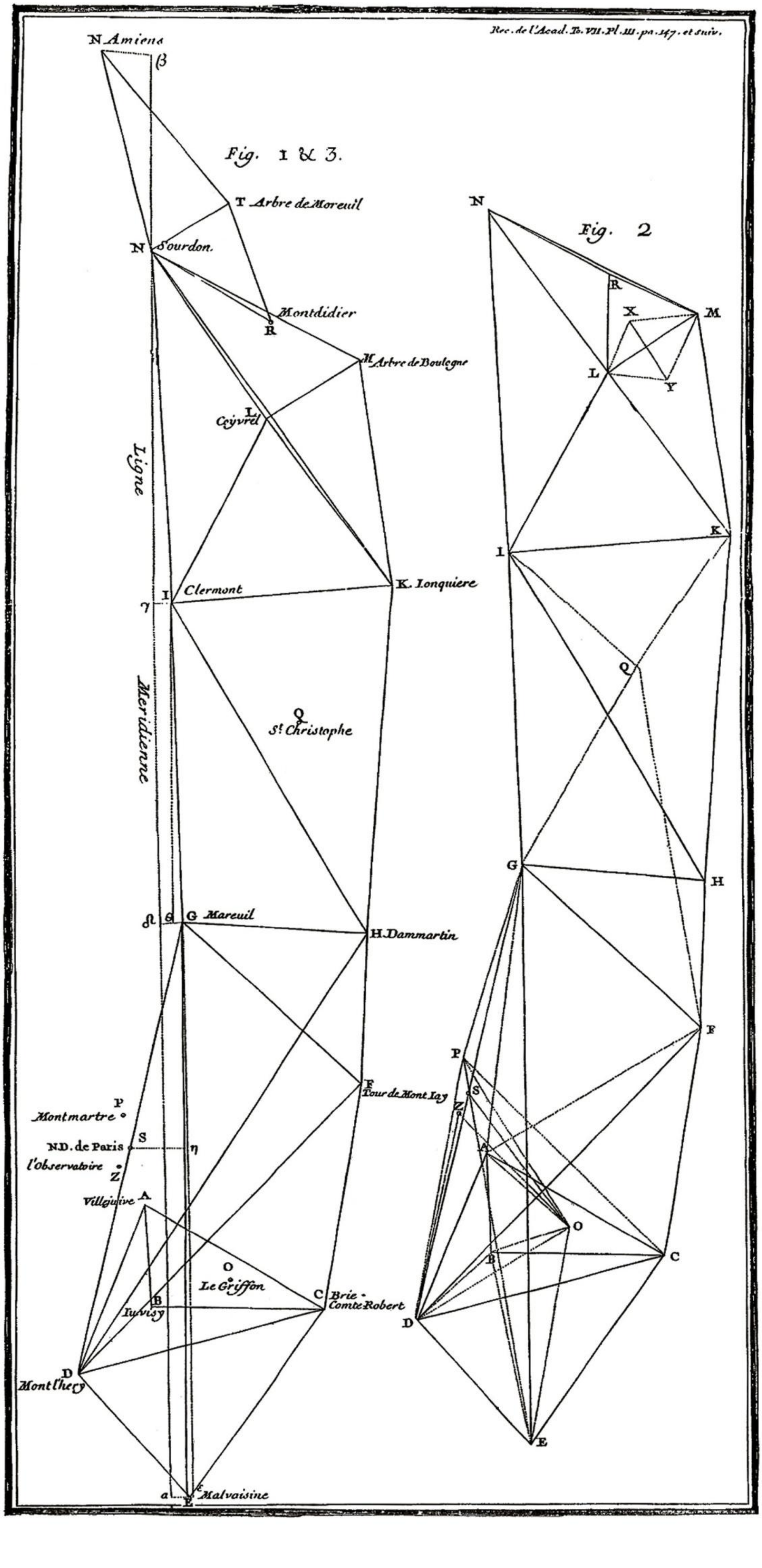
valeur actuelle : 20 003,932 km

le gros problème est l'aplatissement aux pôles !!! ce n'est pas un demi cercle parfait !

« En 1683, « Sa Majesté ordonne aux Mathématiciens de l'Académie des Sciences de continuer l'entreprise [de Picard] et de prolonger vers le Septentrion & vers le Midi jusques aux confins du Royaume, une Ligne Méridienne qui passât par le milieu de l'Observatoire de Paris[19] ».

Dès 1683, donc, les travaux débutent : J.-D. Cassini, chargé des opérations, se dirige vers le Sud et de La Hire part vers le Nord ». d'où le TP suivant sur la triangulation à Aurillac !

Document 4


Rec. de l'Acad. To. VII. Pl. III. pa. 147. et suiv.
Fig. 1 & 3.
N Amiens
β
T Arbre de Moreuil
N Sourdon.
Montdidier
R
M Arbre de Boulegne
L Coyvrel
Ligne
Meridienne
I Clermont
γ
K. Lonquiere
Q St Christophe
δ G Mareuil
H. Dammartin
F Tour de Mont Jay
P Montmartre
N.D. de Paris S
η
l'Observatoire
Z
A Villejuive
O Le Griffon
B Juvisy
C Brie-Comte Robert
D Mont l'hery
a
ε Malvoisine
Fig. 2
N
R
X
M
L
Y
K
I
Q
G
H
F
P
S
Z
A
O
B
C
D
E