

Calculs de la distance Terre-Lune

Mission : Dans le cadre du croisement sciences/SF/Fake news, explorer au travers du temps la construction d'un savoir scientifique de l'antiquité jusqu'à nos jours..

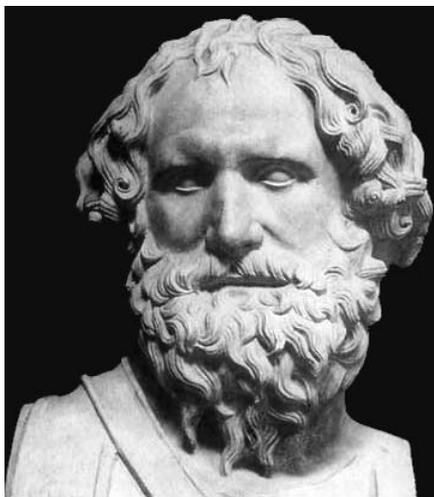
Supports : nouvelle d'Isaac Asimov *Les idées ont la vie dure* + éventuellement *De la Terre à la Lune* de Jules Verne

Il faudra avoir lu la nouvelle d'Asimov pour le 10 février.

- Période de l'Antiquité : Méthode géométrique des anciens avec le rapport Terre/Lune
- Au XVIII^{ème} siècle : Méthode de triangulation avec la parallaxe
- Aujourd'hui : Méthode des tirs Laser

Comment a-t-on mesuré la distance Terre-Lune?

En posant le pied sur notre satellite ! Le 21 juillet 1969, Neil Armstrong et Buzz Aldrin ont déployé **un panneau composé de 100 miroirs** sur la mer de Tranquillité. Des observatoires comme celui de **McDonald (Texas)** envoient des faisceaux laser dans leur direction, puis mesurent la durée de l'aller-retour. Sachant que la lumière se déplace dans le vide à 300 000 km/s, on en déduit à 2 cm près la distance moyenne Terre-Lune : 384 403 km. Au III^{ème} siècle avant notre ère, **Aristarque de Samos** avait estimé que notre satellite se trouvait à 486 000 km de la Terre, en se basant sur la **distance parcourue par la Lune durant une éclipse totale**. Deux cents ans plus tard, **Hipparque tombe presque juste : 384 000 km !** En 1751, les astronomes **Lalande et La Caille** se rapprochent de la vraie distance en visant simultanément le centre du disque lunaire depuis Berlin et Le Cap et en la calculant par **triangulation**.



Malgré tout au III^{ème} siècle avant notre ère Aristarque de Samos « aurait » affirmé que le Soleil était au centre de l'univers, car se basant sur des calculs de distances Terre-Lune et Terre-Soleil il arriva à la conclusion que le Soleil était 19 fois plus éloigné de la Terre que de la Lune, et comme dans le cadre d'une éclipse solaire totale la Lune cache complètement le Soleil celui-ci est donc au moins 19 fois plus gros que la Lune elle-même 2 à 4 fois plus petite que la Terre. La Terre était donc au moins 5 fois plus petite que le Soleil. Samos trouva donc inconcevable que le plus gros astre puisse tourner autour du plus petit. Les travaux de Samos ne convainquirent pas c'est pourquoi il fallut attendre 1543 pour que l'**héliocentrisme** soit remis à l'ordre du jour (par **Nicolas Copernic**) tout comme Samos Copernic pensait que l'astre le plus gros et le plus lumineux se devait d'être au centre de l'univers de plus cette hypothèse permit à Copernic de réaliser son système simple et esthétique et qui était en phase avec les observations des astronomes.

On repart de zéro !

https://www.astro-rennes.com/initiation/distance_terre_lune.php
<https://docplayer.fr/21318843-Mesure-de-la-distance-terre-lune.html>
<http://serge.mehl.free.fr/anx/parallaxe.html>

Partie 1 : Les anciens : rapport Lune/Terre

1) **Schéma de base** : construction géométrique vue en début d'année dans le cours de math et connue dès l'antiquité.

θ l'angle de vue de la Lune depuis la Terre

r le rayon de la Lune

d la distance Terre-Lune



Question 1 : Parmi les trois valeurs θ , r et d , quelle est celle qui est la plus facile à mesurer ? Proposer des méthodes concrètes utilisables par les savants de l'antiquité qui permettent cette mesure.

Il est admis qu'on voit la Lune sous un angle de $32'$ à peu près.

(rappel : $1^\circ = 60'$ « on dit que dans un degré d'arc, il y a 60 secondes d'arc »)

2) Estimation du diamètre de la Lune :

ARISTARQUE (310 - 230 av. J.-C.) émet l'hypothèse que l'ombre de la Terre pouvait être considérée comme un cylindre jusqu'à la distance de l'orbite de la Lune. Lors d'une [éclipse](#) centrale, la Lune reste environ 2 heures dans la zone d'ombre. Se déplaçant d'une distance égale à son diamètre apparent en 1 heure, il calcule que le diamètre lunaire vaut $1/3$ de celui de la Terre.



1 - la Lune entre dans l'ombre de la Terre ;

2 - une heure s'est écoulée, la Lune est entièrement éclipsée ;

3 - une première heure dans l'ombre et la Lune s'est déplacée d'un diamètre ;

4 - après deux heures d'éclipse, la Lune sort de l'ombre.

En position 2, la Lune est juste totalement éclipsée. Au bout d'une heure, elle se trouve en 3, ayant avancé de son propre diamètre. Au bout de 2 heures, elle se trouve en 4, toujours totalement dans l'ombre. Elle en sort alors.

Ainsi : **la Lune est trois fois plus petite que la Terre.**

Question 2 :

a) Si L est le diamètre de la Lune, et T celui de la Terre, exprimer L en fonction de T .

b) En utilisant le 1) et la trigonométrie, retrouver la formule qui relie la distance Terre-Lune appelée « d » au diamètre de la Lune L et en déduire la formule reliant d et T .

(On trouvera : $d = 35 T$)

Pour pouvoir utiliser cette formule, il a fallu estimer le diamètre de la Terre...

Voici la méthode attribuée à Eratosthène (-276 [Cyrène, Libye] - -196 [Alexandrie, Egypte]) qui lui a permis de déterminer cette valeur. http://frank.albrecht.free.fr/gestclasse_v7/documents/2nde/TP2RayonTerre/image/erathosthene.bmp



Question 3 : A la 5ème image de la bande dessinée, les rayons du Soleil sont représentés parallèles entre eux.

En vous aidant des deux hypothèses suivantes et des schémas page suivante:

1ère hypothèse : la Terre est plate et le Soleil est très proche d'elle.

2ème hypothèse : la Terre est sphérique et le Soleil est si loin que l'on peut considérer que ses rayons lumineux arrivent parallèlement entre eux.

vous critiquerez l'auteur de la BD.

Quelle autre observation en bord de mer permet d'apporter un argument en faveur de la deuxième hypothèse ?

Hipparque, avec une meilleure dimension du cône d'ombre estima cette distance à 38 fois le diamètre de la Terre.



En réalité, l'ombre de la Terre forme un cône d'angle $0,5^\circ$, ce qui donne un diamètre lunaire égal à 0,27 fois celui de la Terre.

Question 6 : Montrer qu'avec la dernière mesure, la distance Terre-Lune est égale à environ 30 diamètres terrestres.

Question 7 : Quelle découverte faite par Kepler permet de comprendre l'origine de mesures différentes pour le diamètre apparent de la Lune ? Donner au moins deux autres explications pour les erreurs de mesures.

Partie 2 : Les modernes : utilisation de la parallaxe

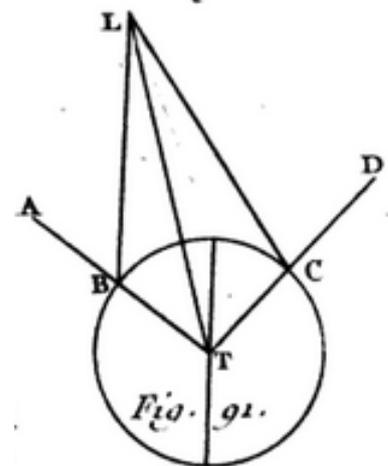
En 1751, une expérience menée depuis Berlin en B (Allemagne $52^\circ 30' N$, $13^\circ 25' E$) par Joseph Jérôme Lefrançois De Lalande (1732 - 1807) et le Cap de Bonne Espérance en C (Afrique du Sud : $34^\circ 21' S$, $18^\circ 28' E$) par Nicolas Louis De La Caille permet de déterminer cette distance par la méthode des parallaxes. En négligeant les 5° de différence de longitude, les deux lieux sont situés pratiquement sur le même méridien.

Ils mesurent chacun l'angle séparant leur zénith (A et D) au centre du disque lunaire lors d'un passage au méridien et obtiennent $\widehat{ABL} = 53,52^\circ$ et $\widehat{DCL} = 34,66^\circ$

La distance Terre-Lune est déterminée par triangulation à l'aide de l'angle au sommet L (\widehat{ELC}) appelé ici **parallaxe et nommée p**. (La définition de la parallaxe de la Lune est un peu plus compliquée mais la méthode de résolution du triangle est identique.

La figure et les calculs sont extraits de l'*Astronomie* de De Lalande, tome 2, présent sur Google Books à l'adresse suivante :

<http://books.google.com/books?id=-i2gAAAAMAJ&hl=fr> (pages 357 à 372 et figure n°91, page 376)

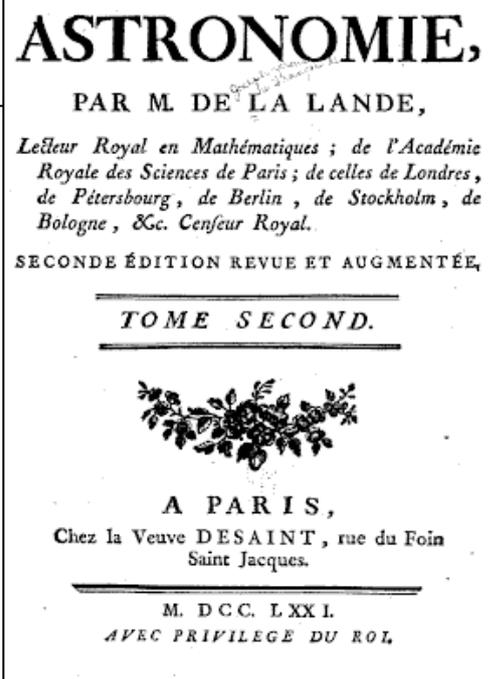


La

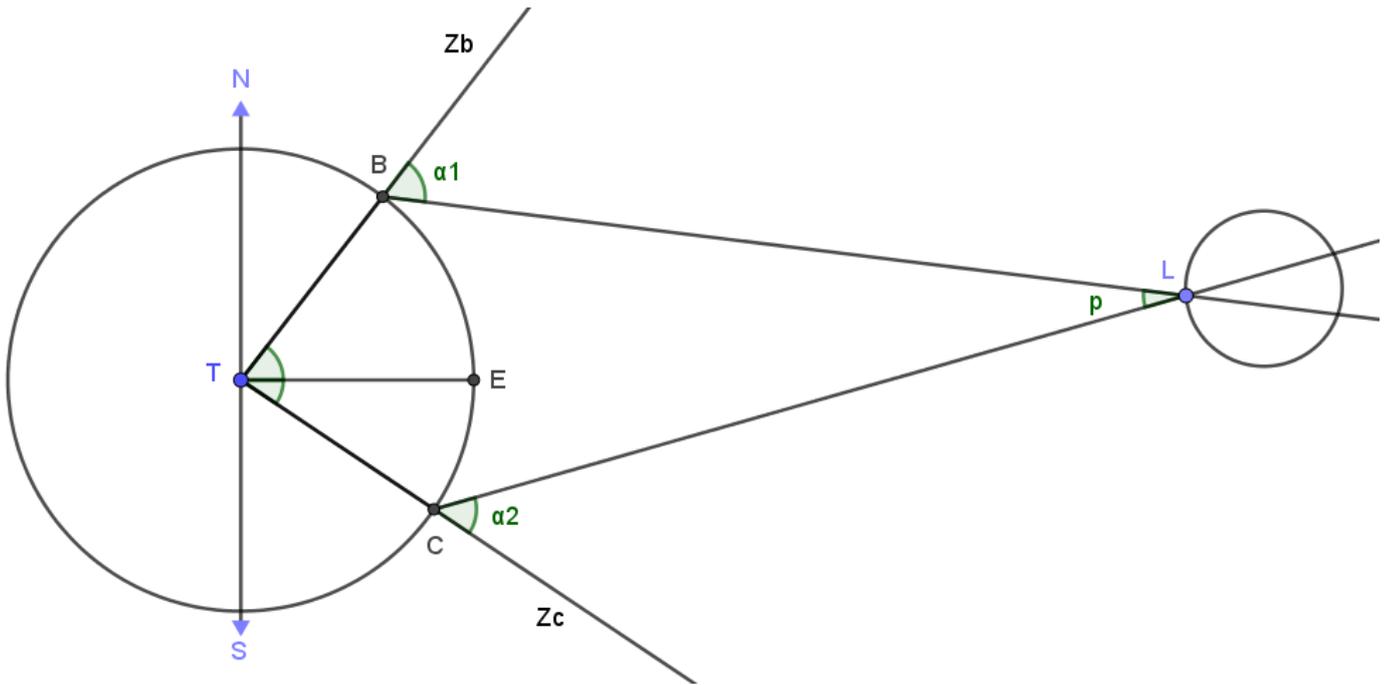
Question 1 : Pourquoi le schéma pour expliquer la méthode ne peut pas être à l'échelle ? Qu'en déduit-on pour la valeur de la parallaxe ?

Question 2 : Comment De Lalande et De La Caille ont-ils pu mesurer précisément avec des instruments issus de l'astronomie leur latitude et les deux angles \widehat{ABL} et \widehat{DCL} ? (Il suffit de se rappeler les explications de la phase 1 du projet !).

(voir commentaires et autres données en annexe)



Analyse de la figure Mathématique de base :



Question 3 : En analysant la figure, retrouver les calculs qui permettent à l'aide des mesures réalisées par La Caille et Delambre, de déterminer la valeur de la parallaxe p donnée dans le texte.

Aide :

- Replacer sur la figure, les quatre valeurs mesurées par De Lalande et De Lacaille données dans le texte.
- Que vaut la somme des angles dans un triangle ? Démontrer que pour n'importe quel quadrilatère convexe la somme des 4 angles vaut 360° .
- Calculer la valeur de la parallaxe p . (attention à la conversion en degré des latitudes)

👉 Les deux points étant éloignés, cela augmente p (meilleure précision) et le fait de se placer de part et d'autre de l'équateur évite de procéder à une différence des parallaxes, ce qui nuirait encore gravement à la précision des calculs.

I 649. LA TROISIEME METHODE pour déterminer la parallaxe est celle qui suppose deux observateurs très-éloignés l'un de l'autre, observant tout à la fois la hauteur d'un astre dans le méridien ; c'est la plus naturelle & la plus exacte ; c'est celle que j'ai employée en 1751 lorsque M. l'Abbé de la Caille étoit au Cap de Bonne-Espérance, & que j'observois en même temps la lune à Berlin, pour trouver la parallaxe de la lune, qui n'avoit jamais été déterminée par une méthode aussi exacte. (*Mém. de l'acad. 1751, pag. 457*).

Page 357

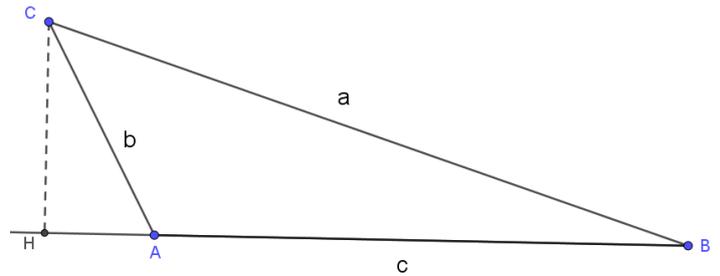
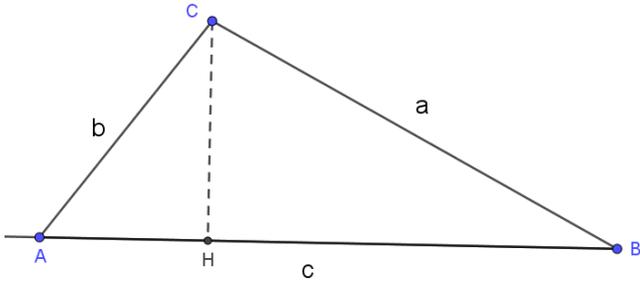
👉 Compte tenu de la petitesse de p et des erreurs d'observation inévitables, cette formule théorique est inexploitable sans recours à plusieurs relevés, lors du passage de la Lune au méridien d'observation, afin d'en tirer une moyenne. De plus, les mesures de chaque observateur doivent être simultanées et à l'époque point d'horloge atomique ! Il fallait se fier aux distances de la Lune par rapport à des étoiles considérées comme fixes vu leur éloignement. La Caille fit un grand nombre de mesures ultérieures (une quarantaine) à Paris, Greenwich, Stockholm, Bologne.

Question 4 : Tracer sur le schéma la droite (TL), elle partage l'angle p en deux angles différents p_1 et p_2 puis retrouver la formule utilisée par De Lalande pour calculer la distance Terre-Lune :

$$TL = \frac{TB \times \sin \alpha_1 + TC \times \sin \alpha_2}{p_1 + p_2}$$

Aide :

a) Formule des sinus dans un triangle ABC quelconque



Dans chacun des deux cas suivants, exprimer en utilisant la trigonométrie la hauteur CH en fonction des longueurs a et b des deux côtés [AC] et [CB] et des deux angles \hat{A} et \hat{B} .

En admettant que pour un angle \hat{A} quelconque on a : $\sin(180^\circ - \hat{A}) = \sin(\hat{A})$, établir la formule des sinus :

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \quad \left(= \frac{\sin(\text{angle})}{\text{côté opposé à l'angle}} \right)$$

b) Utiliser la formule des sinus dans le triangle BLT du schéma de base puis dans le triangle CLT pour obtenir la formule:

$$\sin(p_1) + \sin(p_2) = \frac{TB}{TL} \sin \alpha_1 + \frac{TC}{TL} \sin \alpha_2$$

c) **Lorsqu'un angle est très petit**, s'il est exprimé dans l'unité du « radian » (mesure en degré $\times \frac{\pi}{180}$), son sinus est très proche de la valeur de l'angle lui-même donc $\sin(p_1) + \sin(p_2) \approx p_1 + p_2$. Ainsi on peut utiliser dans la formule la valeur de la parallaxe p sans avoir eu à calculer séparément p_1 et p_2 .

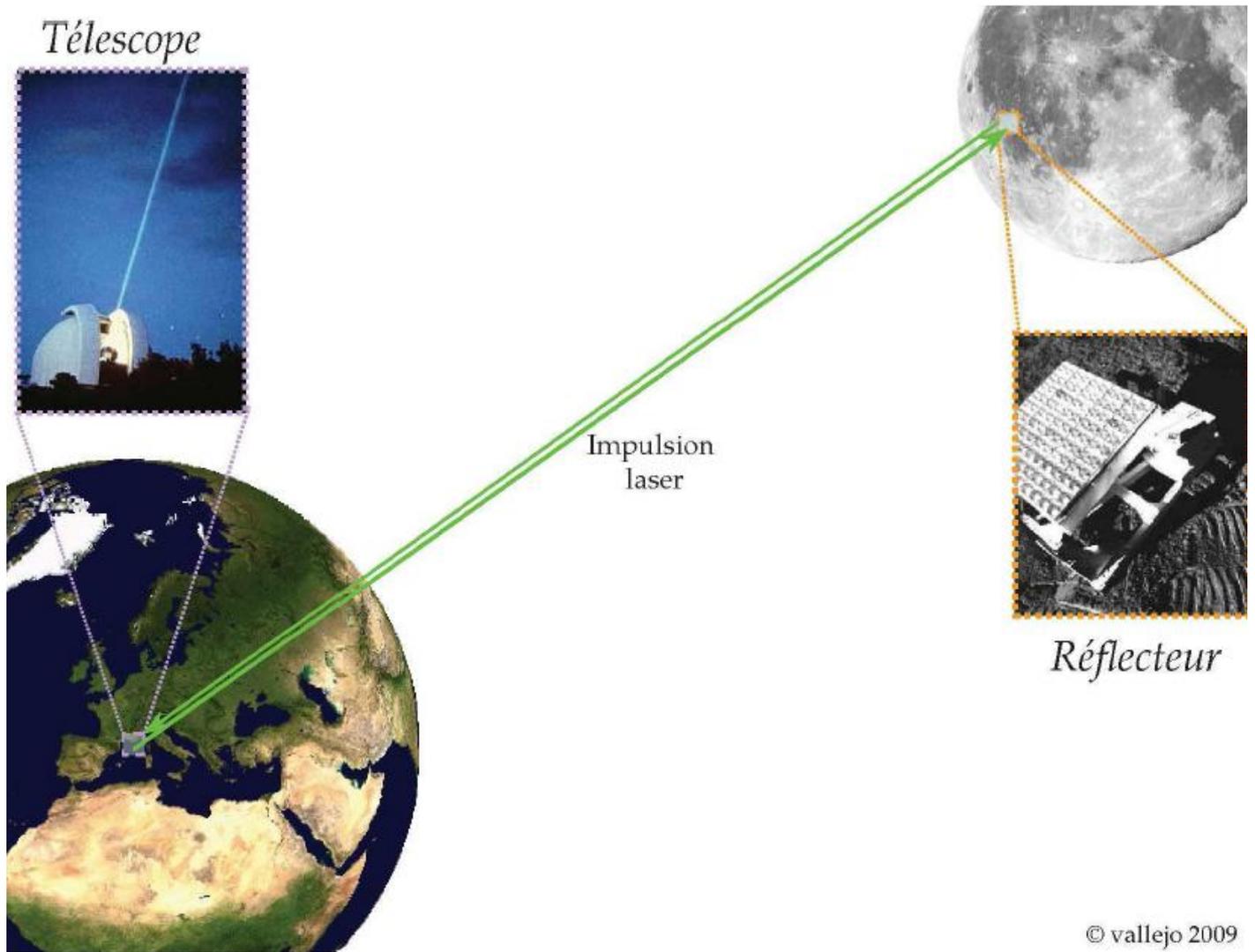
Déduire de la formule obtenue au b), la formule utilisée par De Lalande pour calculer TL donnée au début.

d) Pourquoi De Lalande ne simplifie-t-il pas la formule en considérant que $TB = TC$? Faire tout de même le calcul de la distance Terre-Lune avec une valeur du rayon de la Terre de 6378 km.

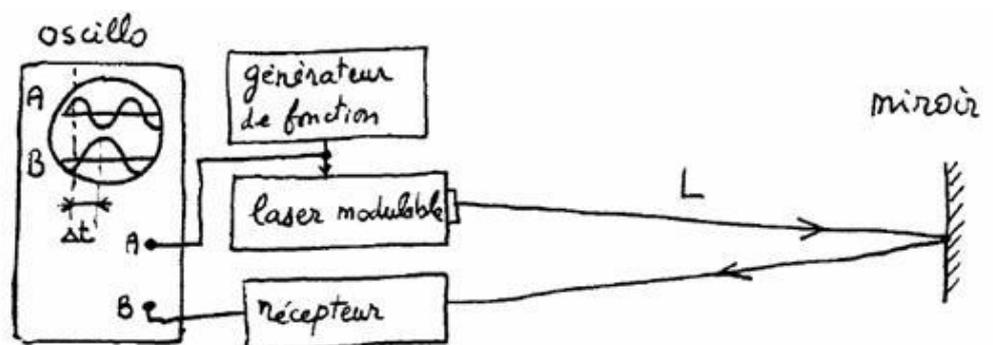
e) Retrouver la formule dans l'extrait ci-contre.

de même $\frac{CT}{TL}$ est le sinus de la parallaxe horizontale au Cap de Bonne-Espérance, ou au point C; ainsi le sinus de la somme, ou de l'angle $BLC = \frac{CT}{TL} \sin. LCD + \frac{TB}{TL} \sin. LBA$, (3617) en supposant le cosinus de chaque parallaxe égal à l'unité; donc la distance $TL = \frac{CT \sin. LCD + TB \sin. LBA}{\sin. BLC}$; & le sinus de la parallaxe horizontale à Paris, ou dans un autre lieu quelconque dont on connoitra la distance au centre de la terre sera égal à cette distance ou au rayon de la terre multiplié par $\frac{\sin. BLC}{CT \sin. LCD + TB \sin. LBA}$. Dans cette formule on fait usage des deux rayons de la terre TC & TB dont on trouvera la valeur dans le XV^e. livre, (2680, 2690), & ci-après (1705).

Partie 3 : TIR LASER



Principe de la mesure :



Sachant que la vitesse de la lumière a une valeur bien déterminée : $c = 299792,458 \text{ km.s}^{-1}$, vous pourrez commencer par déterminer la taille de la classe en utilisant le principe de la mesure et en réalisant l'expérience.

Vous rechercherez ensuite l'expérience « laser-lune » de l'[Observatoire de La Côte d'Azur](http://wwwrc.obs-azur.fr/cerga/laser/laslune/presentation.htm)
<http://wwwrc.obs-azur.fr/cerga/laser/laslune/presentation.htm>

Partie 4 : Conclusion

Comparer les trois méthodes et mettre en évidence les évolutions techniques qui ont permis d'améliorer la connaissance scientifique de la distance Terre-Lune.

Annexes pour le calcul de la parallaxe.

Les données du texte de l'énoncé n'ayant pas donné une valeur satisfaisante pour la distance Terre-Lune, nous recherchons les valeurs des observations de De Lalande et De La Caille dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences parues en 1752. Nous les trouvons sur le site de l'Académie des Sciences : https://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Lalande/Lalande_pdf/Mem1752_p78.pdf

1) Refaire les calculs avec les données encadrées dans les différents documents.

- les latitudes des deux observatoires données par De Lalande.
- les deux observations.

Pourquoi le calcul fait à l'aide les 4 valeurs d'angles ne correspond pas tout à fait avec la valeur donnée par De Lalande ?

2) Faire le calcul de la distance Terre Lune avec la valeur de la parallaxe entre les deux observatoires donnée par De Lalande.



78 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

PREMIER MÉMOIRE
SUR LA
PARALLAXE DE LA LUNE,
ET SUR
SA DISTANCE A LA TERRE;

Dans lequel on applique les nouvelles observations faites par ordre du Roi en 1751 & 1752, à Berlin & au cap de Bonne-espérance, à un sphéroïde aplati, pour en déduire les parallaxes dans différens points de la Terre.

Par M. LE FRANÇOIS DE LA LANDE.

Déc. 1752. L'UTILITÉ des Sciences n'a guère besoin d'être prouvée dans notre siècle; ceux qui n'auroient pû se mettre à

Page 88 :

dans un second Mémoire. Je suppose la latitude de l'observatoire de Berlin, $52^{\text{d}} 31' 13''$, telle que je l'ai observée au mois de Septembre, par le moyen de l'étoile polaire, vûe au dessus & au dessous du Pole, deux heures après midi & après minuit; elle est peu différente de celle que M. Kies m'a assuré avoir observée avec un quart-de-cercle de 2 pieds, dont l'arc total est exactement de 90 degrés, & qu'il a insérée dans l'Almanach de Berlin, $52^{\text{d}} 31' 0''$; mais il étoit important qu'elle fût vérifiée ou corrigée avec un plus grand instrument.

Page 105 :

C'est ainsi que j'ai calculé pour la latitude de Berlin & pour celle du cap de Bonne-espérance, c'est-à-dire $52^{\text{d}} 31' 13''$ & $33^{\text{d}} 55' 12''$, les rayons BC & Cc 3277160 toises & 3283003 toises; l'angle BCE , $52^{\text{d}} 12' 36'' \frac{1}{4}$;

Le 28 Décembre, la distance du bord austral de la Lune au zénit étoit à Berlin à 8^h 28' 22" de 34^d 55' 49", & celle d'Aldebaran le même jour 36^d 31' 18"; on tire des tables astronomiques pour ce temps-là la longitude 17^d 30' 6" dans le Taureau, la latitude boréale 1^d 24' 6", la déclinaison 18^d 25' 21"; le diamètre de la Lune fut aussi observé ce jour-là à Paris à 59 degrés de hauteur, 33' 26", c'est-à-dire, le demi-diamètre horizontal 16' 28", & par conséquent 16' 42"3 à la hauteur où il étoit vû à Berlin: employant 2"7 pour la réfraction, on trouve la différence en déclinaison du centre de la Lune & de l'étoile, 1^d 52' 14". M. de la Caille observa aussi au Cap le même bord 52^d 48' 18"8: au moment de son observation la longitude de la Lune étoit de 17^d 17' 11"75 dans le Taureau, la latitude boréale 1^d 25' 13"5, la déclinaison boréale 18^d 22' 56"25, le demi-diamètre pour cette hauteur 16' 37"9, déduit de l'observation: ajoutant à la distance au zénit le changement de déclinaison, 2' 24"8, & 1"5 pour l'augmentation de la parallaxe, & comparant cette somme à la distance d'Aldebaran au zénit, prise le jour précédent, 49^d 53' 14"4, on aura un arc qui, augmenté de 7"2 à cause des réfractions, devient 3^d 14' 16", & par conséquent la parallaxe des deux observatoires étoit alors 1^d 22' 2".

Le 30 Janvier 1752, la Lune qui depuis un mois entier ne s'étoit montrée qu'une seule fois, parut enfin au travers des nuages & des brouillards, assez pour pouvoir m'affurer que la distance du bord inférieur au zénit dans le moment de son passage par le méridien à 12^h 2' 27", étoit de 40^d

Par l'observation du 27 Décembre.

Distance du centre de la Lune au zénit.	38. 16. 14,5
Parallaxe des deux observatoires.	1. 22. 15,3
Logarithme de la distance de la Lune	82753494
Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0. 59. 58,5

Par l'observation du 28 Décembre.

Distance du centre de la Lune au zénit	34. 39. 44
Parallaxe des deux observatoires.	1. 22. 2
Logarithme de la distance de la Lune	82714521
Parallaxe horizontale sous l'Equateur	1. 0. 31

Par l'observation du 30 Janvier 1752.

Distance du centre de la Lune au zénit	40. 40. 55
Parallaxe des deux observatoires.	1. 22. 16,3
Logarithme de la distance de la Lune	82769219
Parallaxe horizontale sous l'Equateur	0. 59. 45,46



Figure 1 : Le quart de cercle mural de Sisson (photo : Jean-Marie Refflè CID @ ADAGP 2004)

Complément sur le sextant mural utilisé pas les deux astronomes :

Pour Berlin : (extrait des cahiers Clairaut du CLEA n°20)

clea-astro.eu/archives/cahiers-clairaut/CLEA_CahiersClairaut_120.pdf

L'observatoire de Lyon possède un magnifique quart de cercle mural de 165 cm de rayon (5 pieds), non daté et signé « Jonathan Sisson » (Fig. 1).

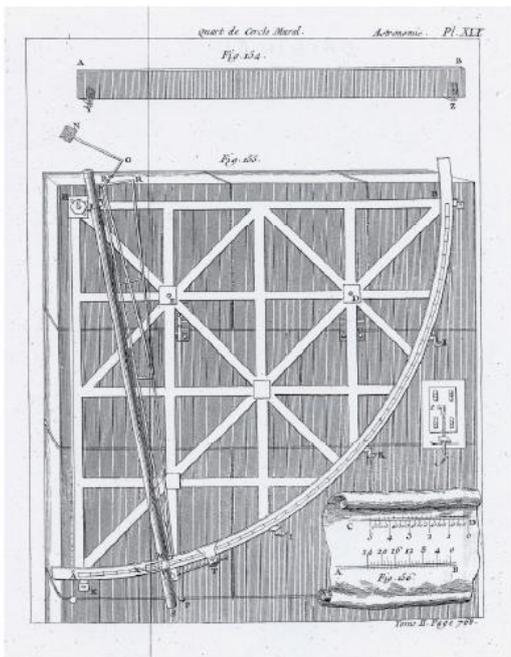
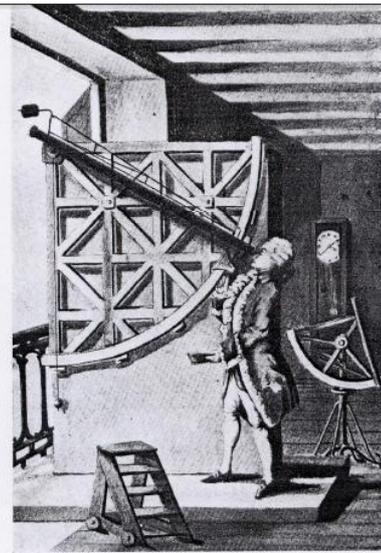


Figure 2 : Gravure ancienne du quart de cercle de Sisson tirée de « l'Astronomie » de Lalande, édition 1771, Tome II, p. 768



Phot. Marchand. Dessin de M^{lle} Antoinette MARCHAND. LALANDE et son Grand Quart de Cercle, à l'Observatoire de Berlin en 1752.

Figure 3 : Lalande observant à Berlin en 1752 avec le quart de cercle de Sisson. (Dessin de Melle Antoinette Marchand, dans Marchand, 1907, p. 32)

Pour le Cap :

<http://expositions.obspm.fr/lacaille/les-instruments-de-la-caille/>