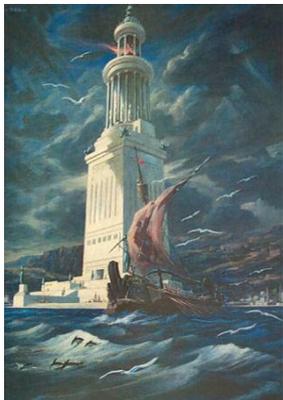


Accompagnement personnalisé : Méthode de Héron

Héron d'Alexandrie est un mathématicien grec du I^{er} siècle av J.C. Sa vie est peu connue si ce n'est qu'il travailla à la bibliothèque d'Alexandrie. Des copies de ses écrits ont été conservées et ses travaux portent sur la mécanique, l'architecture, l'astronomie. En mathématiques, on connaît surtout la formule de Héron donnant l'aire d'un triangle en fonction de la longueur des côtés et du demi-périmètre et sa méthode d'approximation des racines carrées, déjà utilisée par les babyloniens.



Alexandrie, ville d'Egypte comptant plus de quatre millions d'habitants, fut fondée en -331 par Alexandre le grand et devint dans l'Antiquité le premier port d'Egypte, la capitale du pays, un grand centre de commerce et d'éducation universitaire et un des plus grands foyers culturels du bassin méditerranéen, centré sur la fameuse Bibliothèque qui fonda sa notoriété.

Voici cette méthode exposée dans son ouvrage *Les métriques* :

« Comme 720 n'a pas son côté rationnel, nous pouvons obtenir son côté avec une très petite différence comme il suit. Le carré immédiatement supérieur est 729 qui a 27 pour côté. Divisons 720 par 27. Cela donne $26\frac{2}{3}$. Ajoutons 27 faisant $53\frac{2}{3}$ dont nous prenons la moitié ou $26\frac{1}{3}$. Le côté de 720 est donc très approximativement $26\frac{1}{3}$. En effet si nous multiplions $26\frac{1}{3}$ par lui-même, le produit est $720\frac{1}{36}$, si bien que la différence est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons avoir une différence plus petite que $\frac{1}{36}$, nous prendrons $720\frac{1}{36}$ au lieu de 720, et en procédant de même nous trouverons que la différence est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$. »

1. a) La phrase : « **Comme 720 n'a pas son côté rationnel, nous pouvons obtenir son côté avec une très petite différence comme il suit.** » indique le but suivi par Héron.

A la lecture du texte, quel est cet objectif ?

- b) Qu'entend-il par " très petite différence " ?
2. Quelle suite de calculs permet d'obtenir $720\frac{1}{36}$?
3. Quelle phrase du texte sous-entend l'utilisation d'un raisonnement par récurrence ?
On note x_0 la valeur 27 et x_1 la valeur $26\frac{1}{3}$.
4. Déterminer la valeur x_2 obtenue en reprenant le raisonnement du texte avec x_1 à la place de 27.
5. Vérifier à la calculatrice que les valeurs x_0 , x_1 et x_2 sont des valeurs approchées de plus en plus précises de $\sqrt{720}$.

On définit de cette manière une suite définie par la relation de récurrence suivante :

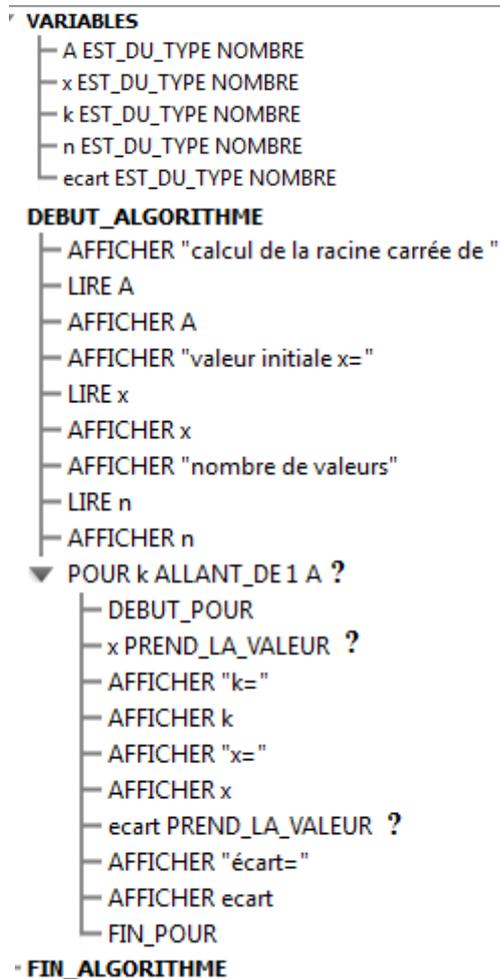
$$\begin{cases} x_0 = 27 \\ \text{pour tout entier naturel } n, x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{720}{x_n}}{2} \end{cases}$$

6. Montrer que cette suite est décroissante et minorée par 0. Que peut on en déduire ?

7. Résoudre l'équation $l = \frac{l + \frac{720}{l}}{2}$.

On admettra que la suite (x_n) est convergente vers $\sqrt{720}$.

8. Définir par récurrence une suite permettant d'approcher $\sqrt{2}$.
9. Compléter l'algorithme suivant effectué sous algoBox et permettant de déterminer les n premiers termes de la suite ainsi que les écarts entre la valeur "théorique" de $\sqrt{2}$ et celle calculée par l'algorithme (3 parties à compléter)



[AlgoBoxWin32\algobox.exe](#)