LES ALGEBRISTES ITALIENS DE LA RENAISSANCE ET L'INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES

I. PRELIMINAIRE : PROBLEMES DU SECOND DEGRE

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 10x + 20 = 0$.

2) Déterminer deux nombres réels *x* et *y* tels que leur somme vaut 10 et leur produit vaut 20.

3) Déterminer deux nombres réels *x* et *y* tels que leur somme vaut 10 et leur produit vaut 40.

II. L'AUDACE DE CARDAN

Jérôme Cardan (Girolamo Cardano) (né à Pavie en 1501 – mort à Rome 1576) est un mathématicien italien qui cherche à résoudre les équations polynomiales de degré 3 (à son époque la résolution des équations de degré 2 est bien connue). En 1545, Cardan publie *Ars Magna*, dans lequel il résout toutes les équations du 3$^{\text{ème}}$ degré ainsi que celle du 4$^{\text{ème}}$ degré. Son principe consiste à ramener les problèmes du troisième degré à des problèmes du second degré ; ce faisant, on trouve dans son œuvre, un paragraphe bien étonnant. Le voici dans sa version originale et dans une traduction en français :

REGVLA II.

Secundum genus positionis falsæ, est per radicem m̃. Et dabo exemplum, si quis dicat, diuide 10. in duas partes, ex quarum vnius in reliquam ductu, producatur 30. aut 40. manifestum est quad casus seu quæstio est impossibilis, sic tamen operabimur, diuidemus 10. per æqualia, & fiet eius medietas 5. duc in se fit 25. auferes ex 25. ipsum producendum, vtpote 40. vt docui te, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet residuum m̃. 15. cuius ℞. addita & detracta à 5. ostendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40. erunt igitur hæ, 5. p̃. ℞. m̃. 15. & 5. m̃. ℞. m̃. 15.

REGLE II

Le second genre de position fausse est pour les racines $\tilde{\text{m}}.$; et je donne un exemple : si l'on te dit, partage 10 en deux parties dont le produit fasse 30 ou 40, il est évident que ce cas ou ce problème est impossible, nous procèderons cependant ainsi : nous partagerons 10 en deux parties égales, et la moitié fera 5, multiplie la par elle-même, cela donne 25 ; de 25 tu retrancheras le produit lui-même, c'est-à-dire 40, et comme je te l'ai enseigné dans le chapitre sur les opérations, au sixième livre, il restera $\tilde{\text{m}}.15$ dont la racine carrée respectivement ajoutée et retranchée à 5 fait voir les parties qui multipliées l'une par l'autre font 40, celles-ci seront donc $5.\,\tilde{\text{p}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$ et $5.\,\tilde{\text{m}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$.

1) Dans l'énoncé de sa règle II, à quel problème Cardan s'intéresse-t-il ? A quelle équation (écrite dans le langage algébrique moderne) cela le conduit-il à résoudre ?

2) Sachant que les symboles $\tilde{\text{m}}.$ et $\tilde{\text{p}}.$ utilisés par Cardan signifient respectivement « moins » et « plus » et que le symbole $R_x.$ signifie « racine carrée de », écrire avec les notations modernes les solutions qu'il propose au problème. Qu'y a-t-il d'étonnant ?

3) Écrire les étapes de l'algorithme de Cardan permettant d'obtenir les solutions et vérifier qu'elles correspondent à la résolution d'une équation du second degré.

3) Conscient de l'effort qu'il demande à ses lecteurs, Cardan propose une démonstration dans laquelle il écrit en substance : « mais, comme le reste est moins [que zéro], tu imagineras $\tilde{\text{m}}.15$, qui est la différence de 25 avec le quadruple de 10, que tu dois ajouter et retrancher de 5, tu auras ce qui était cherché, à savoir $5.\,\tilde{\text{p}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$ et $5.\,\tilde{\text{m}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$. Fais le produit de $5.\,\tilde{\text{p}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$ par $5.\,\tilde{\text{m}}\,R_x.\tilde{\text{m}}.15$, une fois passés les supplices, tu trouveras $25.\tilde{\text{m}}.\tilde{\text{m}}.15$, ce qui est $\tilde{\text{p}}.15$, et donc ce produit est 40. […] cette quantité, qui est vraiment sophistiquée, parce qu'à travers elle l'on ne peut poursuivre les travaux, comme avec les purs moins et les autres … »

a) Comment Cardan conçoit-il les nouveaux « objets » mathématiques dont il parle ? Quelle est leur utilité ? Répondre en citant le texte.

b) Vérifier, comme Cardan le suggère, que les deux nombres originaux qu'il propose sont bien solutions du problème initial qu'il devait résoudre.

III. LA NOTATION D'EULER

À la suite des travaux des algébristes italiens (comme Cardan), les mathématiciens vont conserver, pendant plus de deux siècles, des notations qui reviennent aujourd'hui à écrire un nombre négatif sous un radical de racine carrée. C'est Euler (mathématicien suisse, 1707 – 1783) qui met en évidence le problème relatif aux notations utilisées pour les racines carrées de nombres négatifs dans un texte datant de 1774. Tout nombre réel négatif a pouvant s'écrire sous la forme $a=-1\times|a|$, Euler tente, de façon analogue, d'exprimer la racine carrée de tout nombre négatif à l'aide de $\sqrt{-1}$. Comme il l'écrit lui-même : « *ce qu'il y a d'impossible dans une quantité imaginaire, peut toujours se réduire à* $\sqrt{-1}$ ». Pour cela, il s'appuie sur les règles habituelles sur les racines carrées.

1) En utilisant la formule $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$, écrire en fonction de $\sqrt{-1}$, les nombres $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$ et $\sqrt{-16}$, comme le fait Euler dans son texte.

2) Grâce à cette même règle, quelle valeur Euler donne-t-il à $\sqrt{-2}\times\sqrt{-3}$? Et à $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$?

3) Après avoir exprimé la racine carrée de tout nombre négatif avec $\sqrt{-1}$, Euler s'aperçoit d'une contradiction dans cette notation.

Quelle doit être la valeur de $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$? En particulier, quelle devrait être la valeur de $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}$? Quelle est alors la fameuse contradiction contenue dans le symbole $\sqrt{-1}$?

Euler propose donc d'abandonner la notation $\sqrt{-1}$ et de la remplacer par la lettre i, lettre initiale du mot « imaginaire ». Ainsi, cette notation représente la quantité non réelle qui, élevée au carré, vaut –1. Dès lors, on utilisera cette notation et on réservera la racine carrée aux nombres réels positifs.

4) À l'aide de la nouvelle notation i, écrire le nombre dont le carré est –4, –16, –81, –15 et –5.

5) Reprenons l'équation du second degré résolue par Cardan, à savoir : $x^2-10x+40=0$ et « imaginons » que l'on puisse la résoudre comme celles qui ont des solutions réelles :

a) Calculer son discriminant Δ et montrer que $\Delta=\left(2i\sqrt{15}\right)^2$.

b) Écrire en fonction de i les solutions de l'équation et vérifier que ce sont celles proposées par Cardan.

IV. RESOLUTION DES EQUATIONS DU SECOND DEGRE

1) Vérifier que l'équation $x^2+9=0$ n'a pas de solution réelle. Quelles sont ses solutions en fonction de i ?

2) Vérifier que l'équation $x^2-4x+5=0$ n'a pas de solution réelle. Montrer que l'équation $x^2-4x+5=0$ équivaut à $(x-2)^2=i^2$. En déduire les deux solutions de cette équation en fonction de i (on les écrira sous la forme $a+bi$ où a et b sont deux nombres réels).

3) Il semble qu'en généralisant ce procédé, toute équation du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ où $a\neq 0$ pourrait être résolue.

a) Montrer, par mise sous forme canonique, que $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right)=0$ puis que $ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$

où Δ désigne le discriminant b^2-4ac.

b) Lorsque $\Delta<0$, justifier que l'on peut écrire $\Delta=\left(i\sqrt{|\Delta|}\right)^2$ et ensuite que :

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2.$$

c) En déduire deux solutions en fonction de i et constater l'analogie des formules donnant les solutions dans le cas réel.

4) Résoudre l'équation $3x^2+2x+1=0$ en calculant le discriminant et en utilisant les formules précédentes. Vérifier que les solutions peuvent s'écrire sous la forme $a+bi$ où a et b sont deux nombres réels.

V. UN NOUVEL ENSEMBLE DE NOMBRES

Dans la partie précédente, on a vu que toutes les équations du second degré n'ayant pas de solutions réelles ont deux solutions de la forme $a+bi$ où *a* et *b* sont deux nombres réels et *i* est un nombre tel que $i \notin \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$.

On va alors s'intéresser à l'ensemble des nombres de la forme $a+bi$ où *a* et *b* sont deux nombres réels, appelés **nombres complexes**. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Ainsi, l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ (lorsque $b = 0$) et permet de résoudre toutes les équations du second degré. En revanche, dans cet ensemble, le carré d'un nombre peut être négatif !

On remarquera (si cela n'est pas déjà fait !) que la somme, la différence, le produit et le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel, et qu'il en est de même pour les nombres réels. En revanche, si la somme, le produit de deux entiers relatifs est un entier relatif, le quotient de deux entiers relatifs n'est pas forcément un entier. Cette propriété remarquable de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}$ se résume en disant que ces deux ensembles de nombres sont des corps. Qu'en est-il de l'ensemble $\mathbb{C}$?

a) Soit $z = 6-2i$ et $z' = -1+i$. Calculer $z+z'$, $z-z'$ et zz'; vérifier que les résultats peuvent s'écrire sous la forme la forme $a+bi$ avec *a* et *b* réels.

b) Plus généralement, montrer que la somme, la différence et le produit de deux nombres complexes *z* et z' peuvent s'écrire sous la forme la forme $a+bi$ avec *a* et *b* réels.

c) Soit $z = 4+5i$. On appelle **conjugué** de *z* le nombre complexe $\overline{z} = 4-5i$. Calculer $z\overline{z}$ et vérifier que ce produit est un réel positif. En utilisant le conjugué, écrire l'inverse de *z* sans *i* au dénominateur.

d) Montrer plus généralement que le produit d'un nombre complexe et de son conjugué est un nombre réel positif. En déduire que l'inverse d'un nombre complexe non nul peut s'écrire sous la forme $a+bi$ avec *a* et *b* réels.

e) Le quotient de deux nombres complexes peut-il toujours s'écrire sous la forme $a+bi$ avec *a* et *b* réels ?

VI. L'ALGEBRE DE BOMBELLI

Raffaele Bombelli (Bologne 1526 – Rome 1572 env.) est un ingénieur et mathématicien italien de la Renaissance. Il a le projet, dès 1557, d'écrire un livre d'algèbre accessible au plus grand nombre dans lequel les connaissances algébriques de l'époque seraient consignées de façon systématique et logique. En 1572, les trois premiers livres de son *Algebra* sont publiés.

A l'époque où Bombelli écrit, la méthode de Cardan pour résoudre des équations de degré 3 est connue. Dans le cas de l'équation « *le cube égal aux quantités et au nombre* », c'est-à-dire de l'équation de la forme $x^3 = px+q$, la résolution de Cardan conduit à la formule :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}} .$$

Mais cette formule oblige à écrire la racine carrée d'une différence, différence qui peut être négative (c'est le cas irréductible, comme l'appelle Cardan). Dans l'ouvrage de Bombelli, c'est son habileté à utiliser les racines carrées de nombres négatifs qui retient l'attention (il y énonce des règles de calcul). Voici un extrait traduit de l'italien :

« J'ai trouvé une autre sorte de racines très différente des autres, laquelle paraît au chapitre du cube égal aux quantités et au nombre, quand le cube du tiers des quantités est supérieur au carré de la moitié du nombre comme cela sera démontré dans ce chapitre, laquelle sorte de racine carrée a, dans son algorithme, une autre opération que les autres, et un nom différent ; parce que lorsque le cube du tiers des quantités est supérieur au carré de la moitié du nombre, leur excès ne peut appelé ni plus ni moins, cependant je l'appellerai plus de moins (*più di meno*) quand il faudra l'ajouter et quand il faudra le retrancher, je l'appellerai moins de moins (*meno di meno*) ; […] Celle-ci paraîtra à beaucoup plutôt sophistiquée que réelle, et j'ai eu cette même opinion, jusqu'à ce que j'aie trouvé sa démonstration en lignes et d'abord, je traiterai de la multiplication, en posant la règle du plus et du moins (*la regola del più & meno*) :

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

plus par plus de moins donne plus de moins (*più via più di meno fa più di meno*),… »

1) Dans quelle situation Bombelli a-t-il trouvé son *autre sorte de racine* ?

2) En fait, avec la notation d'Euler, le *più di meno* (lorsqu'il faut ajouter) correspond à l'opération $+i$ et le *meno di meno* (lorsqu'il faut soustraire) correspond à $-i$. En utilisant *la regola del più & meno* donnée par Bombelli, compléter la table ci-contre et faire correspondre chacune des multiplications aux phrases.

×	$+i$	$-i$
+1		
–1		
$+i$		
$-i$		

3) Voici comment Bombelli énonce les règles de sommation des *più di meno* et *meno di meno* (sachant que p. di m. abrège *più di meno*, etc.) :

Sommare di p. di m. & m. di m.

Lo sommare di p. di m. e m. di m. hà le sue regole (come nell'altre) le quali si poneranno con la breuità solita.

Più con p. di m. non si può sommare, se non dire piu p. di m. come se si dicesse (sommisi p. 5. con p. di m. 8.) fa 5. p. di m. 8, & il medesimo del m. di m.

Più di m. con p. di m. si somma, e fà p. di m.

Più di m. con m. di m. si caua, e lo restante è del nome della maggior quantità.

Men di m. con m. di m. si somma, & fa m. di m.

Sommisi p. di m. 8. con m. di m. 5. fa p. di m. 3.
Sommisi p. di m. 15. con m. di m. 28. fa m. di m. 13.
Sommisi m. di m. 12. con m. di m. 6. fa m. di m. 18.
Sommisi p. di m. 6. con p. di m. 15. fa p. di m. 21.

Et essendo chiara per li essempij proposti la operatione, uerrò alle R c. L. doue stà la importanza, & doue il caso può intrauenire.

Par exemple :
sommer p. di m. 8. avec m. di m. 5. donne p. di m. 3. Autrement dit, on écrirait aujourd'hui : $(+8i)+(-5i)=+3i$.
Réécrire de façon similaire les autres exemples donnés dans le texte.

4) De quels nombres Bombelli calcule-t-il le cube dans chacun des deux exemples suivants ? Réécrire et vérifier ses multiplications en utilisant la notation *i*.

3. p. di m. 4.
3. p. di m. 4.
9. m. 16. p. di m. 12. p. di m. 12.
m. 7. p. di m. 24.
3. p. di m. 4.
m. 21. m. 96. p. di m. 72. m. di m. 28.
m. 117. p. di m. 44.

m. di m. 1. m. 1.
m. di m. 1. m. 1.
m. 1. p. di m. 1. p. di m. 1. p. 1.
p. di m. 2.
m. di m. 1. m. 1.
Cubato 2. m. di m. 2.

5) Bombelli s'intéresse à l'équation $x^3 = 15x + 4$ qu'il note, avec ses propres symboles, $\overset{\underset{\smile}{3}}{1} = 15\overset{\underset{\smile}{1}}{}$ p. 4. Pour cela, il applique la formule de Cardan qu'il résume par le petit algorithme ci-contre. Vérifier que cette équation correspond au cas irréductible de Cardan. Traduire l'algorithme de Bombelli avec les notations modernes et indiquer quelle solution il trouve à l'équation.

Quels commentaires suggèrent ses calculs et sa solution ?

Remarques : les abréviations *R.q.* et *R.c.L…* signifient « racine quadratique de … » et « racine cubique de … », le mot « *lato* » (étymologiquement *côté*) est la racine cubique.

$\overset{\underset{\smile}{3}}{1}$. Eguale à 15. $\overset{\underset{\smile}{1}}{}$ p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q. p. di m. 121.
2 2
Somma R.q. p. di m. 121. Resta R.q. p. di m. 121.
R.c.L 2. p. di m. 11. ⅃ R.c.L. 2. m. di m. 11.
Lato 2. p. di m. 1. 2. m. di m. 1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.