Introduire la dérivée en 1re S comme réponse à une question !

Anne Crouzier
IREM de Clermont-Ferrand

Sommaire

I. Introduction

Nous présentons dans ce qui suit une façon d'introduire le nombre dérivé d'une fonction en un point, en 1re S, comme une réponse à une question qui en motive l'étude[1]. Nous utilisons comme le suggère les programmes des zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran d'une calculatrice mais nous initions cette démarche par une question dont le sens est d'essayer de généraliser à une fonction quelconque, le coefficient directeur d'une fonction affine, outil qui permet d'en déterminer le sens de variation.

1.1.Extrait des programmes :

Contenus	Modalités de mise en oeuvre	Commentaires
Dérivation Approche cinématique ou graphique du concept de nombre dérivé d'une fonction en point Nombre dérivé d'une fonction en un point: définition comme limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ quand *h* tend vers 0	Plusieurs démarches sont possibles: passage de la vitesse moyenne à la vitesse instantanée pour des mouvements rectilignes suivant des lois horaires élémentaires (trinôme du second degré dans un premier temps); zooms successifs sur une représentation graphique obtenue à l'écran de la calculatrice.	On ne donnera pas de définition formelle de la notion de limite. Le vocabulaire et la notation relatifs aux limites seront introduits sur des exemples puis utilisés de façon intuitive. Dans les cas usuels, la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'obtient, après transformation d'écriture, en invoquant des arguments très proches de l'intuition. On ne soulèvera aucune difficulté à leur propos et on admettra tous les résultats u t i l e s .

.

Les programmes proposent deux approches possibles, cinématique ou graphique. Chacune d'entre elle, répond-t-elle à une question, et si oui laquelle ?

1.2 .L'approche cinématique : il y a bien sûr une question. C'est se demander comment on peut obtenir la vitesse instantanée d'un mobile ou d'un véhicule connaissant la loi horaire, c'est à dire la fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps. On peut supposer que cette question fait bien sens pour les élèves et la façon d'y répondre est bien de partir de vitesses moyennes et de "passer à la limite". Mais, ceci étant fait, on peut alors se demander, pour une autre fonction, pourquoi en calculer la dérivée en un point ! Pourquoi faire ? On peut, en utilisant une situation que l'on trouve dans les programmes d'accompagnement, étudier une fonction donnant la distance de freinage en fonction de la vitesse initiale d'un véhicule. Mais alors que serait l'équivalent de la vitesse instantanée ? Une petite analyse dimensionnelle nous conduit à dire que c'est un temps, mais cela reste difficilement interprétable physiquement. Il nous paraît donc difficile de généraliser l'intérêt du nombre dérivé par cette approche.

---

[1] Le travail réalisé l'a été dans le cadre d'une recherche initiée par la Commission inter-IREM Didactique et financée par l'INRP et dont le sigle est Ampères (Apprentissages mathématiques par des parcours d'étude et de recherche dans l'enseignement secondaire). On peut en trouver le descriptif sur le site de l'INRP Educmath

1.3. L'approche graphique avec des zooms successifs **:** Techniquement, tout à fait intéressant pour faire apparaître la tangente, sa pente, mais quelle est la question pouvant motiver que l'on s'intéresse à cela? La question que nous allons introduire conduit à s'intéresser à ce qui se passe au voisinage d'un point et ainsi à exécuter de tels zooms.

1.4. Une autre approche : la vitesse de variation d'une fonction en un point

Il fallait donc trouver une **question ayant une portée suffisamment générique** pour justifier que l'on s'intéresse au nombre dérivé.
On peut en trouver une au sein des mathématiques. On sait pour une fonction affine, représentée graphiquement par une droite, en définir le coefficient directeur ; celui-ci donne une information sur la façon dont la fonction croît ou décroît. Pourrait-on faire la même chose avec une fonction quelconque. Non globalement, mais alors on peut se demander si on pourrait trouver un moyen de mesurer **en chaque point** la façon dont la fonction croît ou décroît. On s'intéresse ainsi à la **vitesse de croissance d'une fonction**. Lorsqu'on regarde la représentation graphique d'une fonction, on peut voir son sens de variation mais aussi voir qu'en certains endroits du graphe, elle "croît plus vite qu'en d'autres".
Au passage, notons que si le "nombre dérivé" est interprété ainsi, alors il va de soi que si une fonction est à dérivée positive sur un intervalle alors elle est croissante sur cet intervalle.

En seconde, les élèves n'ont pas de difficulté à associer un lien entre la représentation graphique d'une fonction, son allure et la croissance ou la décroissance de celle-ci en certains intervalles de son domaine de définition. En revanche, la détermination analytique du sens de variation d'une fonction par comparaison des images de deux réels est vite fastidieux, techniquement difficile pour des élèves qui ont du mal à maîtriser le calcul algébrique requis pour une telle détermination. Le calcul de dérivées va fournir un nouvel outillage qui va se substituer à celui fourni mais peu travaillé des techniques abordées en seconde.

II L'étude en classe

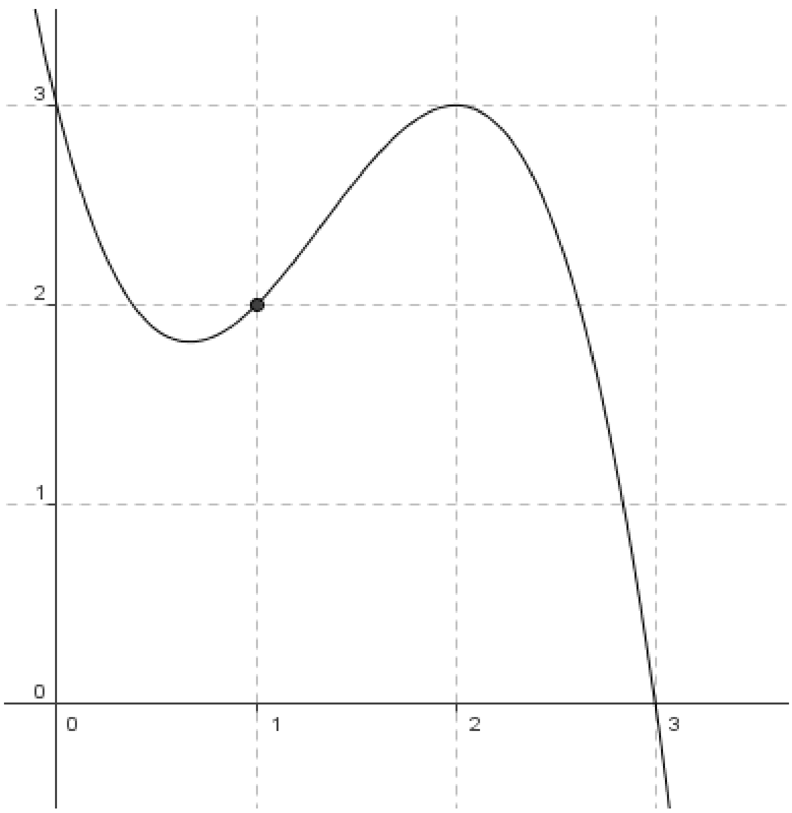
2. 1 Dans un premier temps, nous avons fait le point sur ce que les élèves savent du coefficient directeur d'une droite passant par deux points A et B.
Les premiers souvenirs sont : quand le coefficient est positif, « ça monte », et s'il est négatif, « ça descend » et même s'il est nul, « c'est constant ».
En cherchant comment calculer ce coefficient, la première formulation donnée est $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$,
puis une autre $\frac{\textit{accroissement des ordonnées}}{\textit{accroissement des abscisses}}$. Cela montre bien le lien étroit (ou peut-être la confusion) qu'il y a pour les élèves entre une droite et la fonction affine qu'elle représente.
Nous sommes alors amenés à rappeler la distinction entre l'aspect graphique (droite, monte, descend, coefficient directeur ou pente), et l'aspect analytique (fonction, croissante, décroissante, taux de variation).
En particulier, nous avons fait le point sur le taux de variation d'une fonction affine, lequel est constant et égal au coefficient directeur. S'il est positif, la fonction est croissante, s'il est négatif la fonction est décroissante. Si deux fonctions affines f_1 et f_2 ont pour taux de variation a_1 et a_2 avec $0<a_1<a_2$ alors les deux fonctions sont croissantes mais la seconde de taux de variation a_2 croît plus vite que la première.

Ceci fait, nous demandons à la classe si l'on peut définir pour une courbe quelconque représentant une fonction, quelque chose qui ressemblerait au coefficient directeur d'une droite représentant une fonction affine ?
La réponse fuse rapidement et tous les élèves y contribuent volontiers tant elle est évidente :
On ne peut pas avoir un coefficient directeur, cela change tout le temps ! Ou alors il en faudrait !
En s'appuyant sur le fait que les élèves perçoivent bien que cela change tout le temps, comme ils le disent, nous leur proposons alors d'examiner ce qui se passe au voisinage d'un point, l'examen ayant pour but d'essayer de rendre compte, par un nombre, de quelle manière la fonction croît ou décroît en ce point. Nous proposons, reprenant alors ce qui est suggéré par les programmes, d'examiner à la loupe ce qui se passe en ce point, ce qui conduit à l'utilisation de zooms, lesquels amènent à identifier un morceau de la courbe au voisinage du point à un morceau de droite : le coefficient directeur de cette dernière peut apparaître comme le nombre cherché.

2.2 Etapes de l'étude : Nous détaillons ci-après la façon dont nous avons mené l'étude après le rappel sur les fonctions affines.

1. Courbe représentative de la fonction f définie sur R par f(x) = $-x^3 + 4x^2 - 4x + 3$

<table>
<tr>
<td>On souhaite étudier la courbe au « voisinage » du point A de coordonnées (1, f(1))

Peut-on au voisinage de ce point définir quelque chose qui ressemble au coefficient directeur d'une droite et qui rende compte de la variation de f en ce point ?</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

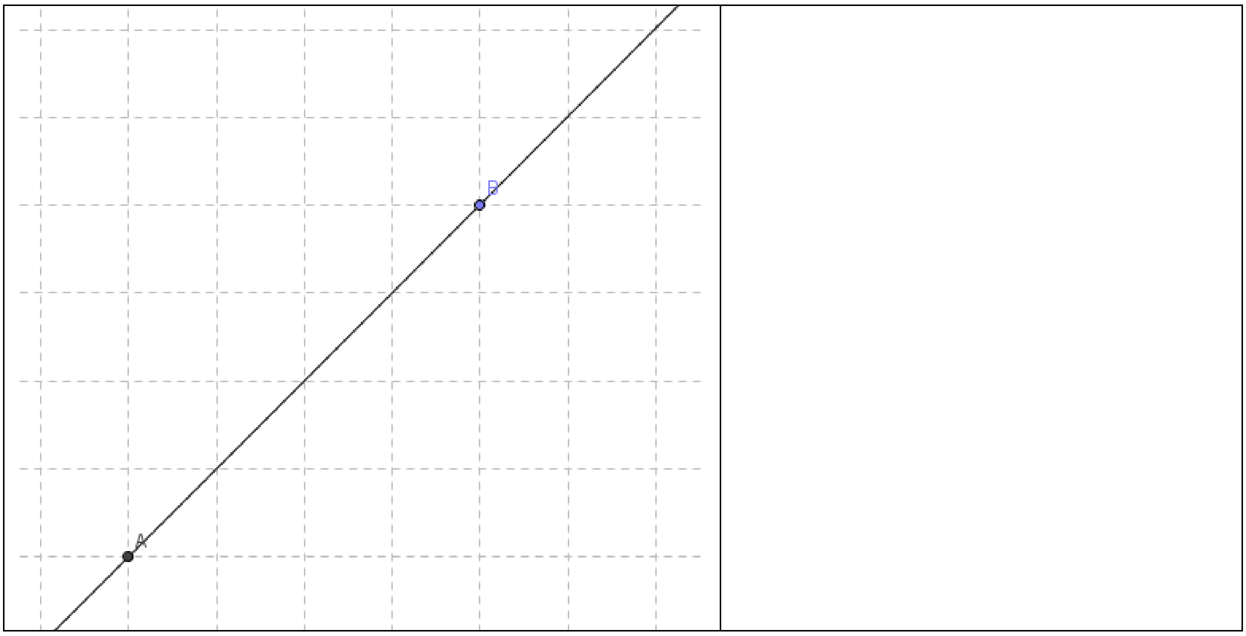
On commence par utiliser la calculatrice et zoomer autour du point. Au bout d'un moment on ne voit qu'une droite.
On peut en calculer le coefficient directeur.

Remarques :
Beaucoup de problèmes techniques :

- Les élèves savent mal utiliser les fonctions de la calculatrice : zoom et trace. En particulier l'usage de la fonction « zoom boîte » qui modifie l'échelle sur les axes : une dilatation excessive d'un axe des abscisses tend à rendre les courbes « horizontales » ou « verticales »
- On perd le point A sur la calculatrice (une solution est de tracer la droite d'équation y = 1 et A se trouve à l'intersection de la droite et de la courbe)
- Si on calcule les coefficients directeurs à partir de deux points quelconques de la « droite » visible à l'écran, on peut obtenir des coefficients directeurs très variés. Il faut penser à calculer ce coefficient directeur entre le point A et un point dont les coordonnées sont lues grâce à la fonction trace.

Une représentation graphique plus précise est possible avec Geogebra par exemple

On lit que le coefficient directeur de cette droite est égal à 1.



Notons que la calculatrice présente quelques avantage sur un LGD comme Geogebra car pour cette activité, les élèves ne peuvent pas utiliser le quadrillage, lequel donne un moyen technique rapide pour calculer le coefficient directeur, mais ils sont obligés de revenir pour son calcul à la définition du taux de variation de la fonction entre 1 et x.

Quelque soit la méthode utilisée, on établit une équation de la « droite » représentée à l'écran : y = x + 1.

2. Etude de la droite obtenue après avoir zoomé en un point.

On trace la droite d'équation y = x + 1, puis on « dé-zoom ».
Que peut-on observer ?

- A la calculatrice, la position « tangente » de la droite tracée est bien visible.
- Avec un LGD, on peut visualiser le point M qui a servi à calculer le coefficient directeur de la droite, ce qui donne une vision complémentaire du phénomène ; en effet :
    1. La droite tracée se confond avec la droite (AM)
    2. Elle semble obtenue avec M relativement éloignée de A, mais le fait de « dé-zoomer » rapproche visuellement M de A.
    3. On a donc obtenu la droite en prenant le point M très proche de A (plus on a zoomé, plus on s'est rapproché de A)
    4. Le coefficient directeur obtenu est donc la valeur vers laquelle tend le coefficient directeur de la droite (AM) lorsque M tend vers A.
    5. Cela illustre donc la notion de limite du taux de variation de la fonction entre 1 et x lorsque x tend vers 1.

On peut refaire la même étude au point d'abscisse 2, pour trouver une tangente horizontale

3. Arriver à la définition du nombre dérivé :

Lorsqu'en « zoomant », on obtient une droite qui se stabilise, le coefficient directeur de cette droite est une caractéristique de la courbe au point A d'abscisse a qui apporte une réponse à la question posée initialement.
Le terme "coefficient directeur" étant lié à une droite, et le taux de variation entre deux réels n'étant constant que pour une fonction affine, on introduit une nouvelle dénomination, et on appelle ce nombre "le nombre dérivé de la fonction f en a", où a est l'abscisse du point A.
Sa définition graphique est d'être le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe représentative de f.
Cette définition graphique ne suffisant pas, le nombre dérivé en a est défini analytiquement comme étant limite du taux de variation de la fonction entre a et x lorsque x tend vers a.

Il est possible de déterminer expérimentalement ainsi le nombre dérivé de certaines fonctions de références en des valeurs données. Les résultats obtenus par exemple pour la fonction "carré" permettent même aux élèves de conjecturer l'expression de la fonction dérivée.

Cette approche crée un lien très fort entre le nombre dérivé, le coefficient directeur de la tangente et la notion d'approximation affine. A tel point que certains élèves trouvent que l'on se répète lorsqu'on présente l'approximation affine par la tangente, d'une fonction au voisinage de a.

En conclusion :

L’utilisation de la fonction zoom, permet d’approcher la nature d’une limite.
Un élève qui avait compris le fonctionnement discontinu d’une calculatrice graphique (calcul effectif de certains points de la courbe uniquement), pensait que s’il zoomait assez, il finirait par obtenir des points isolés et pourrait considérer la droite passant par deux points. Comme on garde un graphique continu, on voit, lorsqu’on « dé-zoom » le M le point d’abscisse x utilisé pour faire le calcul du taux de variation, se rapprocher de A, au point de se confondre avec A. Mais on sait que M est différent de A (le changement d’échelle ne change rien à ce fait) et c’est grâce à cela que l’on a pu calculer le coefficient directeur de la droite (AM).

On insiste beaucoup sur les droites et les coefficients directeurs en seconde, sur leur lien avec le sens de variation des fonctions affines, l’inclinaison plus ou moins forte de la droite. Du point de vue graphique, le nombre dérivé a le même rôle qu’un coefficient directeur, mais ce n’est valable que localement. Cette restriction est parfaitement comprise par les élèves, puisque dès le départ ils avaient perçu l’impossibilité d’une réponse globale. Elle permet de plus d’introduire l’étude locale d’une fonction qui est une notion importante et délicate en analyse.