Livret de liaison
Seconde - Spécialité mathématiques, première générale

I.R.E.M. de Clermont-Ferrand
Groupe Aurillac - Lycée

Juin 2021

Table des matières

Introduction

Pour pouvoir faire un cursus scientifique avec des mathématiques, il est nécessaire de maîtriser des notions de base, mais aussi de développer une motivation pour la recherche d'exercices dont la solution n'est pas trouvée en 5 minutes.
Ce livret de liaison de la seconde à la spécialité de première générale propose des exercices pour s'entraîner et dont la maîtrise technique est nécessaire pour aborder la classe de première en toute sérénité (la technique sera bien sûr revue rapidement en classe avec le professeur).
Il contient aussi des problèmes à chercher, ... comme un challenge ! La résolution de ces problèmes, un peu plus difficiles, signalés par un ou plusieurs symboles ✍, ne fait appel qu'à des connaissances de la classe de seconde.
La maîtrise de l'utilisation de la calculatrice et de logiciels (tableurs, géométrie dynamique, programmation, ...) est un objectif à atteindre le plus rapidement possible .
Bon courage à tous,
Les maths, c'est tout un monde à explorer ...

Les professeurs de mathématiques, auteurs du livret.

Il n'est pas prévu de compléter les exercices directement sur le livret (les espaces laissés dans certains exercices sont volontairement insuffisants). Il faut travailler avec un cahier de recherche.

1 Symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$

Prérequis

Définition 1 : Les ensembles A et B sont deux **sous ensembles** de l'ensemble E si, et seulement si, tous les éléments de A et de B sont dans l'ensemble E.
On note : $A \subset E$ et $B \subset E$ et on lit : "*A est inclus dans E*".
Remarque : la notation est différente lorsqu'on s'intéresse à un élément x de cet ensemble : on emploie le symbole $\in$ qui se lit "appartient à".
Traduction : si $x \in A$, alors $x \in E$.

Définition 2 : L'ensemble noté $\overline{A}$ est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A, on l'appelle le **complémentaire de A dans l'ensemble E** et on lit : "A barre".
Traduction : soit x un élément de E, si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A}$.

Définitions 3 :
$A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B ou aux deux à la fois. On l'appelle **la réunion des deux ensembles** A et B et on lit : "A union B".
$A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B (à la fois). On l'appelle **l'intersection des deux ensembles** A et B et on lit : "A inter B".
Traduction : Soit x un élément de E, si $x \in A$ **et** $x \in B$ alors $x \in A \cap B$. Soit x un élément de E, si $x \in A$ **ou** $x \in B$ alors $x \in A \cup B$.
Remarque : si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que les deux ensembles sont disjoints.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne le nombre de chômeurs (en milliers) selon le sexe et l'âge en 2012 (source : INSEE, enquête Emploi 2012).

	Femmes (F)	**Hommes (H)**	**Ensemble**
15 ans ou plus (C)	1 361	1 451	2 811
15-24 ans (C_1)	297	361	658
25-49 ans (C_2)	812	816	1 628
50-64 ans (C_3)	250	272	522
65 ans ou plus (C_4)	2	2	4

Champ : France métropolitaine, population des ménages, personnes de 15 ans ou plus (âge courant).

1. Combien d'éléments possède l'ensemble F ?
2. Concrètement, dans cet exemple, l'ensemble de tous les éléments étudiés est l'ensemble de tous les ....
   Quel est le nom donné à cet ensemble dans le tableau ? Combien d'éléments possède-t-il ?
   Quel symbole peut-on mettre entre l'ensemble F et l'ensemble C ?
3. $H \cap C_2$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
4. $F \cup C_3$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
5. $\overline{F}$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
6. $\overline{C_1}$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?

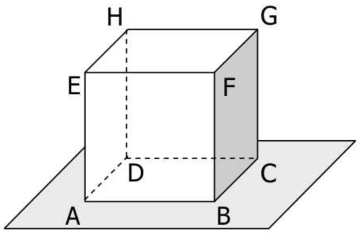
Exercice 2

Recopier et compléter les pointillés :

1. $3 \ldots \mathbb{N}$; $-3,1 \ldots \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \ldots \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \ldots \mathbb{Q}$.
2. Soit x un nombre compris entre 1 et 2, mais différent de 2, alors $x \ldots [1;2[$ et $[1;2[\ldots \mathbb{R}$.
3. $]1,1;1,2] \ldots [1;2] \iff$ si $1,1 < x < 1,2$ alors $1 < x < 2$.
4. Si $x \in [1;3[$ et $x \in [0;2[$, alors $x \in [1;3[\cap [0;2[$, donc $[1;3[\cap [0;2[= \ldots$.
5. Si $x \in [1;3[$ ou $x \in [0;2[$, alors $x \in [1;3[\cup [0;2[$, donc $[1;3[\cup [0;2[= \ldots$.
6. Les deux intervalles $[1;3]$ et $]4;+\infty[$ sont ....
7. L'ensemble de tous les nombres réels qui ne sont pas strictement supérieurs à 4 est l'intervalle ....
8. Soit x un nombre réel, si $x \notin [1;3[$, alors $x \in \ldots$. Le complémentaire de l'ensemble $[1;3[$ dans $\mathbb{R}$ est donc ....
9. Le complémentaire de l'ensemble des réels x tels que $x > -1$ est ....

Exercice 3

1. Soit (O, I, J) un repère du plan, D_1 la droite d'équation $y = 2x + 1$ et D_2 la droite d'équation $y = -x + 3$
   - **a.** Justifier que le point $A(-1;-1)$ appartient à D_1. On peut écrire : $A \dots D_1$.
   - **b.** De même $A \notin D_2$ car ....
   - **c.** Déterminer $D_1 \cap D_2$.
2. Dans l'espace, on considère le cube ci-dessous. Recopier et compléter les pointillés.



   - **a.** F ... (EGB).
   - **b.** (FG) ... (FBC).
   - **c.** (EHB) ∩ (ABD) = ...
   - **d.** (EHB) ∩ (FG) = ...
   - **e.** (HD) ∩ (ABC) = ...

2 Calcul numérique

Prérequis

- ☞ Maîtriser les règles de calcul sur les fractions, les puissances et les racines carrées.
- ☞ Connaître la définition de la valeur absolue.

Exercice 4

Simplifier au maximum l'écriture des nombres suivants :

1. $A = \frac{3}{5} - \frac{2}{10} \times \frac{7}{8}$
2. $B = 5 \times \frac{13}{20}$
3. $C = \frac{3 - \frac{4}{9}}{\frac{3}{7} - \frac{1}{4}}$
4. $D = \frac{\frac{2}{3} + \frac{5}{6}}{\frac{7}{2}}$
5. $E = \frac{5}{4} - \frac{7}{4} \times \frac{7}{8}$
6. $F = \frac{\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) \times 3}{2}$

Exercice 5

Effectuer les calculs suivants :

1. $A = 2^4 \times 2^{-3}$
2. $B = \frac{3^4}{3^{-7}}$
3. $C = \frac{(-4)^2}{(-4)^6}$
4. $D = \frac{5^{-2} \times 5^{-7}}{5^6}$
5. $E = \frac{(5 - 2 \times 3)^4}{(2-3)^5}$
6. $F = \frac{12 \times 10^4 \times 5 \times 10^6}{15 \times 10^3 \times 2 \times 10^2}$

Exercice 6

1. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$:

$$A = \sqrt{18} \qquad B = \sqrt{200} \qquad C = \sqrt{125} \qquad D = 3\sqrt{2} - 4\sqrt{8} + 2\sqrt{18} \qquad E = \sqrt{12} + 3\sqrt{3} - \sqrt{75}$$

2. Écrire le nombre $\frac{2}{\sqrt{6}}$ sans radical au dénominateur.

Exercice 7

1. Calculer et simplifier au maximum :

$$A = \left|\sqrt{2} - \sqrt{3}\right| \qquad B = |2 \times 3 - 7| \qquad C = |\pi - 3|$$

2. Compléter les pointillés :

$$\begin{array}{rcl} |x-3| \leqslant 2 & \Longleftrightarrow & x \in [1;\ldots] \\ |x-5| \leqslant 1 & \Longleftrightarrow & x \in [\ldots;\ldots] \\ |x+1| \leqslant 2 & \Longleftrightarrow & x \in [;\ldots] \end{array}$$

3. Résoudre les équations suivantes :

a. $|x-4| = 7$ *b.* $|x-2| = 0$ $|x+2| = 3$ *d.* $|x-5| = -1$

Exercice 8 ✍

1. Démontrer les égalités suivantes :

$$a.\ \frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{7} \qquad b.\ \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} \qquad c.\ \frac{1}{\sqrt{7}+1} = \frac{\sqrt{7}-1}{6}$$

2. Écrire les nombres suivants sans radical au dénominateur :

$$\mathrm{A} = \frac{3}{\sqrt{5}+1} \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Exercice 9 ✍

Simplifier au maximum l'écriture des nombres suivants :

$$\mathrm{A} = \left(2+\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2+\frac{3}{4}} - \frac{\frac{3}{7}-\frac{8}{9}}{\frac{8}{9}-\frac{3}{7}} \qquad \mathrm{B} = \cfrac{12}{9+\cfrac{8}{7+\cfrac{6}{5+\cfrac{4}{3+\cfrac{2}{1+1}}}}}$$

$$\mathrm{C} = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{10}\right)$$

3 Calcul littéral

Prérequis

- ☞ Maîtriser les identités remarquables, les priorités de développements.
- ☞ Repérer ou mettre en évidence un facteur commun pour factoriser.
- ☞ Mettre en évidence $a^2 - b^2$ pour factoriser.
- ☞ Réduire des fractions au même dénominateur.

Exercice 10

Développe les expressions suivantes :

Exemple guidé :

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(\dots x^2 - \dots + 1) - (10x - \dots + \dots - \dots)$

$A = 18x^2 - \dots + \dots - 10x + \dots - \dots + \dots$

$A = \dots$

À toi de jouer : $B = (2x-9)(3-2x) + 5(2x+1)^2$ $C = 4(x-6)^2 - 3(5x+3)(5x-3)$

Exercice 11

Factorise les expressions suivantes :

Exemple guidé :

$A = 6x + 3 + 4(2x+1)^2$

$A = \dots(2x+1) + 4(2x+1)^2$

$A = (2x+1)(\dots + 4(\dots))$

$A = (2x+1)(\dots + 8x + \dots)$

$A = (\dots)(\dots)$

À toi de jouer :

$B = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$

$C = (x^2-4) + (x+2)^2$

Exemple guidé :

$A = 36x^2 - (5x+1)^2$

$A = (\dots)^2 - (5x+1)^2$

$A = ((6x) + (\dots))((6x) + (\dots))$

$A = (6x\dots)(6x\dots)$

$A = (\dots)(\dots)$

À toi de jouer :

$B = (4x-3)^2 - 25x^2$

$C = 49 - (5x+2)^2$

Exercice 12

Écrire sous la forme d'une seule fraction :

Exemple guidé :

$A = 4 + \dfrac{3}{x+2}$ (cette expression existe si, et seulement si, $x+2 \neq \ldots$ (**valeur interdite pour A**))

$A = \dfrac{4 \times (\ldots + \ldots)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

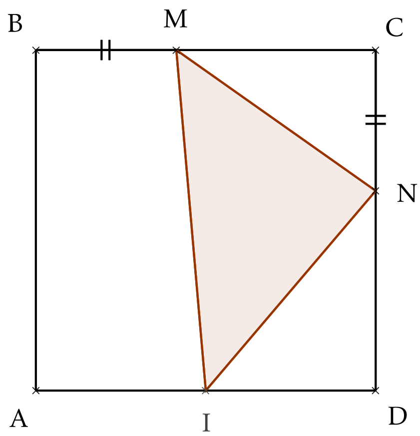
$A = \dfrac{\ldots + \ldots}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{\ldots + \ldots}{x+2}$

À toi de jouer : $B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5 \qquad C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$.

Exercice 13

ABCD est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de [AD].
M est un point de [BC] et N un point de [CD] tels que BM = CN = x.
Exprimer l'aire du triangle IMN en fonction de x.



4 Équations

Prérequis

- ☞ Maîtriser le développement et la factorisation d'une expression mathématique.
- ☞ Maîtriser les trois identités remarquables vues au collège que ce soit pour développer une expression ou la factoriser.
- ☞ Maîtriser les fonctions de calculs de la calculatrice. En particulier le calcul fractionnaire.

4.1 Équations du premier degré

Règle : On ne modifie pas une égalité en effectuant la même opération de chaque côté de cette égalité.
On procède de la manière suivante :

1. On commence par regrouper les quantités contenant des x d'un même côté de l'égalité.
2. Une fois que l'on a obtenu une équation de la forme $ax = b$ avec $a \neq 0$, il suffit de diviser chaque côté de l'égalité par a pour obtenir la valeur de x.

Un premier exemple résolu :

On cherche à résoudre l'équation
$2x - 3 = 7x + 5$

On retire $7x$ de chaque côté de l'égalité.

$$2x - 3 - 7x = \cancel{7x} + 5 - \cancel{7x}$$

$$-5x - 3 = 5$$

On ajoute 3 de chaque côté.

$$-5x - \cancel{3} + \cancel{3} = 5 + 3$$

$$-5x = 8$$

On calcule alors x en divisant chaque côté par -5.

$$\frac{\cancel{-5}x}{\cancel{-5}} = \frac{8}{-5}$$

$$x = -\frac{8}{5}$$

On écrit alors le résultat sous la forme

$$S = \left\{-\frac{8}{5}\right\}$$

NB : On peut remplacer l'écriture de la solution par la phrase :
La solution de l'équation est $-\frac{8}{5}$.

Un second exemple "presque" résolu :

On cherche à résoudre l'équation
$7 - 2x = -6x + 4$

On ajoute $6x$ de chaque côté de l'égalité.

$$7 - 2x + 6x = -6x + 4 \;\ldots\ldots$$

$$7 + 4x = 4$$

On retire 7 de chaque côté.

$$7 + 4x \;\ldots\ldots = 4 \;\ldots\ldots$$

$$4x = \;\ldots\ldots$$

On calcule alors x en divisant chaque côté par 4.

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{4}} = \frac{-3}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

On écrit alors le résultat sous la forme

$$S = \left\{-\frac{3}{4}\right\}$$

NB : On peut remplacer l'écriture de la solution par la phrase :
La solution de l'équation est $-\frac{3}{4}$.

Remarques :

- ☞ Bien sûr, il est possible de faire plusieurs étapes en même temps si on a bien compris la démarche.
- ☞ On peut aussi se rappeler que pour éliminer une opération, il faut utiliser l'opération inverse.
- ☞ Toujours donner un résultat exact. La calculatrice peut vous être utile ici.

Exercice 14

Résoudre les équations suivantes. On prendra soin d'écrire le résultat sous la forme la plus simple possible.

a) $2x + 6 = 7x - 5$ b) $-3x - 5 = 7x + 1$ c) $4x + 1 = -2x + 8$

d) $0{,}5x - 1{,}5 = 2x + 1$ e) $2{,}6x + 3 = -3 - x$ f) $4{,}5x + 1 = 3{,}5x - 2$

Exercice 15

Terminons avec quelques exemples "concrets" d'utilisation des équations.

1. Bob a obtenu 10 sur 20 au premier devoir de maths de Mr Squarepants qui compte avec un coefficient 2 et obtenu 15 sur 20 au devoir maison qui a suivi qui compte lui coefficient 1.
   Quelle note doit-il obtenir au prochain devoir surveillé (de coefficient 2) pour avoir 14 de moyenne ce trimestre ?
   a. Si on appelle x la note obtenue au dernier devoir.
   Montrer que l'énoncé revient à résoudre l'équation $2x + 2 \times 10 + 15 = 5 \times 14$.
   b. Résoudre l'équation et donner la note que doit avoir Bob.
2. Le périmètre d'un triangle isocèle mesure 87 cm. Sa base mesure 21 cm **de moins** que chacun des deux autres côtés.
   Sauras-tu calculer la longueur des trois côtés de ce triangle ? (*On pourra noter x la longueur d'un côté autre que la base*)
3. Certains historiens racontent que sur la tombe de Diophante (un célèbre mathématicien qui a vécu à Alexandrie entre le 2 ^{e} et le 3^{e} siècle de notre ère), on pouvait lire le texte suivant :

   Passant, ci-gît Diophante ! Résous cette énigme et tu connaîtras la durée de sa vie.
   Sa douce enfance fit le sixième de sa vie.
   Puis, après un douzième de sa vie, son menton s'est couvert de barbe.
   Après un septième encore, il se marie.
   Cinq années passent, et la naissance d'un fils le comble de joie.
   Le sort voulu que la vie du fils soit deux fois plus courte que celle du père.
   Après la mort de son enfant, le vieillard vécu encore quatre années.

   Sauras-tu me dire combien d'années Diophante a-t-il vécu ?

4.2 Autres équations

À la fin de votre année de seconde, vous disposez de trois façons de résoudre une équation.

— Si l'équation est du premier degré (C'est à dire qu'elle ne comporte aucune puissance de x, ni de fraction comportant des termes en x au dénominateur), il suffit de développer, si besoin, chaque membre de l'équation et d'isoler les différents termes en x d'un même côté de l'égalité (voir exercices précédents).

— Si l'équation comporte des puissances de x (et qu'il n'est pas possible "d'éliminer" celles-ci par un simple développement), il faut tenter de factoriser l'expression afin de se ramener à la résolution d'une équation produit.

— Si l'équation comporte des fractions rationnelles (C'est à dire des fractions comportant des x au dénominateur). Il conviendra tout d'abord de déterminer l'ensemble des valeurs interdites (celles qui donnent un ou des dénominateurs égaux à 0)
Puis, il faudra transformer l'écriture de manière à se ramener à l'égalité de deux fractions. On pourra alors utiliser la règle des produits en croix ou la mise au même dénominateur afin de se ramener à l'un des deux cas précédents.

Trois exemples "concrets"

Cas d'une équation du premier degré	Cas d'une équation-produit	Cas d'une équation rationnelle
$\frac{3}{4}(2x-3)+3x = 5x - \frac{2}{3}(5-9x)$ Développer et se ramener à : $-\frac{13}{2}x = -\frac{13}{12}$ Montrer alors que $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$	$81x^2 - 16 = (9x-4)(2x-3)$ Reconnaître une identité remarquable et se ramener à : $\underline{\mathbf{(9x-4)}}(9x+4) - \underline{\mathbf{(9x-4)}}(2x-3) = 0$ Écrire la règle du produit nul et montrer que $S = \left\{\frac{4}{9};-1\right\}$	$x+1 = \frac{9}{x+1}$ Déterminer les éventuelles valeurs interdites Montrer que l'on peut se ramener à : $(x+1)^2 = 9$ Montrer alors que $S = \{2;-4\}$

Exercice 16

On cherche ici à résoudre l'équation $(2x-3)(6x+1) = (3x-1)(4x+5)$. Pour cela, nous allons procéder par étapes.

1. On commence par développer chaque côté de l'égalité.
   On a donc $12x^2 + 2x - 18x - 3 = 12x^2 + 15x - 4x - 5$ c'est à dire $12x^2 - 16x - 3 = 12x^2 + 11x - 5$
   Vérifier que mes calculs sont bien corrects.
2. On procède ensuite comme pour les équations "normales" en regroupant les quantités comportant des x du même côté.
   On obtient alors $-27x = -2$ *Vérifier ici aussi que vous êtes bien d'accord avec moi*
3. On peut alors conclure que $x = \dfrac{-2}{-27} = \dfrac{2}{27}$.
   Ainsi on a $S = \left\{\dfrac{2}{27}\right\}$.

En utilisant le modèle ci-dessus, résoudre les équations ci-dessous.

a) $(x-1)(2x+1) = (2x+5)(x+4)$ b) $6x^2 + 5 = (3x+1)(2x+4)$ c) $(x+2)^2 = x^2 + 1$
d) $(2x+5)(2x-5) = 4x^2 + 3x$ e) $(3-2x)^2 = (2x-1)(2x+1)$ f) $(4x+1)^2 = (3-4x)^2$

Exercice 17

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(5x-1)(x-9) - (x-9)(2x-1) = 0$

2. $\dfrac{3x-1}{x-5} = \dfrac{3x-4}{x}$

3. $\dfrac{16x^2-25}{2x-3} = \dfrac{4x-5}{3}$

4. $2(x-1)(x-3,5) = 4x^2 - 28x + 49$

5. $\dfrac{x^2-3x}{(x-3)^2} = 4$

Exercice 18

On cherche une méthode pour résoudre l'équation suivante $x^2 + 2x - 8 = 0$. L'idée est de se ramener à la résolution d'une équation produit.

1. **a.** En utilisant une identité remarquable, complétez l'égalité ci dessus :

$$x^2 + 2x = (x + \ldots)^2 - \ldots$$

b. En déduire que l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$ équivaut à $(x+1)^2 - 9 = 0$.

c. En remarquant la présence d'une identité remarquable, déduire alors les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 8 = 0$.

2. En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre l'équation $x^2 + 12x + 11 = 0$.

5 Inéquations de base

Prérequis

Règles de calcul avec des inégalités :

- ☞ On ne modifie pas une inégalité en ajoutant (ou en soustrayant) la même quantité de chaque côté de cette inégalité.
- ☞ Lorsque l'on multiplie, ou de l'on divise, une inégalité, il faudra faire attention au signe de la quantité utilisée.
  - ☞ Si celle ci est positive, on ne modifie pas le sens de l'inégalité.
  - ☞ Si celle-ci est **négative**, il faut **inverser le sens** de l'inégalité.

Les méthodes de résolutions des inéquations du premier degré sont les mêmes que celles qui s'appliquent aux équations.

Un premier exemple résolu.

On cherche à résoudre l'inéquation

$$2x - 3 \leqslant 7x + 5$$

On retire $7x$ de chaque côté

$$2x - 3 - 7x \leqslant 7x + 5 - 7x$$
$$-5x - 3 \leqslant 5$$

On ajoute 3 de chaque côté

$$-5x - 3 + 3 \leqslant 5 - 3$$
$$-5x \leqslant -2$$

On **divise** de chaque côté par **−5** qui est **négatif**, il faut **inverser le sens de l'inégalité**.

$$\frac{-5x}{-5} \geqslant \frac{-2}{-5}$$
$$x \geqslant \frac{2}{5}$$

On décrit ensuite l'ensemble solution à l'aide d'un intervalle.

$$S = \left[\frac{2}{5};+\infty\right[.$$

Un second exemple presque résolu.

On cherche à résoudre l'inéquation

$$7 - 2x > -6x + 4$$

On ajoute ...... de chaque côté.

$$7 - 2x \ldots\ldots > -6x + 4 \ldots\ldots$$
$$4x + 7 > 4$$

On retire 7 de chaque côté.

$$4x + 7 \ldots\ldots > 4 \ldots\ldots$$
$$4x > -3$$

On **divise** de chaque côté par ... qui est **positif**, il ne **faut pas changer le sens de l'inégalité.**

$$\frac{4x}{\ldots} > \frac{-3}{\ldots}$$
$$x > -\frac{3}{4}$$

On décrit ensuite l'ensemble solution à l'aide d'un intervalle.

$$S = \left]\quad ; \quad\right[$$

Remarques :

- ☞ Comme pour les équations, il est possible d'effectuer plusieurs étapes simultanément.
- ☞ Il est recommandé de faire apparaître la justification concernant le changement de sens ou non de l'inégalité. (Clarté du propos pour votre relecture et celle du correcteur).
- ☞ Faire attention au sens d'écriture des crochets. (Inégalité large implique des crochets fermés, sauf aux infinis bien sûr).

Deux exemples de présentation d'une résolution avec justification.

1) Soit à résoudre

$$5x-6<7x+9$$

$$5x-6-7x<9$$

$$-2x<9+6$$

$$-2x<15$$

$$x>\frac{15}{-2} \qquad \div(-2)<0$$

$$x>-\frac{15}{2}$$

Ainsi $S =]-7,5;+\infty[$

2) Soit à résoudre

$$8x-6\geqslant 3x+1$$

$$8x-\ldots-6\geqslant 1$$

$$5x\geqslant 1+\ldots$$

$$5x\geqslant 7$$

$$x\ldots\frac{7}{5} \qquad \div\ldots$$

Ainsi S=...........

Exercice 19

Résoudre les inéquations suivantes. On prendra soin de simplifier les éventuelles fractions intervenant dans l'écriture des intervalles solutions.

1. $2x+3>9x-2$
2. $-8x-5\leqslant -10x-6$
3. $x-1<2x+5$
4. $2,5x-3\geqslant 9,5x+18$
5. $0,6x-1,7>0,2x-3$
6. $-1,4x+4\leqslant x-4$

Exercice 20

1. Afin de sauver Rick des griffes de la fédération galactique, Morty doit fabriquer une planche rectangulaire. Il sait seulement que cette planche doit avoir des dimensions entières, qu'un des ces côtés mesure 12 cm, que son périmètre dépasse 41 cm mais que son aire est inférieure à 111 cm².
   Combien doit mesurer l'autre côté de la planche ?
2. Le cinéma « La Carioca » propose deux tarifs.
   Tarif 1 : 7,5 € la place.
   Tarif 2 : 5,25 € la place sur présentation d'une carte d'abonnement de 27 € valable 1 an.
   À partir de combien de places achetées annuellement à-t-on intérêt à s'abonner ?
3. Deux fournisseurs d'électricité de Groland proposent les contrats suivants.
   Société Grostricité : 32 € par mois d'abonnement, puis 1,13 € le Kw/h.
   Société Cestoutnoir : 14 € par mois d'abonnement, puis 1,72 € le Kw/h.

   Comment choisir la société en fonction de sa consommation d'électricité mensuelle ?

6 Inéquations et tableaux de signes

Prérequis
Règle des signes pour un produit ou un quotient, signe d'une fonction affine, valeurs interdites pour un quotient, intervalles et réunion d'intervalles.

Signe d'un produit

Exemple guidé

On veut étudier dans $\mathbb{R}$ le signe du produit $P(x) = (-2x-6)(x-5)$.

Racine de $-2x-6$:	Racine de $x-5$
$-2x-6=0 \Leftrightarrow x=\dots$	$x-5=0 \Leftrightarrow x=\dots$

Compléter le tableau avec les signes qui conviennent :

x	$-\infty$	$\cdots$		$\cdots$	$+\infty$
$-2x-6$		0			
$x-5$				0	
$P(x)$		0		0	

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes : $P(x) > 0$ et $P(x) \leqslant 0$.

À toi de jouer ...

Exercice 21

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = (-3x+12)(7-2x)$.
2. En déduire les solutions des inéquations suivantes : $P(x) \geqslant 0$ et $P(x) < 0$.

Exercice 22

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x+2)^2 - (3x+2)(5x+1) \leqslant 0$
2. $(2-x)^2 > 36$.

Conseil : se ramener à une inéquation produit avec un second membre nul, réaliser un tableau de signes et conclure.

Exercice 23

On considère deux nombres réels x et y dont la somme est 20.
On souhaite que leur produit P soit supérieur ou égal à 91.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que résoudre l'inéquation $P \geqslant 91$ revient à résoudre l'inéquation $(7-x)(13-x) \leqslant 0$.
3. Conclure.

Signe d'un quotient

Exemple guidé

On veut étudier dans $\mathbb{R}$ le signe du quotient $Q(x) = \dfrac{3x+9}{x-2}$.
Condition d'existence du quotient ou recherche de la valeur interdite :
$Q(x)$ existe $\Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ldots$

Racine de $3x+9$:	Racine de $x-2$
$3x+9=0 \Leftrightarrow x = \ldots$	$x-2=0 \Leftrightarrow x = \ldots$

Compléter le tableau avec les signes qui conviennent :

x	$-\infty$	$\cdots$	$\cdots$	$+\infty$
$3x+9$		0		
$x-2$			0	
$Q(x)$		0	$\Vert$	

Le quotient n'est pas défini !

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes : $Q(x) < 0$ et $Q(x) \geqslant 0$.

À toi de jouer ...

Exercice 24

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $Q(x) = \dfrac{-2x+3}{x+4}$.
2. En déduire les solutions des inéquations suivantes : $Q(x) \geqslant 0$ et $Q(x) \leqslant 0$.

Exercice 25

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $5 + \dfrac{2}{x+3} \leqslant 0$.
2. $\dfrac{3}{2x-1} \geqslant \dfrac{2}{-3x+15}$

Conseil : Obtenir une inéquation équivalente avec un quotient unique dans le premier membre et un second membre nul, réaliser un tableau de signes et conclure.

Exercice 26

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2-16}{9-4x^2} \geqslant 0$
2. $\dfrac{2x+3}{x+1} \leqslant \dfrac{x+1}{2x+3}$

7 Géométrie

Prérequis

- ☞ Toutes les connaissances de géométrie plane du collège.
- ☞ Géométrie dans un repère : calculs avec les coordonnées.

En géométrie (mais pas seulement), il est souvent très important de prendre l'initiative de réaliser un schéma. Ensuite, avec tous vos outils (théorème de Pythagore, trigonométrie, formules de calculs d'aires, etc.), à vous de voir ce que vous êtes capable de calculer ou de démontrer à partir des données de l'énoncé, et qui pourrait conduire à la réponse au problème posé. Tâchez d'acquérir ce réflexe, de faire un schéma pour illustrer un problème.

Exercice 27

1. Dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, placer les points M(6;4), A(−1;5), T(−2;−2) et H(6;−2).
2. Calculer les coordonnées du milieu F du segment [MT].
3. Démontrer que les points A et H sont sur le même cercle de centre F et de rayon FM.
4. Quelle est la nature des triangles MAT et MHT ?
5. Démontrer que, néanmoins, le quadrilatère MATH n'est pas un rectangle.
6. Calculer l'aire du quadrilatère MATH.

Exercice 28 ✰ ✰

Pour cet exercice, trois indices se trouvent à la fin du livret.

Un tétraèdre régulier (solide constitué de quatre triangles équilatéraux identiques) est posé sur une table. Chacune des 9 arêtes mesure 10 cm. Quelle est la hauteur de cette pyramide ?

8 Équations de droites et systèmes

Prérequis

- ☞ Équations de droites dans le plan.
- ☞ Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Exercice 29

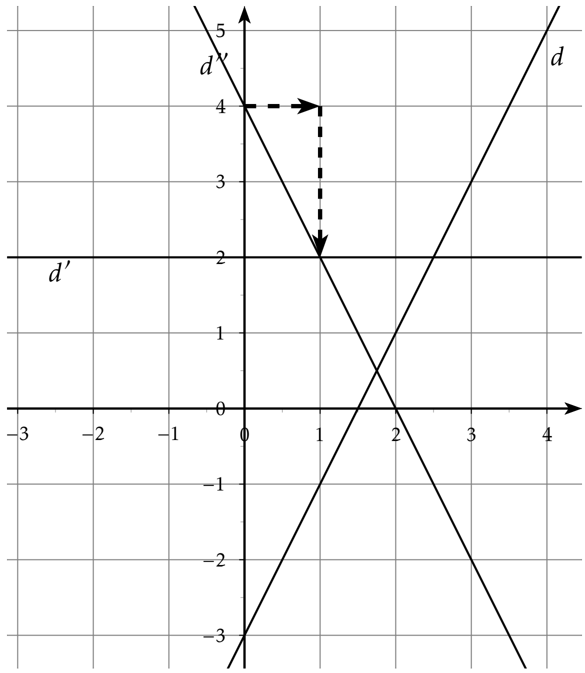
Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

On se place dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit Δ la droite d'équation $y = 5x + 3$.

1. Le point $C(-2;7)$ appartient à la droite Δ.
2. La droite Δ' d'équation $y = 3x - 2$ et la droite Δ sont parallèles.
3. Le point $D(-2,5;-9,5)$ appartient aux deux droites Δ et Δ'.

   Les questions 4. à 10. se réfèrent au graphique ci-contre.
4. L'équation de la droite d est $y = -3x + 2$.
5. La droite d' a pour équation $y = 2$.
6. Le coefficient directeur de la droite d est 2.
7. Le coefficient directeur de la droite d' est 1.
8. La droite d' est la représentation graphique d'une fonction linéaire.
9. Les flèches en pointillés permettent de lire graphiquement le coefficient directeur de la droite d''.
10. Le coefficient directeur de la droite d'' est égal à $m = -\dfrac{1}{2}$.



Exercice 30 (avec logiciel)

1. Dans un repère du plan, soient $A(4;1)$ et $B(-2;4)$ deux points.
   Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).
2. Sur un ordinateur, ouvrir un fichier GeoGebra (téléchargeable gratuitement, si ce n'est déjà fait !).
   - ➢ Placer les points A et B, puis tracer la droite (AB).
   - ➢ Lire l'équation de la droite (AB) dans la fenêtre algèbre pour contrôler le résultat trouvé à la question 1.

Exercice 31

Dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on considère les trois points suivants :

$A(-3;1)$; $B(1;2)$; $C(0;-1)$

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) passant par le point C et parallèle à la droite (AB).
3.
   a. Déterminer les coordonnées du point M milieu du segment [AC].
   b. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BM)
   c. Déterminer les coordonnées du point D intersection des droites (BM) et (d).
   d. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

Exercice 32

On considère le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ orthonormé, les deux points A et B de coordonnées :

$A\left(-1;\frac{1}{3}\right)$; $B\left(1;\frac{5}{3}\right)$

et la droite (Δ) admettant pour équation cartésienne :

$(\Delta):\ 3\cdot x+2\cdot y-4=0$

1. On considère la droite (d) passant par les points A et B.

  a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

  b. En déduire une équation cartésienne de la droite (d).

2. **a.** Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite (Δ).

  b. Justifier que les droites (d) et (Δ) sont sécantes.

  c. Déterminer les coordonnées du point N intersection des droites (d) et (Δ).

3. **a.** Justifier que le point $M\left(3;-\frac{5}{2}\right)$ appartient à la droite (Δ).

  b. Justifier que la droite (Δ) est perpendiculaire à la droite (AB).

Exercice 33

1. On considère les deux droites (d) et (d') d'équations cartésiennes :

$(d):\ 3x-2y+3=0$; $(d'):\ 2x-3y+7=0$

  a. Tracer ces droites dans un repère orthonormé. Que peut on conjecturer sur leurs positions relatives (sont-elles sécantes, parallèles ou confondues) ?

  b. Résoudre le système : $\begin{cases} 3x-2y+3=0 \\ 2x-3y+7=0 \end{cases}$

  c. Démontrer la conjecture émise à la première question.

2. Les droites suivantes sont-elles sécantes ?

  a. $\Delta:\ 2x+6y-8=0$; $\Delta':\ -3x-9y+11=0$

  b. $\delta:\ 6x-3y+9=0$; $\delta':\ -4x+2y-6=0$

Exercice 34 ✍

À ses deux élèves qui lui demandent son âge, le professeur de mathématiques répond :

Cette année, mon âge est 9 fois celui de ma fille, mais dans 12 ans, il sera 3 fois celui de ma fille.

Déterminer l'âge du ~~capitaine~~ professeur.

Prérequis

Avant d'effectuer ces exercices, il est nécessaire de connaître la définition et les propriétés du parallélogramme, et le cours sur les vecteurs.

Exercice 35

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

1. REVI est un parallélogramme, alors :
   a) $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{VI}$ b) $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{VI}$ c) $\overrightarrow{RV} = \overrightarrow{EI}$ d) $\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{VE}$
2. SION est un parallélogramme, alors :
   a) $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IO}$ b) $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}$ c) $\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ON}$ d) $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IO}$
3. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\vec{u}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{BE}$ d) $\overrightarrow{FE}$
4. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$
5. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\vec{u} - \vec{v}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$
6. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ est égal à :
   a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$

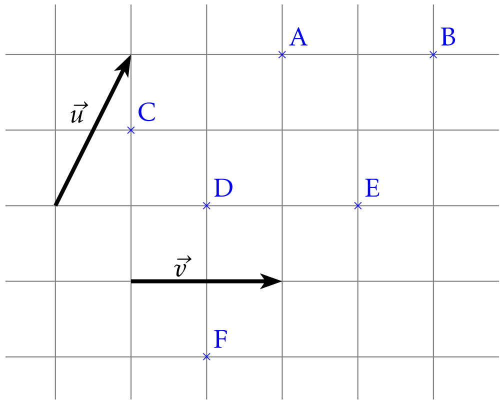


Figure 1

7. Dans la figure 2 ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont :
   a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires

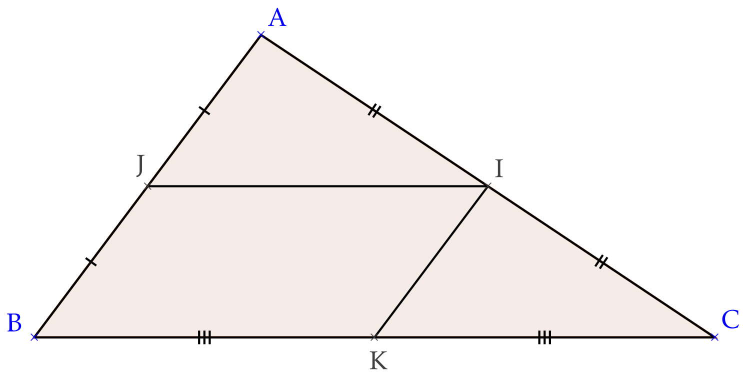


Figure 2

8. Dans la figure 2 ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont :
   a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires
9. Dans la figure 2 ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont :
   a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires
10. Dans la figure 2 ci-dessus, quelles égalités sont vraies ?
    a) $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{IK}$ c) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BK}$ d) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}$

Exercice 36

ABC est un triangle.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, puis le point J tel que A soit le milieu du segment [BJ].
2. a. Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AJ}$?
   b. En déduire la nature du quadrilatère DCJA.

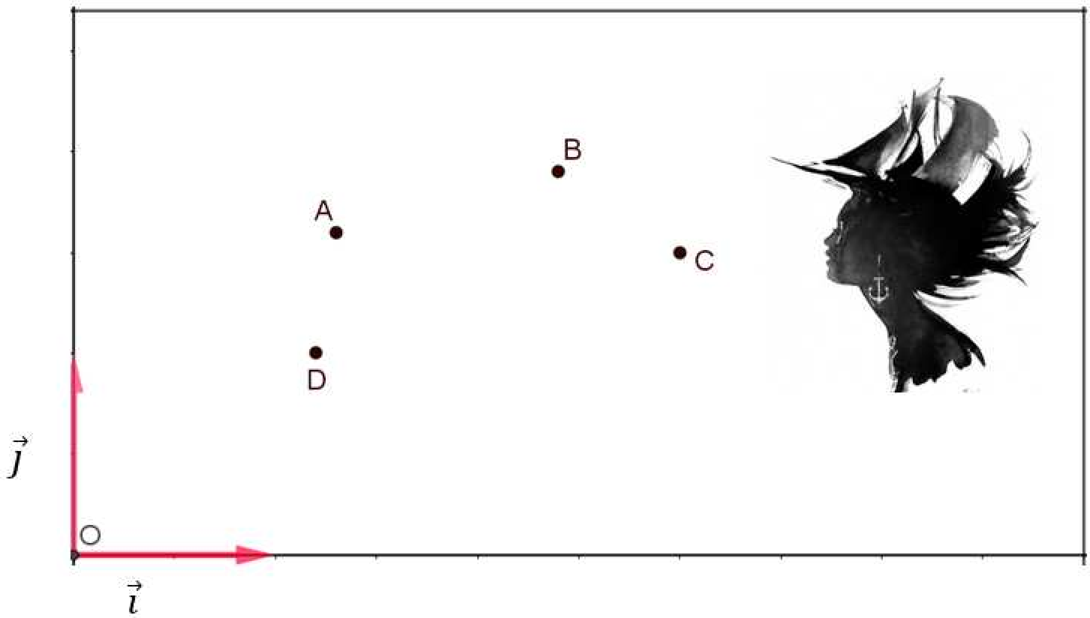
Exercice 37

Dans un repère, on donne les points $A(-1;3)$, $B(7;-1)$, $C(5;0)$, $D(4;-2)$ et $E(0;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 38

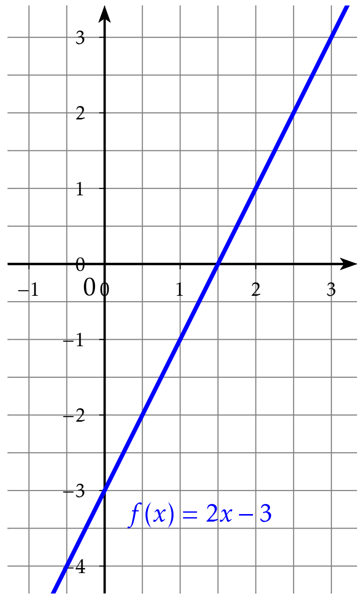
Dans une maison au design très futuriste, un décorateur veut installer une fenêtre trapézoïdale, à côté de la peinture réalisée sur son mur.
Il prend des mesures à partir du point situé en bas à gauche du mur, et détermine ainsi les coordonnées des points A, B, C et D dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, points qu'il a marqués au crayon à papier sur le mur.
Il obtient : $A(1,3;1,6)$, $B(2,4;1,9)$, $C(3;1,5)$ et $D(1,2;1)$.
Avant de poursuivre son travail, il tient à vérifier qu'il a bien là un trapèze, autrement dit que les côtés [AB] et [CD] sont bien parallèles.



1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
2. Ces deux vecteurs sont-ils colinéaires ?
3. Conclure.

Prérequis

- Notions de fonction, image, antécédent, fonctions affines, résolution d'équations.
- Fonctions polynômes de degré 2, tableaux de signes et de variations.



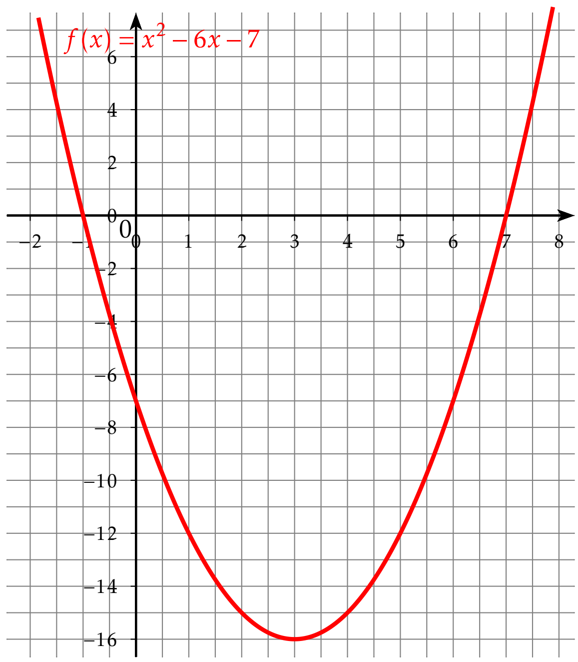
Exercice 39

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image de 2 par f.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. **a.** Déterminer graphiquement l'antécédent par f de $-0,5$.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.

Exercice 40

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 7$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.



1. **a.** Déterminer graphiquement l'image par f de 5.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. **a.** Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
   b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x - 3)^2 - 16$.
   c. Déterminer les antécédents de 0 par le calcul.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.
4. Donner le tableau de signes de la fonction f.
5. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
   b. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 2$.
6. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > -7$.
7. On considère la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x - 13$.
   a. Construire, dans le repère ci-contre, la représentation graphique de la fonction g.
   b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$.

Exercice 41 (avec logiciel)

On considère les deux algorithmes donnés ci-contre.

1. Programmer ces deux algorithmes sur votre calculatrice.
   Les tester sur quelques nombres.
2. Quelle conjecture pouvez-vous formuler ? La démontrer.
3. Quels nombres doit-on entrer pour obtenir 48 comme résultat ? (résolution algébrique attendue).

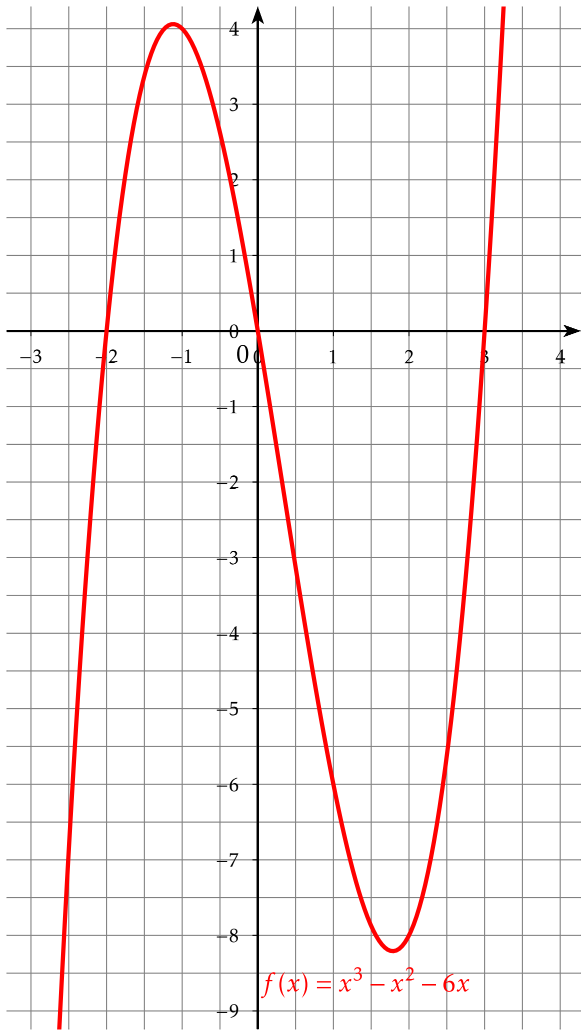
```
Algorithme A
Variables :
    x, a, b, c : réels ;
Début
    Entrer(x) ;
    a ← x² ;
    b ← (−6) × x ;
    c ← a + b + 8 ;
    Afficher(c) ;
Fin.
```

```
Algorithme B
Variables :
    x, a, b, c : réels ;
Début
    Entrer(x) ;
    a ← x − 3 ;
    b ← a² ;
    c ← b − 1 ;
    Afficher(c) ;
Fin.
```

Exercice 42

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

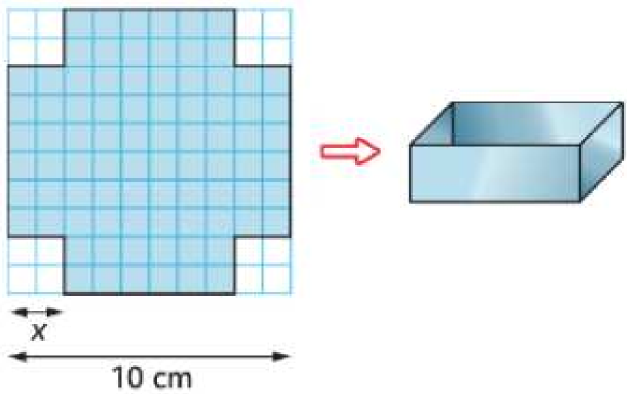
1. a. Déterminer graphiquement l'image par f de $-\frac{3}{2}$.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. a. Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
   b. Développer $(x-3)(x+2)$.
   En déduire une factorisation de la fonction f.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f par lecture graphique.
4. En utilisant la factorisation trouvée en 2.b., dresser le tableau de signes de la fonction f.
5. a. Déterminer graphiquement les antécédents de -6 par f.
   b. Factoriser $x^3 - x^2$ et $-6x + 6$.
   c. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = -6$.
   On utilisera les factorisations trouvées en 5.b.



Exercice 43 (avec logiciel)

On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté.
Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords pour obtenir un pavé droit.

1. Donner un intervalle pour la variable x.
2. Exprimer le volume $V(x)$ de la boîte en fonction de x.
3. Utiliser la calculatrice pour déterminer le volume maximal et la valeur de x correspondante (on arrondira au dixième).



Exercice 44

1. On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-6;8]$.

x	-6		-1	
$f(x)$	10	$\searrow$	4	

   Compléter le tableau à l'aide des indications suivantes :
   - la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-1;3]$;
   - la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[3;8]$;
   - $f(3) = 7$ et $f(8) = -2$.
2. **a.** Vrai ou Faux ? : L'équation $f(x) = 9$ a une seule solution. De plus, cette solution appartient à l'intervalle $[-6;-1]$.
   b. Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes : $f(x) = 5$ $\quad f(x) = 0$ $\quad f(x) = -3$.
3. **a.** Vrai ou Faux ? : $f(5) < f(4)$.
   b. Comparer, si possible, les nombres suivants : $f(-0.5)$ et $f(2)$ $\quad f(-5)$ et $f(-5,1)$ $\quad f(2)$ et $f(3,5)$.
4. Dans un repère orthogonal, représenter une courbe compatible avec ce tableau de variations.

11 Pourcentages et Statistiques

Prérequis

- ☞ Pourcentages, évolutions en pourcentage, évolutions successives, évolution réciproque
- ☞ Notion de série statistique, effectifs, effectifs cumulés croissants
- ☞ Paramètres de position : médiane, quartiles, moyenne, variance et écart-type, interprétation des résultats
- ☞ Distribution des fréquences

Exercice 45

À l'issue de la saison régulière du championnat - Pro D2 2013/2014 de rugby, on donne le classement final : (*source : L'Équipe*)

1. Quelles sont les deux équipes médianes du classement ? Justifier.
2. Déterminer les quartiles Q_1 , Q_2 (médiane) et Q_3 des points marqués par les équipes de Pro D2.
3. Lyon accède au Top 14 avec un score 80% supérieur à celui obtenu en 2013. Quel était-il alors ?
4. Le nombre de points du Stade Aurillacois est en baisse de 21,33% par rapport à celui de la saison précédente. Quel était-il alors ?
5. L'an dernier, Aurillac était l'équipe la mieux classée de l'intervalle $[Q_2 ; Q_3]$. Quel était son classement ?

Rang	Equipe	Pts
1	Lyon OU	117
2	Agen	98
3	La Rochelle	98
4	Pau	93
5	Narbonne	88
6	Tarbes	80
7	Mont-de-Marsan	68
8	Bourgoin	67
9	Colomiers	66
10	Béziers	60
11	Aurillac	59
12	Albi	54
13	Dax	53
14	Carcassonne	50
15	Auch	44
16	Bourg-en-Bresse	41

Exercice 46 (avec logiciel)

On donne maintenant le nombre d'essais inscrits par Aurillac au cours de la saison 2013-2014 :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	6	10	8	4	1	1

1. Déterminer le nombre moyen d'essais par match.
2. Déterminer la fréquence en % de chaque catégorie. Arrondir à l'unité.
3. Déterminer la médiane de la série statistique, en donner une interprétation concrète.
4. Déterminer le premier et le troisième quartile de la série.
5. Géraud crée une feuille dans un tableur pour automatiser certains calculs :

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Nombre d'essais**	0	1	2	3	4	5
2	**Effectif**	6	8	10	4	1	1
3	**Fréquence (%)**						
4	**Effectifs cumulés croissants**	6					

1. Quelle formule doit-il entrer en B3 ?
2. Quelle formule doit-il entrer en C4 ?

Exercice 47

Répondre aux questions suivantes. La calculatrice est autorisée.

<table>
<tr><th>Question n°</th><th>Énoncé</th><th>Réponse</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Kévin reçoit 40€ d'argent de poche par mois. En 2020, il a dépensé 180€ en jeux vidéos. Exprimer, en pourcentage, la part de cette dépense dans son budget annuel.</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>En 2020, une startup réalise un chiffre d'affaire annuel de 40 000€ et a pour objectif une progression annuelle de 5% chaque année pendant trois ans. Quel est l'objectif pour 2023 ?</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Le film « Le seigneur des anneaux – le retour du roi » dure 263 minutes en version longue. C'est 31% de plus que la version courte. Donner la durée de la version courte, exprimée en heures/minutes.</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>Dans un centre culturel, les disques représentent 28% des ventes. Parmi eux, on vend 5% de vinyles. Quelle est la part des ventes de vinyles dans les ventes totales du magasin ?</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>Un manteau soldé 20% coûte dorénavant 105,60€. Quel était son prix initial ?</td><td></td></tr>
<tr><td>7</td><td>Un sac contient 11 jetons rouges, 3 jetons bleus et 6 jetons verts. Déterminer, en pourcentage, la proportion de jetons verts dans le sac.</td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>Une ville a perdu 10% de ses habitants entre 2019 et 2020 mais en a ensuite gagné 14% entre 2020 et 2021. Calculer le coefficient multiplicateur entre 2019 et 2021.</td><td></td></tr>
<tr><td>9</td><td>Les moyennes générales de Nathan et Sophie ont évolué entre le premier et le second trimestre : celle de Nathan passe de 17,3 à 18,3 et celle de Sophie passe de 12 à 12,8. Qui a le plus progressé ?</td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>Un plombier facture une intervention 80€ Hors Taxe (taux de TVA intermédiaire). Quel est le coût pour le client ?</td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>Un téléviseur 4K est vendu 540€ (taux de TVA classique). Quel est son prix hors taxes ?</td><td></td></tr>
<tr><td>12</td><td><table><tr><th>L_1</th><th>L_2</th></tr><tr><td>8</td><td>1</td></tr><tr><td>9</td><td>5</td></tr><tr><td>12</td><td>7</td></tr><tr><td>14</td><td>3</td></tr><tr><td>17</td><td>2</td></tr><tr><td>20</td><td>2</td></tr></table>Dans ce tableau créé avec le menu « stats » de la calculatrice, les valeurs du caractère étudié sont entrées en L_1 et leurs effectifs en L_2. Déterminer la moyenne, les quartiles et l'écart type de la série statistique.</td><td></td></tr>
<tr><td>13</td><td>Deux artisans – fromagers produisent des petits « Rocamadour » dont la masse doit être égale à 30g.
On prélève pour chacun un échantillon de fromages dont on relève les masses en g :
A : 28 – 28 – 29 – 30 – 31 – 34
B : 27 – 28 – 29 – 30 – 30 – 30 – 32 – 34
Quel échantillon est le plus homogène ?</td><td></td></tr>
<tr><td>14</td><td>On interroge des adolescents sur le temps qu'ils consacrent chaque week end à visionner des vidéos sportives sur Internet. On donne le tableau ci – dessous. Déterminer la moyenne, l'écart type, les quartiles de la série ; puis la proportion d'adolescents qui consacrent au moins 1h à cette activité (en %).<table><tr><th>Temps (h)</th><td>0</td><td>0,5</td><td>1</td><td>1,5</td><td>2</td><td>2,5</td><td>3</td></tr><tr><th>Nb. d'adolescents</th><td>8</td><td>4</td><td>10</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>2</td></tr></table></td><td></td></tr>
</table>

12 Probabilités

Prérequis

- ☞ Notion d'expérience aléatoire et de modélisation (notamment à l'aide d'arbres)
- ☞ Calcul de probabilités
- ☞ Loi de probabilité
- ☞ Langage des événements
- ☞ Réunion, intersection d'événements
- ☞ Événement contraire

Exercice 48

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, seule une réponse parmi celles proposées est la bonne.

1. À Noël, Robin s'est fait offrir la trilogie des films "Batman" (trois films, sortis en 2005, 2008 et 2012). Il insère au hasard l'un des DVD dans son lecteur. Quelle est la probabilité que ce soit le film le plus récent ?

   □$\frac{1}{6}$ □$\frac{1}{3}$ □$\frac{1}{2}$ □$\frac{2}{3}$

2. Robin place les trois DVD, côte à côte, mais au hasard, sur une étagère. Quelle est la probabilité que les films soient rangés dans l'ordre chronologique ?

   □$\frac{1}{6}$ □$\frac{1}{3}$ □$\frac{1}{2}$ □$\frac{2}{3}$

3. On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32. A est l'événement "obtenir au moins un roi". L'événement $\overline{\text{A}}$ est :

   □"obtenir exactement un roi" □"n'obtenir aucun roi" □"obtenir au moins une dame" □"obtenir deux rois"

4. A et B sont deux événements issus d'une même expérience aléatoire. Sachant que $p(\text{B}) = 0,3$; $p(\text{A}\cap\text{B}) = 0,1$ et $p(\text{A}\cup\text{B}) = 0,5$, on peut dire que la probabilité de l'événement A est :

   □0,1 □0,2 □0,3 □0,4

5. On lance une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir "Pile" est :

   □0,25 □0,5 □0,75 □1

6. On lance 2 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir deux fois "Pile" est :

   □0,25 □0,5 □0,75 □2

7. On lance 8 fois de suite une pièce équilibrée. La Probabilité d'obtenir huit fois "Pile" est :

   □$\frac{1}{8}$ □$\frac{1}{4}$ □environ 0,001 □environ 0,004

Exercice 49

Un artisan produit du miel et de la confiture, de manière industrielle et de manière biologique.

- ☞ Il a produit au total 900 pots, et parmi eux 603 pots de miel.
- ☞ 333 pots de miel sont de fabrication industrielle.
- ☞ 63 pots de confiture sont de fabrication biologique.

1. Compléter le tableau à double entrée suivant, sur la base de ces informations :

	Biologique	Industriel	Total
Miel			
Confiture			
Total			

On choisit un pot au hasard dans la production, et on définit les évènements suivants :

- ☞ M : « c'est un pot de miel »
- ☞ B : « c'est un produit biologique »

2. Calculer les probabilités des évènements suivants, en codant correctement :

- ☞ « c'est un pot de confiture »
- ☞ « le contenu est bio »
- ☞ « c'est un pot de miel industriel »
- ☞ $M \cup \overline{B}$

3. On a prélevé un pot bio. Quelle est la probabilité que ce soit de la confiture ?

Problème de probabilités ✍

Julie a mis dans sa valise deux jupes (une noire, une bleue), trois chemisiers (un bleu, un jaune, un noir) et deux gilets (un bleu et un marron). On suppose que tous les tirages au sort se font de manière équiprobable.

1. Julie choisit un vêtement au hasard.

a. On s'intéresse à la nature du vêtement. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

b. On s'intéresse à la couleur du vêtement. Doner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2. Julie choisit un vêtement au hasard.

a. Déterminer la probabilité des événements :

- ☞ A : "Le vêtement est une jupe"
- ☞ B : "Le vêtement est bleu"
- ☞ $A \cap B$ puis $A \cup B$ *(vous traduirez chaque évènement à l'aide d'une phrase)*
- ☞ $\overline{A}$ puis $\overline{A} \cap B$ *(vous traduirez chaque évènement à l'aide d'une phrase)*

b. Que peut-on dire des événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

3. Julie décide de choisir au hasard sa jupe puis son chemisier en lançant un dé équilibré à 6 faces.

a. Proposer une règle du jeu qui permette de choisir une jupe de façon équiprobable.

b. Proposer une règle du jeu qui permette de choisir un chemisier de façon équiprobable.

4. Julie choisit au hasard une jupe, puis un chemisier, puis un gilet.

a. Modéliser à l'aide d'un arbre les différentes façons dont elle peut s'habiller.

b. Déterminer la probabilité des événements suivants :

- ☞ A : "Le chemisier est de même couleur que la jupe"
- ☞ B : "Les trois vêtements sont de couleurs différentes"
- ☞ C : "Julie est toute de bleu vêtue"

c. Donner un exemple de deux événements incompatibles.

13 Algorithmique

Prérequis

- ☞ Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).
- ☞ Boucles et instructions conditionnelles.
- ☞ Écriture et lecture d'algorithmes en pseudo-code et en langage Python.

Exercice 50

1. Voici quatre algorithmes, très semblables, rédigés par quatre élèves. Néanmoins, si on les programme avec un logiciel adapté, on obtiendra des résultats à l'écran tout à fait différents. Associer chacun de ces quatre algorithmes avec leur résultat obtenu à l'écran après programmation.

Algorithmes			Résultats obtenus à l'écran
Algorithme de Chloé P ← 1 Pour i allant de 1 à 5 P ← P x i Fin Pour Afficher P	•	•	0

Algorithme de Laura
Pour i allant de 1 à 5
    P ← 1
    P ← P x i
Fin Pour
Afficher P
	•	•	120

Algorithme de Thibault P ← 0 Pour i allant de 1 à 5 P ← P x i Fin Pour Afficher P	•	•	1 1 2 6 24

Algorithme de Thomas
P ← 1
Pour i allant de 1 à 5
    Afficher P
    P ← P x i
Fin Pour
	•	•	5

2. En fait, on avait demandé à ces quatre élèves de rédiger un algorithme permettant de calculer le produit $1\times2\times3\times4\times5$, que l'on peut noter aussi 5! (lire "factorielle 5"). Quel est le seul élève qui a rédigé un algorithme correct ?
3. Rédiger un algorithme qui permette de calculer la somme des entiers de 1 à 10 000.

Exercice 51

On donne ci-dessous quatre programmes en langage Python.

1. L'un de ces programme comporte une erreur. Lequel ?
2. Saisir et tester les trois autres programmes.

```
A=int(input("valeur de A ?"))
A=2*A
A=A+3
B=A*A
print(B)
```

```
A=100
while A>10:
    print("J'aime les maths")
    A=A+5
```

```
print("On se place dans un triangle")
C=float(input("Donnez la mesure de son côté le plus long"))
print("Donnez les mesures des deux autres côtés")
A=float(input())
B=float(input())
if C>A+B:
    print("ce triangle n'existe pas")
elif C**2==A**2+B**2:
    print("ce triangle est rectangle")
else:
    print("ce triangle n'est pas rectangle")
```

```
p=input("Donnez votre prénom")
for k in range(10):
    print("Moi",p,"j'aime les mathématiques")
```

Exercice 52

On donne l'algorithme suivant :

```
Saisir A
Saisir B
C ← A
A ← B
B ← C
Afficher(”A=”,A,” et B=”,B)
```

1. Que va-t-il afficher si on saisit 5 pour A et 9 pour B ?

   ☐ A = 5 et B = 9 ☐ A = 5 et B = 5 ☐ A = 9 et B = 9 ☐ A = 9 et B = 5

2. Programmer et vérifier.

Exercice 53

L'algorithme ci–contre permet d'effectuer la division euclidienne de 31 par 9, par soustractions successives.

```
A ← 31
C ← 0
Tant que A > 9 :
        C ← C + 1
        A ← A − 9
Afficher (”Le quotient de la division de 31 par 9 est : ”, C)
Afficher (”Le reste de la division de 31 par 9 est : ”, A)
```

1. Tester l'algorithme dans le tableau d'exécution suivant :

A	C
31	0

2. Transcrire en langage Python, puis tester le programme.
3. Modifier le programme pour que l'utilisateur puisse choisir lui-même le dividende et le diviseur.

Exercice 54

L'algorithme suivant permet de calculer la valeur de a^n , pour a réel et n entier naturel.

```
Saisir a
Saisir n
p ← 1
Pour k allant de 1 à n :
        p ← …
Afficher ("a puissance n est égal à : ", p)
```

1. Compléter l'algorithme.
2. Programmer et tester le programme.

Exercice 55

Une start-up crée un nouveau réseau social. Celui-ci compte 100 000 inscrits. On estime que le nombre d'abonnés va croître de 10% tous les mois. On veut déterminer au bout de combien de mois il y aura plus d'un million d'inscrits. Compléter l'algorithme suivant, puis programmer l'algorithme.

```
A ← …
M ← 0
Tant que … :
        A ← …
        M ← …
Afficher ("Il a fallu ", M," mois.")
```

Exercice 56

Compléter l'algorithme suivant, dont l'objectif est de définir la valeur absolue d'un réel x :

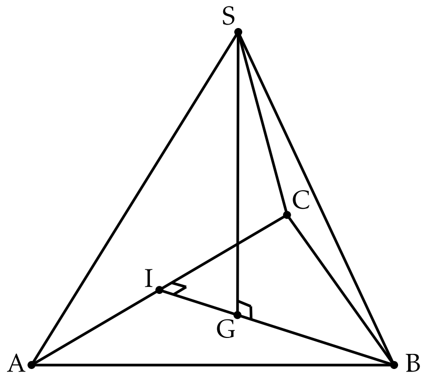
```
Définir absolue(x) :
    Si x < 0 alors :
            Retourner …
    Sinon :
            Retourner …
```

1. En langage Python, programmer cette fonction, puis quelques lignes de code permettant de : saisir deux nombres a et b, et d'afficher leurs valeurs absolues ainsi que $|a|+|b|$.
2. En utilisant la fonction `absolue(x)` ainsi définie, programmer une fonction `distance(a,b)` permettant le calcul de la distance entre deux nombres a et b.

14 Indications

Exercice 28

Indice 1 : Voici un schéma tout à fait propice à la résolution d'un tel problème.



Le but de l'exercice est en fait de calculer la hauteur SG.

Indice 2 : Ce serait possible si l'on connaissait la longueur BG. On pourrait alors utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BGS.

Indice 3 : Pour la longueur BG, il faut se rappeler que, dans une pyramide régulière, le pied de la hauteur est aussi le centre de gravité de la base. Or, dans un triangle, le centre de gravité est situé sur la médiane, au tiers en partant de la base. Il faudrait donc calculer la longueur IB.

En dire plus serait une insulte à votre intelligence ...

MON MÉMO PYTHON

Algorithme		Programme	Exemple
AFFECTATION (←)		=	A=3
SAISIE	un entier	**int(input())**	A=int(input(«Quelle quantité d'œufs ?»))
	un réel	**float(input())**	R=float(input(« Quelle quantité de lait ? »))
	du texte	**input()**	prenom=input(« Quel est votre prénom ? »)
AFFICHAGE	une variable	**print()**	print(R) va afficher la valeur contenue dans R print(prenom) va afficher le mot saisi
	du texte		print(« Bonjour, comment ça va ? »)
	composite		print(« Bonjour », prenom, « ça va ? »)

SI ……
ALORS ……
SINON ……
FIN DU SI
		if … :
		……………………………
		else :
		…………………………
			if A<6 :
			    print(« Achetez une boîte d'oeuf »)
			else :
			    print(« Vous avez assez d'œufs en stock »)

<u>4 espaces</u> : c'est l'**indentation** (décalage) à respecter

Algorithme	Programme	Exemple
POUR	**for k in range(n) :** # pour k variant de 0 à n − 1	for k in range(2,11) : print(k,«ème avertissement : range ta chambre »)
	for k in range(p,n) : # pour k variant de p à n − 1	
	for k in range(p,n,2) : # pour k variant de p à n − 1 par incrément de 2	

TANT QUE	**while condition :**	S = 3000#capital placé au taux 3%
		C = 2019 #année du placement
		while S<3500 :
		    S=S+S*3/100
		    C=C+1
		print(C)

Algorithme	Programme	Exemple

FONCTION	**def fonction**(a,b,…..) :
	    …
	    …
	return (c)
		# cette fonction retourne le périmètre d'un rectangle
		def perimetrerectangle(a,b) :
		    return(2*a+2*b)

+ * / **	Addition / Multiplication / Division / Puissance	***a==b***	***a!=b***	*Teste si a est égal à b/différent de b*
a//b *a%b*	Quotient/Reste de la division de a par b	***a<b***	***a<=b***	*Teste si a est strictement inférieur/inférieur ou égal à b*
sqrt(a)	$\sqrt{a}$	*condition 1* ***and*** *condition 2*		*Teste si les conditions 1* ***ET*** *2 sont vérifiées*
pi	π	*condition 1* ***or*** *condition 2*		*Teste si les conditions 1* ***OU*** *2 sont vérifiées*