Puissance d'un test - Exercices

Annette Corpart et Nelly Lassalle

<u>Exercice 1</u> ***Test bilatéral relatif à une moyenne***

Une machine fabrique en très grande série des engrenages. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque engrenage choisi au hasard dans la production d'une journée, associe son diamètre, exprimé en millimètres. On admet que X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma = 0{,}018$.
On annonce une moyenne m de 23,65 mm à un client qui commande un lot d'engrenages.

1. Le client veut construire un test bilatéral qui lui permette de conclure si au seuil de 5% l'affirmation du fournisseur peut-être acceptée. On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 100 engrenages, associe la moyenne des diamètres des engrenages. Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

a) Choisir une hypothèse nulle H_0 et une hypothèse alternative H_1 pour ce test.
b) Déterminer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de 5%.
c) Enoncer la règle de décision de ce test.

2. Le client mesure les diamètres de 100 engrenages prélevés dans sa commande. On assimile cet échantillon à un échantillon prélevé avec remise. Pour cet échantillon, la moyenne obtenue est 23,644. Que peut-on conclure ?

3. Calculer la puissance du test avec une hypothèse alternative H_1 : $m = 23{,}645$. Interpréter ce résultat.

<u>Exercice 2</u> ***Test bilatéral relatif à une fréquence***

Un groupe de citoyens demandent à la municipalité d'une ville la modification d'un carrefour, en affirmant que 30% des automobilistes tournent en utilisant une mauvaise file.
Un officier de police constate que sur 500 véhicules pris au hasard, 140 prennent une mauvaise file.

1. D'après l'observation effectuée par l'officier de police, peut-on considérer comme exacte l'affirmation du groupe de citoyens au seuil de risque 5% ? (Déterminer la loi d'échantillonnage F et construire un test bilatéral pour répondre à cette question).

2. Des observations futures montrent que, pour des échantillons de 500 véhicules pris au hasard, en moyenne 125 prennent une mauvaise file.

Quels sont les paramètres de la loi d'échantillonnage F sous l'hypothèse alternative H_1 : $p = \frac{125}{500} = 0{,}25$?

Dans ces conditions, que vaut $P(0{,}26 \leq F \leq 0{,}34)$? Que représente ce résultat ?

<u>Exercice 3</u> ***Test unilatéral relatif à une moyenne***

On s'intéresse à un test pour mesurer la consommation maximale en oxygène d'un individu dans une population âgée. Pour un groupe de contrôle, il a été montré que les mesures suivent une loi normale dont l'espérance mathématique est de l'ordre de $\mu = 25{,}5$ (ml/kg/min) et l'écart-type $\sigma = 6$ (ml/kg/min). On pense qu'une population de malades (Parkinson) doit avoir des capacités cardio-respiratoires plus limitées. On souhaite ainsi tester si dans un tel groupe la moyenne μ est plus faible. On prendra un seuil de risque de 5%.

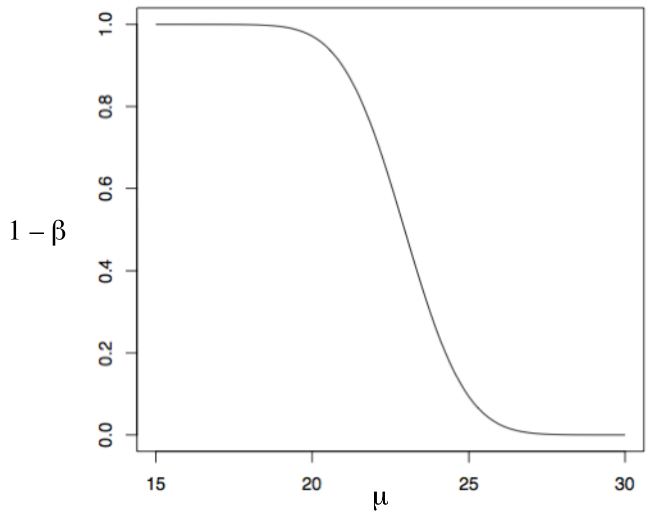
1. L'objectif du test est donc de décider entre les deux hypothèses suivantes :

- l'hypothèse nulle notée H_0 : $\mu = 25{,}5$ (absence d'effet de la maladie)
- l'hypothèse alternative notée H_1 : $\mu < 25{,}5$ (existence de l'effet).

On considère la variable aléatoire $\overline{X}$ qui à tout échantillon de 15 personnes associe sa consommation maximale moyenne en oxygène. Quelle loi suit $\overline{X}$ sous H_0 ?
Déterminer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 5%.
En déduire la règle de décision de ce test.

2. Le professeur responsable du service pense qu'à partir de la valeur $\mu = 23{,}5$, la différence est scientifiquement significative et l'effet sur le malade important. Il souhaite alors savoir quel risque il prend lorsqu'il rejette H_0 en étant dans le cadre de l'hypothèse alternative avec $\mu = 23{,}5$. Quelle loi suit $\overline{X}$ dans ce cadre ? En déduire la puissance du test. Est-elle satisfaisante ?

3. Avec un tableur, on a construit la courbe de puissance du test, représentée dans la figure ci-dessous.



Pour quelle valeur de la moyenne μ la puissance du test est-elle satisfaisante ?

<u>Exercice 4</u> ***Test unilatéral relatif à une moyenne*** ***(D'après BTS 2015 Groupement C)***

Dans une société italienne de fabrication de carrelage, on effectue différents types de tests de contrôle de qualité afin de vérifier si le carrelage fabriqué est conforme aux normes en vigueur. En particulier la norme DIN 51130 permet d'évaluer le caractère antidérapant d'un sol. Après des tests préliminaires servant d'étalonnage, une personne chaussée de chaussures normalisées marche en avant puis en arrière sur un plan incliné jusqu'à ce que la personne glisse. Cette méthode détermine ainsi l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement du revêtement.

La société effectue une série de tests sur les carreaux qu'elle produit, dont celui concernant cette résistance au glissement. On désigne par X la variable aléatoire qui, à tout carreau prélevé au hasard dans la production, associe l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement selon la norme DIN 51130 (en degrés). On admet que X suit une loi normale moyenne m =14,5 et d'écart-type $\sigma = 2$.

La société souhaite réaliser un nouveau type de finition sur le carrelage pour lequel elle pense que l'angle d'inclinaison maximale qui caractérise la résistance au glissement sera supérieur à 14,5°. Elle effectue un prélèvement de 100 carreaux dans la production et obtient pour cet échantillon un angle moyen d'inclinaison maximale de 14,75°.

Pour vérifier la véracité de cette amélioration de la résistance au glissement, la société décide d'élaborer un test unilatéral de validité d'hypothèse pour savoir si l'on peut considérer au seuil de 3% que l'angle moyen d'inclinaison maximale sur la nouvelle production de carrelage est strictement supérieur à 14,5°.

1. On désigne par $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 carrelages de la production, associe la valeur moyenne de l'angle d'inclinaison maximale lors du test.
Quelle est la loi suivie par $\overline{X}$?

2. Construction du test
Enoncer l'hypothèse nulle H_0 et l'hypothèse alternative H_1 pour ce test.
Quelle loi suit la variable $\overline{X}$ sous l'hypothèse H_0 ?
Déterminer l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 3 %.
Enoncer la règle de décision de ce test.

3. Utiliser ce test avec l'échantillon prélevé : peut-on estimer, au seuil de 3%, que la nouvelle finition améliore l'angle d'inclinaison maximale ?

4. Des observations futures prouveront qu'en fait, pour les échantillons de 100 carreaux produits selon le nouveau procédé de finition, l'angle moyen d'inclinaison maximale est égal à 15°. On prendra alors comme hypothèse alternative H_1 : $m = 15$.
Quelle loi suit la variable $\overline{X}$ sous l'hypothèse H_1 ?
Dans ces conditions, que vaut $P(\overline{X} \leq 14{,}88)$? Que représente ce résultat ?
Quelle est la puissance du test avec cette hypothèse alternative H_1 ? Interpréter ce résultat.

Corrigés

Exercice 1 ***Test bilatéral relatif à une moyenne***

1. $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{0{,}018}{\sqrt{100}} = 0{,}0018$.

a) Choix des hypothèses :

Hypothèse nulle H_0 : $m = 23{,}65$; hypothèse alternative H_1 : $m \neq 23{,}65$.

b) Détermination de l'intervalle d'acceptation :

Sous H_0 , $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 23,65 et d'écart-type 0,0018.

On veut déterminer le réel positif h tel que : $P(23{,}65 - h \leq \overline{X} \leq 23{,}65 + h) = 0{,}95$.

d'où $h = 1{,}96 \times 0{,}0018 \approx \mathbf{0{,}004}$.

c) Règle de décision :

Soit $\overline{x}$ la moyenne observée sur un échantillon de 100 pièces.

Si $\overline{x} \in [\,23{,}646 ; 23{,}654\,]$, alors on accepte H_0 et on rejette H_1

Si $\overline{x} \notin [\,23{,}646 ; 23{,}654\,]$, alors on accepte H_1 et on rejette H_0

2. Utilisation du test :

Ici $\overline{x} = 23{,}644$: **on rejette H_0**, on n'accepte pas l'affirmation du fournisseur. Mais en prenant cette décision, on prend un risque de 5 % de se tromper.

3. Puissance du test :

$P = 1 - P(23{,}646 \leq \overline{X} \leq 23{,}654)$ où $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 23,645 et d'écart-type 0,0018.

D'où $P = 1 - 0{,}29 = \mathbf{0{,}71}$: si la moyenne des diamètres des engrenages de la commande est de 23,645, on aura plus de 7 chances sur 10 de rejeter H_0 avec raison (et donc presque 3 chances sur 10 de ne pas détecter que l'affirmation du fournisseur est fausse).

Exercice 2 ***Test bilatéral relatif à une fréquence***

Soit p la proportion de véhicules utilisant une mauvaise file dans la ville. On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 500 véhicules, associe la fréquence f de véhicules utilisant une mauvaise file dans cet échantillon.

1. Choix des hypothèses :

Hypothèse nulle H_0 : $p = 0{,}3$; hypothèse alternative H_1 : $p \neq 0{,}3$.

Détermination de l'intervalle d'acceptation :

Sous H_0 , F suit la loi normale de moyenne 0,3 et d'écart-type $\sqrt{\frac{0{,}3 \times 0{,}7}{500}} \approx 0{,}020$.

Le seuil de risque est de 5 % : On veut déterminer h tel que : $P(0{,}3 - h \leq F \leq 0{,}3 + h) = 0{,}95$.

d'où $h = 1{,}96 \times 0{,}020 \approx \mathbf{0{,}04}$

Règle de décision :

Soit f la fréquence observée dans un échantillon de 500 véhicules.

Si $f \in [\,0{,}26 ; 0{,}34\,]$, alors on accepte H_0 et on rejette H_1

Si $f \notin [\,0{,}26 ; 0{,}34\,]$, alors on accepte H_1 et on rejette H_0

Utilisation du test :

Ici $f = 0{,}28$: on accepte H_0 au seuil de 5 %.

2. Sous l'hypothèse H_1 : $p = 0{,}25$ F suit la loi normale de moyenne 0,25 et d'écart-type $\sqrt{\frac{0{,}25 \times 0{,}75}{500}} \approx 0{,}019$.

$P(0{,}26 \leq F \leq 0{,}34) = \mathbf{0{,}30}$: c'est la probabilité que F soit dans l'intervalle d'acceptation avec une moyenne qui n'est plus égale à 0,3, c'est-à-dire la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse, donc l'erreur β de seconde espèce.

Exercice 3 *Test unilatéral relatif à une moyenne*

1. Loi d'échantillonnage :
$\overline{X}$: consommation maximale moyenne en oxygène pour un échantillon de 15 personnes.
Sous H_0 , $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 25,5 et d'écart-type $\frac{6}{\sqrt{15}} \approx 1{,}55$;

Intervalle d'acceptation de l'hypothèse H_0 au seuil de risque 5% :
On veut savoir s'il y a un effet de la maladie, on va donc chercher la limite inférieure au dessus de laquelle $\bar{x}$ devrait se trouver (à 95 %) si H_0 est vraie,
donc on veut déterminer la valeur critique c tel que $P(\overline{X} \geq c) = 0{,}95$ soit $c \approx$ **22,95**
Si l'hypothèse H_0 est vraie, alors 95 % des échantillons de 15 personnes ont une consommation moyenne d'oxygène supérieure à 22,95 ml/kg/min.

Règle de décision :
Soit $\bar{x}$ la moyenne observée sur un échantillon de 15 personnes.
Si $\bar{x} \geq 22{,}95$, alors on accepte H_0 et on rejette H_1
Si $\bar{x} < 22{,}95$, alors on accepte H_1 et on rejette H_0

2. Puissance du test :
Sous H_1 avec $\mu = 23{,}5$, $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 23,5 et d'écart-type $\frac{6}{\sqrt{15}} \approx 1{,}55$;
On rejette l'hypothèse nulle si $\overline{X} < 22{,}95$, d'où : $P(\overline{X} < 22{,}95) = 1 - P(\overline{X} \geq 22{,}95) =$ **0,36**
On constate que l'on a une très faible chance de rejeter H_0 alors qu'elle est fausse : la puissance du test n'est pas satisfaisante.

3. On voit sur le graphique que pour avoir une puissance satisfaisante de 0,80, il faut que **$\mu \approx 21{,}5$**.

Exercice 4 *Test unilatéral relatif à une moyenne*

1. $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{2}{\sqrt{100}} = 0{,}2$.

2. Construction du test :
Hypothèse nulle H_0 : $m = 14{,}5$
Hypothèse alternative H_1 : $m > 14{,}5$

Sous H_0 , $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 14,5 et d'écart-type 0,2.
On veut savoir si l'angle moyen d'inclinaison maximale n'est pas supérieur à 14,5°, on va donc chercher la limite supérieure en dessous de laquelle $\bar{x}$ devrait se trouver (à 97 %) si H_0 est vraie, donc on veut déterminer le réel a tel que $P(\overline{X} \leq a) = 0{,}97$ soit $a \approx$ **14,88**

Règle de décision du test :
Soit $\bar{x}$ la moyenne observée sur un échantillon de100 carreaux.
Si $\bar{x} \leq 14{,}88$, alors on accepte H_0 et on rejette H_1
Si $\bar{x} > 14{,}88$, alors on accepte H_1 et on rejette H_0

3. Utilisation du test :
Ici $\bar{x} = 14{,}75$: on n'a pas de raison de rejeter H_0. On ne peut pas estimer, au seuil de 3%, que la nouvelle finition améliore l'angle d'inclinaison maximale.

4. Sous H_1 , $\overline{X}$ suit la loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 0,2.
$P(\overline{X} \leq 14{,}88) =$ **0,27** : c'est la probabilité que $\overline{X}$ soit dans l'intervalle d'acceptation avec une moyenne qui n'est plus égale à 14,5, c'est-à-dire la probabilité d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse, donc l'erreur β de seconde espèce.

Puissance du test avec cette hypothèse alternative H_1 :
$P = 1 - P(\overline{X} \leq 14{,}88) = 1 - 0{,}27 =$ **0,73** : si l'angle moyen d'inclinaison maximale est égal à 15°, on aura plus de 7 chances sur 10 de rejeter H_0 avec raison (et donc presque 3 chances sur 10 de ne pas détecter l'amélioration de la résistance au glissement).