QUELQUES EXTRAITS DE TEXTES DE REFERENCE SUR L'HISTOIRE DES NOMBRES COMPLEXES

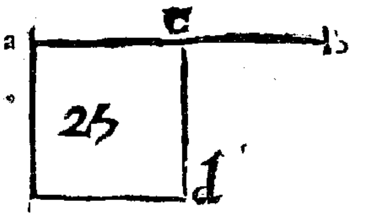
TEXTE n°1 : extrait de *Ars Magna* de Cardan, chapitre 37 intitulé *De regula falsum ponendi*

REGVLA II.

Secundum genus poſitionis falſæ, eſt per radicem m̃. Et dabo exemplum, ſi quis dicat, diuide 10. in duas partes, ex quarum vnius in reliquam ductu, producatur 30. aut 40. manifeſtum eſt quad caſus ſeu quæſtio eſt impoſſibilis, ſic tamen operabimur, diuidemus 10. per æqualia, & fiet eius medietas 5. duc in ſe fit 25. auferes ex 25. ipſum producendum, vtpote 40. vt docui te, in capitulo operationum, in quarto libro, fiet reſiduum m̃. 15. cuius ℞. addita & detracta à 5. oſtendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40. erunt igitur hæ, 5. p̃. ℞. m̃. 15. & 5. m̃. ℞. m̃. 15.

DEMONSTRATIO.

Vt igitur regulæ verus pateat intellectus, ſit a b linea, quæ dicatur 10. diuidenda in duas partes, quarum rectangulum debeat eſſe 40. eſt autem 40. quadruplum ad



10. quare nos volumus quadruplum totius a b, igitur fiat a d, quadratum a c, dimidij a b, & ex a d auferatur quadruplum a b, abſque numero, ℞. igitur reſidui, ſi aliquid maneret, addita & detracta ex a c, oſtenderet partes, at quia tale reſiduum eſt minus, ideo imaginaberis ℞. m̃. 15. id eſt differentiæ a d, & quadrupli a b, quam adde & minue ex a c, & habebis quæſitum, ſcilicet 5. p̃. ℞. v. 25. m̃. 40. & 5. m̃. ℞. v. 25. m̃. 40. ſeu 5. p̃. ℞. m̃. 15. & 5. m. ℞. m. 15. duc 5. p̃. ℞. m. 15. in 5. m. ℞. m. 15. dimiſſis incruciationibus, fit 25. m. m. 15. quod eſt p̃. 15. igitur hoc productum eſt 40. natura tamen a d, non eſt eadem cum natura 40. nec a b, quia ſuperficies eſt

5. p̃. ℞. m̃. 15.
5. m̃. ℞. m. 15.

25. m. m. 15. quad. eſt 40.

remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamen huic quantitati, quæ verè eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non vt in puro m. nec in aliis operationes exercere licet, nec venari quid ſit. Modus eſt, vt addas quadratũ medietatis numeri numero producendo, & à ℞. aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplum, in hoc caſu, diuide 10. in duas partes, producentes 40. adde 25. quadratum dimidij 10. ad 40. fit 65. ab huius ℞. minue 5. & adde etiam 5. habebis partes ſecundùm ſimilitudinem, ℞. 65. p̃. 5. & ℞. 65. m. 5. At hi nmmeri differunt in 10. non iuncti faciunt 10. ſed ℞. 260. & hucuſque progreditur Arithmetica ſubtilitas, cuius hoc extremum vt dixi, adeò eſt ſubtile, vt ſit inutile.

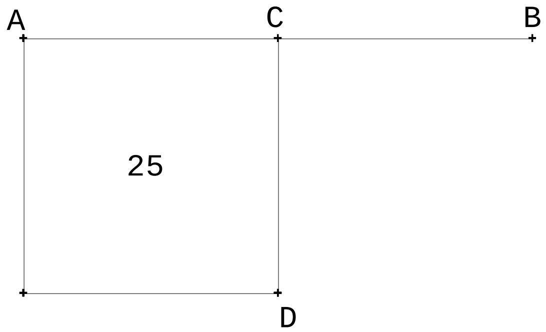
Voici la traduction de ce texte :

REGLE II

Le second genre de position fausse est pour les racines $\tilde{m}.$; et je donne un exemple : si l'on te dit, partage 10 en deux parties dont le produit fasse 30 ou 40, il est évident que ce cas ou ce problème est impossible, nous procèderons cependant ainsi : nous partagerons 10 en deux parties égales, et la moitié fera 5, multiplie la par elle-même, cela donne 25 ; de 25 tu retrancheras le produit lui-même, c'est-à-dire 40, et comme je te l'ai enseigné dans le chapitre sur les opérations, au sixième livre, il restera $\tilde{m}.15$ dont la racine carrée respectivement ajoutée et retranchée à 5 fait voir les parties qui multipliées l'une par l'autre font 40, celles-ci seront donc $5.\tilde{p}\,R_x.\tilde{m}.15$ et $5.\tilde{m}\,R_x.\tilde{m}.15$.

DÉMONSTRATION

Pour que la vraie signification de cette règle soit claire, soit à partager une ligne AB, que l'on pose égale à 10, en deux parties dont le rectangle doit être 40.



Comme 40 est le quadruple de 10, nous voulons le quadruple de la ligne AB tout entière. Soit donc le carré AD, de côté AC moitié de AB, de AD on retranche le quadruple de AB. S'il restait quelque chose, sa racine carrée, respectivement ajoutée et retranchée à AC nous donnerait les parties cherchées. Mais, comme le reste est moins [que zéro], tu imagineras $\tilde{m}.15$, qui est la différence de AD avec le quadruple de AB, que tu dois ajouter et retrancher de AC, tu auras ce qui était cherché, à savoir $5.\tilde{p}\,R_x.\mathrm{v}.25.\tilde{m}.40$ et $5.\tilde{m}.\,R_x.\mathrm{v}.25.\tilde{m}.40$ qui sont $5.\tilde{p}\,R_x.\tilde{m}.15$ et $5.\tilde{m}\,R_x.\tilde{m}.15$. Fais le produit de $5.\tilde{p}\,R_x.\tilde{m}.15$ par $5.\tilde{m}\,R_x.\tilde{m}.15$, une fois passés les supplices, tu trouveras $25.\tilde{m}.\tilde{m}.15$, ce qui est $\tilde{p}.15$, et donc ce produit est 40. Cependant la nature de AD n'est pas la même que la nature de 40, ou de AB car une surface est loin de la nature du nombre ou de la ligne, cependant plus proche de cette quantité, qui est vraiment sophistiquée, parce qu'à travers elle l'on ne peut poursuivre les travaux, comme avec les purs moins et les autres, ni rechercher ce qu'il en serait si l'on ajoutait le carré de la moitié du nombre au nombre produit et si l'on ajoutait et retranchait à la racine carrée du résultat la moitié du dividende. Dans l'exemple, où il faut partager 10 en deux parties dont le produit est 40, si tu ajoutais 40 à 25, carré de la moitié de 10, cela ferait 65, et si tu ajoutais et retranchais 5 à la racine carrée de ce nombre, tu aurais de façon semblable les parties $R_x.65.\tilde{p}.5$ et $R_x.65.\tilde{m}.5$. Mais ces nombres diffèrent de 10, et leur somme ne vaut pas 10 mais $R_x.260$. Et la subtilité arithmétique est poussée jusqu'à cet extrême dont, comme je l'ai dit, la subtilité est telle qu'il en est inutile.

TEXTE n°2 : extraits de *Alegra* de Bombelli, livre I (page 169)

Ho trouato un'altra ſorte di R.c.legate molto differenti dall'altre, laqual naſce dal Capitolo di cubo eguale à tanti, e numero, quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della meta del numero come in eſſo Capitolo ſi dimoſtrarà, laqual ſorte di R. q. hà nel ſuo Algoriſmo diuerſa operatione dall'altre, e diuerſo nome; per che quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero; lo eccesso loro non ſi può chiamare ne piú, ne meno, però lo chiamarò più di meno, quando egli ſi douerà aggiongere, e quando ſi douerà cauare, lo chiamerò men di meno, e queſta operatione è neceſſarijſſima più che l'altre R.c. L. per riſpetto delli Capitoli di potenze di potēze, accompagnati cō li cubi, ò tanti, ô con tutti due inſieme, che molto più ſono li caſi dell'agguagliare doue ne naſce queſta ſorte di R. che quelli doue naſce l'altra, la quale parerà à molti più toſto ſofiſtica, che reale, e tale opinione hò tenuto anch'io, fin' che hò trouato la ſua dimoſtratione in linee (come ſi dimoſtrarà nella dimoſtratione del detto Capitolo in ſuperficie piana) e prima trattarò del Moltiplicare, ponendo la regola del più & meno.

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia menò di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di menò uia men di meno fà meno.

Traduction (personnelle) de ce texte :
J'ai trouvé une autre sorte de racines cubiques liées (*R.c.legate*) très différente des autres, laquelle paraît au chapitre du cube égal aux quantités [ou aux choses] et au nombre, quand le cube du tiers des quantités est supérieur au carré de la moitié du nombre comme cela sera démontré dans ce chapitre, laquelle sorte de racine carrée a, dans son algorithme, une autre opération que les autres, et un nom différent ; parce que lorsque le cube du tiers des quantités est supérieur au carré de la moitié du nombre, leur excès ne peut appelé ni plus ni moins, cependant je l'appellerai plus de moins (*più di meno*) quand il faudra l'ajouter et quand il faudra le retrancher, je l'appellerai moins de moins (*meno di meno*) ; et cette opération est plus nécessaire que les autres racines cubiques liées (*R.c.L*) concernant les chapitres de puissances de puissances, accompagnées de cubes ou de quantités ou des deux ensemble, et les cas d'équations faisant apparaître cette sorte de racines sont beaucoup plus nombreux que ceux faisant apparaître les autres. Celle-ci paraîtra à beaucoup plutôt sophistiquée que réelle, et j'ai eu cette même opinion, jusqu'à ce que j'aie trouvé sa démonstration en lignes (comme cela sera démontré dans la preuve dudit chapitre sur les superficies planes) et d'abord, je traiterai de la multiplication, en posant la règle du plus et du moins (*la regola del più & meno*) :
plus par plus de moins donne plus de moins (*più via più di meno fa più di meno*), …

m. di m. 1. m. 1.
m. di m. 1. m. 1.

m. 1. p. di m. 1. p. di m. 1. p. 1.

p. di m. 2.
m. di m. 1. m. 1.

Cubato 2. m. di m. 2.

3. p. di m. 4.
3. p. di m. 4.

9. m. 16. p. di m. 12. p. di m. 12.

m. 7. p. di m. 24.
3. p. di m. 4.

m. 21. m. 96. p. di m. 72. m. di m. 28.

m. 117. p. di m. 44.

Sommare di p. di m. & m. di m.

Lo ſommare di p. di m. e m. di m. hà le ſue regole (come nell'altre) le quali ſi poneranno con la breuità ſolita.

Più con p. di m. non ſi può ſommare, ſe non dire piu p. di m. come ſe ſi diceſſe (ſommiſi p. 5. con p. di m. 8) fa 5. p. di m. 8, & il medeſimo del m. di m.

Più di m. con p. di m. ſi ſomma, e fà p. di m.

Più di m. con m. di m. ſi caua, e lo reſtante è del nome della maggior quantità.

Men di m. con m. di m. ſi ſomma, & fa m. di m.

Sommiſi p. di m. 8. con m. di m. 5. fa p. di m. 3.
Sommiſi p. di m. 15. con m. di m. 28. fa m. di m. 13.
Sommiſi m. di m. 12. con m. di m. 6. fa m. di m. 18.
Sommiſi p. di m. 6. con p. di m. 15. fa p. di m. 21.

Et eſſendo chiara per li eſſempij propoſti la operatione, uerrò alle R c. L. doue ſtà la importanza, & doue il caſo può intrauenire.

TEXTE n°3 : extraits de *Essai sur la représentation analytique de la direction* de Wessel

§ 4.

Le produit de deux segments de droite doit, sous tous les rapports, être formé avec l'un des facteurs de la même manière que l'autre facteur est formé avec le segment positif ou absolu qu'on a pris égal à 1; c'est-à-dire que:

1° Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive;

2° Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité;

3° En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa déviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs.

§ 5.

Désignons par $+1$ l'unité rectiligne positive, par $+\varepsilon$ une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine: alors l'angle de direction de $+1$ sera égal à 0°, celui de -1 à 180°, celui de $+\varepsilon$ à 90° et celui de $-\varepsilon$ à $-90°$ ou à 270°; et selon la règle que l'angle de direction du produit est égal à la somme de ceux des facteurs, on aura: $(+1)\cdot(+1) = +1$, $(+1)\cdot(-1) = -1$, $(-1)\cdot(-1) = +1$, $(+1)\cdot(+\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+1)\cdot(-\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(+\varepsilon) = -\varepsilon$, $(-1)\cdot(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(+\varepsilon)\cdot(+\varepsilon) = -1$, $(+\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = +\varepsilon$, $(-\varepsilon)\cdot(-\varepsilon) = -1$.

Il en résulte que ε est égal à $\sqrt{-1}$ et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucune des règles d'opération ordinaires.

§ 6.

Le cosinus d'un arc de cercle ayant pour origine l'extrémité de son rayon $+1$ est le segment de ce rayon ou du rayon diamétralement opposé qui commence au centre et se termine à la projection orthogonale de l'autre bout de l'arc. Le sinus du même arc est mené perpendiculairement de l'extrémité du cosinus à l'extrémité de l'arc.

D'après le § 5, le sinus d'un angle droit est donc égal à $\sqrt{-1}$. Posons $\sqrt{-1} = \varepsilon$; désignons par v un angle quelconque et par $\sin v$ un segment de la même longueur que le sinus de l'angle, mais positif lorsque l'arc qui mesure l'angle se termine sur la première demi-circonférence, négatif lorsqu'il se termine sur la dernière demi-circonference. Alors d'après les §§ 4 et 5, $\varepsilon \sin v$ exprimera le sinus de l'angle v en direction et en grandeur.

§ 7.

Conformément aux §§ 1 et 6, le rayon qui commence au centre et dévie de l'angle v de l'unité positive ou absolue est égal à $\cos v + \varepsilon \sin v$. Or, d'après le § 4, le produit de deux facteurs dont l'un fait avec l'unité l'angle v, et l'autre l'angle u, fera avec la même unité l'angle $u + v$. Donc, lorsqu'on multiplie le segment de droite $\cos v + \varepsilon \sin v$ par le segment $\cos u + \varepsilon \sin u$, le produit sera un segment de droite dont l'angle de direction est égal à $v + u$. Par conséquent on peut, d'après les §§ 1 et 6, désigner le produit par $\cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u)$.

§ 8.

On peut encore exprimer d'une autre manière ce produit

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) \quad \text{ou} \quad \cos(u+v) + \varepsilon \sin(u+v)$$

en formant la somme des produits partiels obtenus en multipliant chacun des segments dont la somme constitue l'un des facteurs par chacun des segments dont la somme constitue l'autre facteur. On aura ainsi

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v),$$

ce qui est une conséquence des deux formules bien connues de la trigonométrie

$$\cos(v+u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u,$$
$$\sin(v+u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v.$$

TEXTE n°4 : extraits de *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* de Argand

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$
$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : +x :: +x : -1.$$

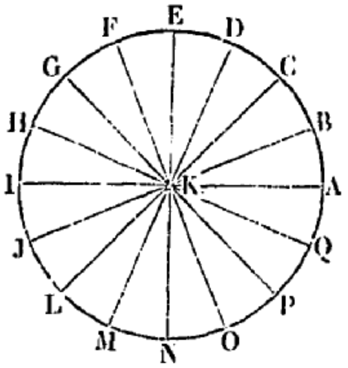
On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de o la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (*fig.* 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condi-

tion à laquelle il s'agit de satisfaire sera remplie par la ligne KE, perpendiculaire aux précédentes et considérée

Fig. 1.



comme ayant sa direction de K en E, et qu'on exprimera également par $\overline{KE}$. En effet, la direction de $\overline{KA}$ est, à l'égard de la direction de $\overline{KE}$, ce que cette dernière est à l'égard de la direction de $\overline{KI}$. De plus, on voit que cette même condition est aussi bien remplie par $\overline{KN}$ que par $\overline{KE}$, ces deux dernières quantités étant entre elles comme $+1$ et -1, ainsi que cela doit être. Elles sont donc ce qu'on exprime ordinairement par $+\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$.