Rallye Mathématique d'Auvergne

12 mars 2019

Qualifications

Corrigé

Sommaire

Problème 1 : La toile de l'araignée **1**

Problème 2 : Le réveil de l'ourse **7**

Problème 3 : Les fourmis **9**

Problème 4 : Le repas du héron **11**

Problème 5 : Les hérissons fâchés **13**

Problème 6 : La promenade du canard **15**

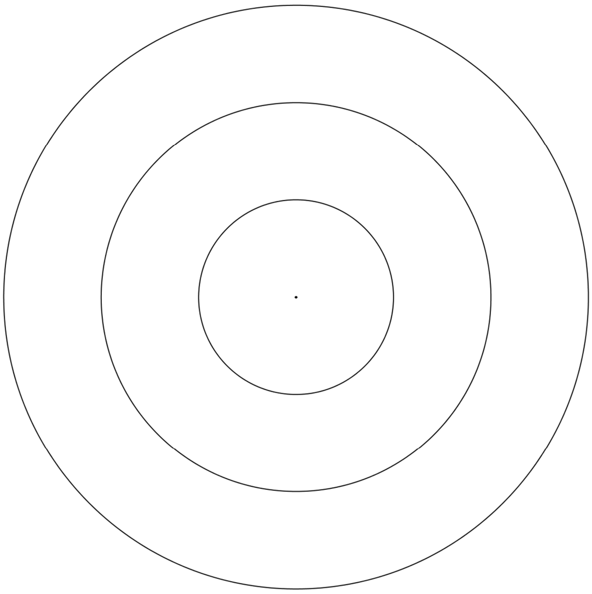
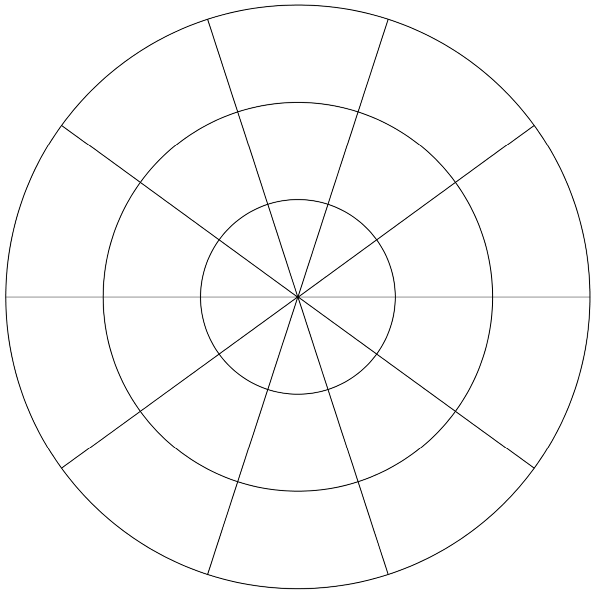
Problème 7 : Le butin des singes **19**

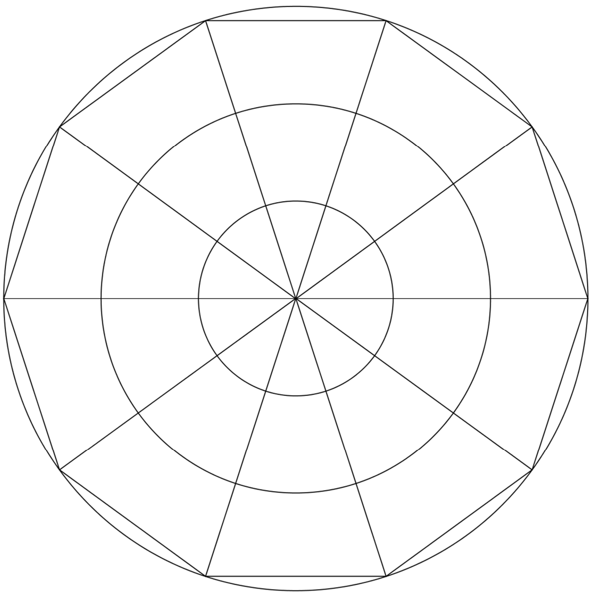
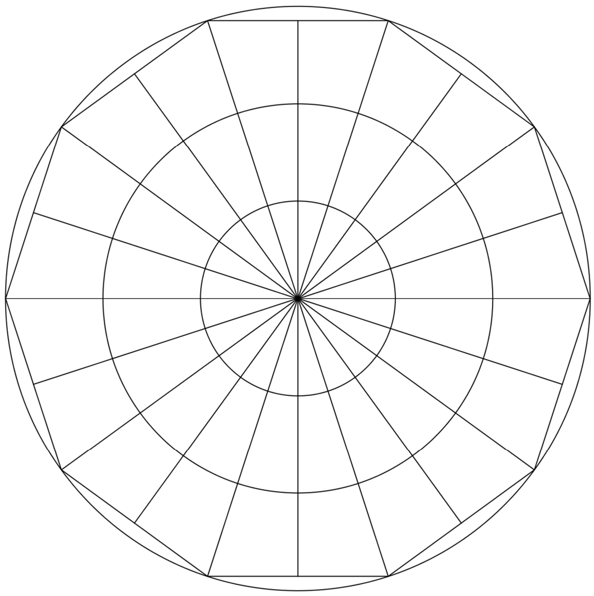
Problème 1 : La toile de l'araignée

niveau 1

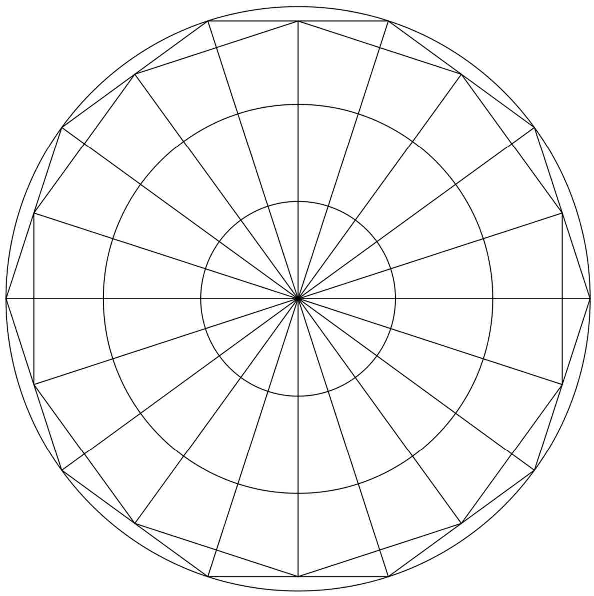
Corrigé de l'araignée

Un protocole complet pour tracer ce dessin serait trop long, c'est pourquoi, nous vous proposons donc une version résumée et raccourcie. La principale difficulté est de ne pas se perdre dans la figure à partir de l'étape 5, en particulier entre les « rayons » tracés aux étapes 2 et 4 qui ne jouent pas les mêmes rôles. Avant de commencer une étape à partir de la 5, il est conseillé de vérifier deux fois plutôt qu'une qu'on commence le tracé à partir du bon point sur le bon rayon.

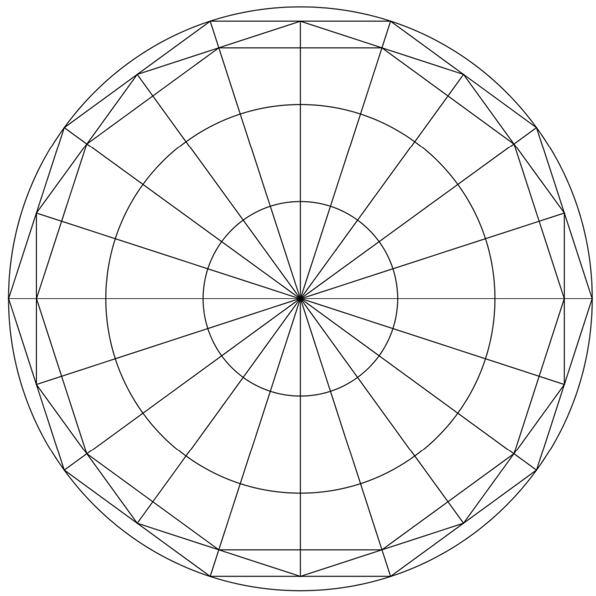
Etape 1 : Tracer au crayon 3 cercles de même centre et de rayon 3 cm, 6 cm et 9 cm. 	Etape 2 : Tracez 10 rayons au grand cercle, formant des angles au centre de $2 \times 18°$ soit $36°$. 

Etape 3 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier. 	Etape 4 : Joignez les centres des côtés du décagone au centre des cercles ; ils sont perpendiculaires aux côtés du décagone ; ils forment, avec les rayons de l'étape 2, des angles au centre de $18°$. 

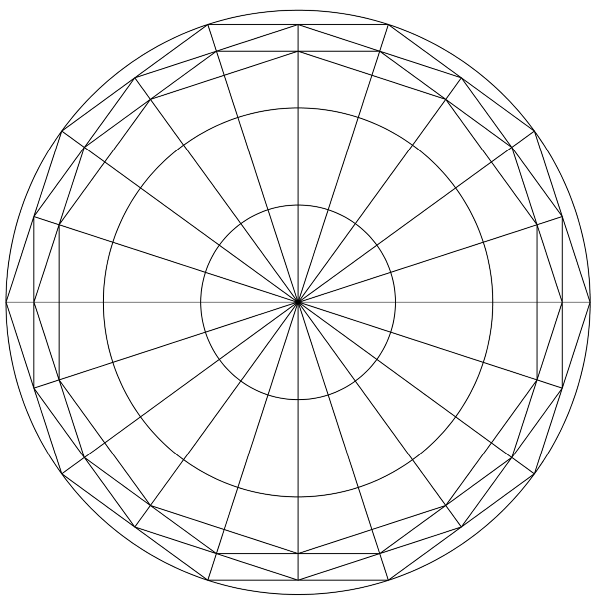
Etape 5 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



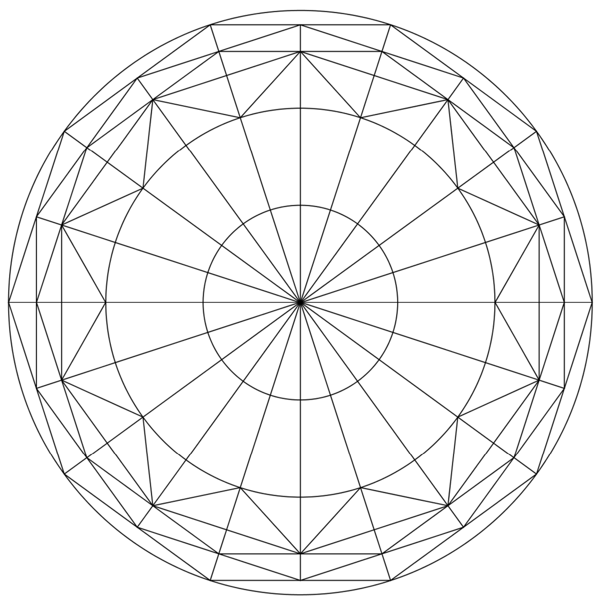
Etape 6 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



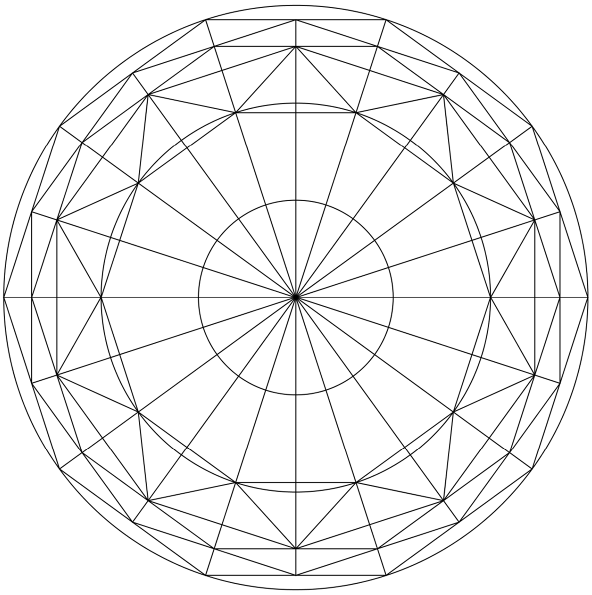
Etape 7 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



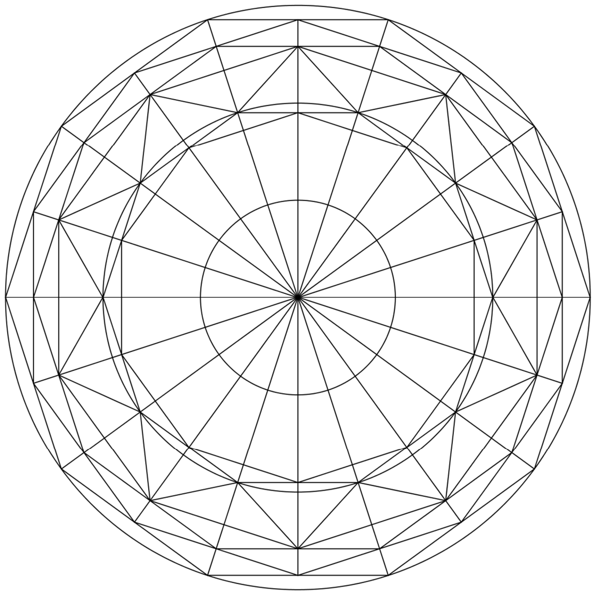
Etape 8 : Joignez par 20 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment une étoile à 10 branches.



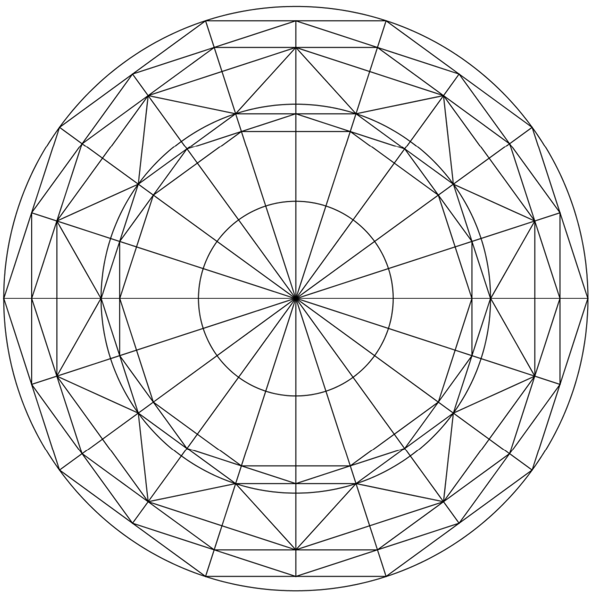
Etape 9 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



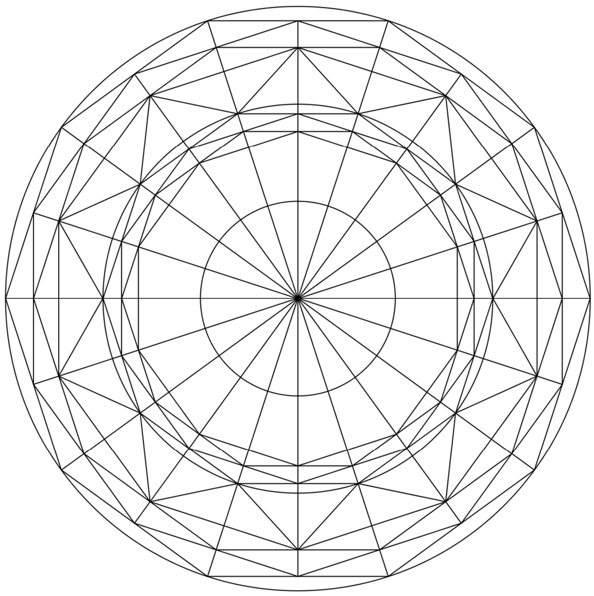
Etape 10 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



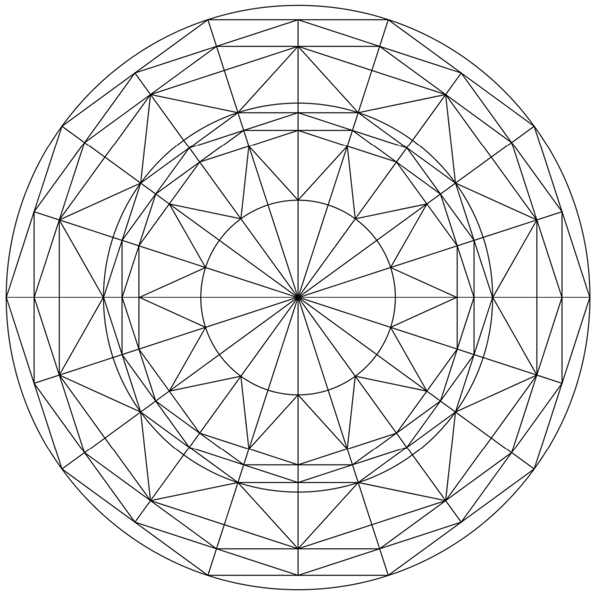
Etape 11 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



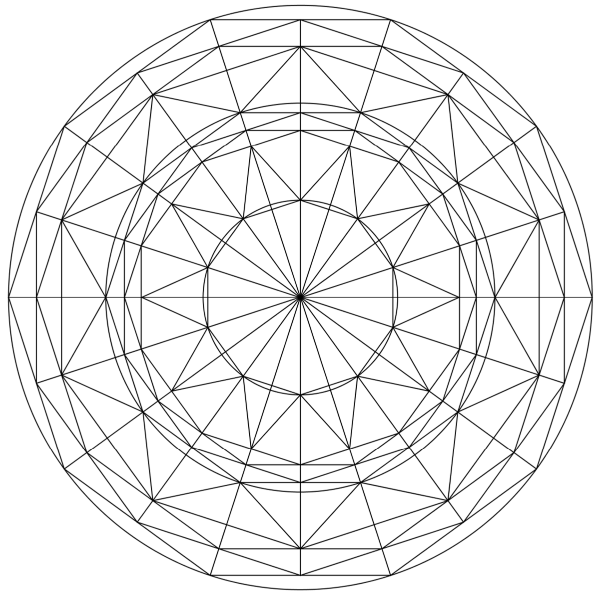
Etape 12 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



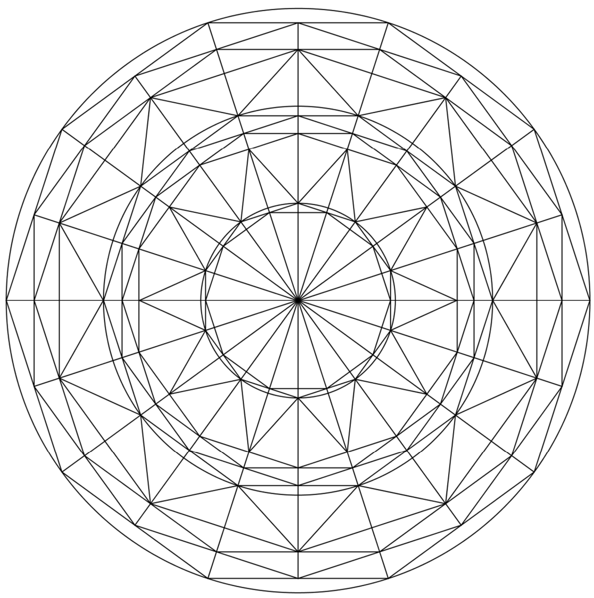
Etape 13 : Joignez par 20 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment une étoile à 10 branches.



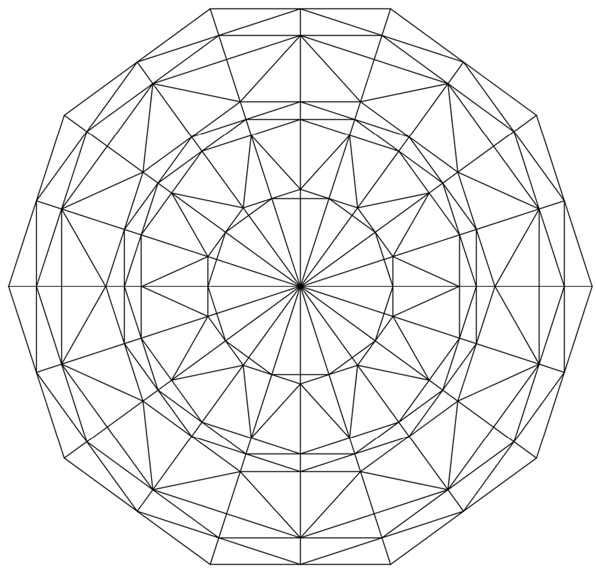
Etape 14 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



Etape 15 : Joignez par 10 segments, les points de la figure comme-ci-dessous ; ils forment un décagone régulier.



Etape 16 : Effacez les 3 cercles de l'étape 1.



Problème 2 : Le réveil de l'ourse niveau 1

Nous allons présenter deux approches pour trouver la réponse à la question.

1. **Lister toutes les heures affichables par le réveil.**
   On peut utiliser deux colonnes d'un tableur, comme ci-dessous :

B2 =MOD(B1+A2;24)

	A	B	C
1		6	10
2	1	7	11
3	2	8	12
4	3	9	13
5	4	10	14
6	5	11	15
7	6	12	16
8	7	13	17
9	8	14	18
10	9	15	19
11	10	16	20
12	11	17	21
13	12	18	22
14	13	19	23
15	14	20	24
16	15	21	25
17	16	22	26
18	17	23	27
19	18	0	28
20	19	1	29
21	20	2	30

Avec en C2 la formule : `=MOD(C1+A2;60)`

Remarque : si l'on n'utilise qu'une seule colonne en partant de 6 :10, il faut alors corriger manuellement la liste obtenue car cette méthode fait passer par exemple de 7 :59 à 9 :00, alors que la touche du réveil transforme 7 en 8 et 59 en 00, donc le réveil affiche 8 :00.

   On constate qu'à la 121^{me} ligne, on retrouve 6 :10. A partir de ce moment, les valeurs vont se répéter. On a donc obtenu toutes les heures affichables.
   On en déduit que :
   — On ne peut pas obtenir 7 :30
   — L'heure la plus proche de 7 :30 que l'on peut obtenir est 7 :35, que l'on obtient en appuyant 25 fois sur le bouton.

2. **Étudie les affichages en 7 :- -.**
   En appuyant une fois, le réveil passe de 6 :10 à 7 :11. Si on continue à appuyer, le réveil affichera à nouveau 7 :- - toutes les 24 pressions. Il affichera donc successivement :

nombre de pressions	heure affichée
1	7 :11
25	7 :35
49	7 :59
73	7 :23
97	7 :47
121	7 :11

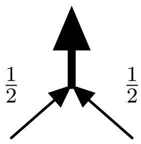
On constate que les heures se répètent en cycles de longueur 120, et qu'il n'y a que 5 façons d'afficher 7 heure.
Il n'est donc pas possible d'afficher 7 :30.
L'heure la plus proche est 7 :35.

Problème 3 : Les fourmis

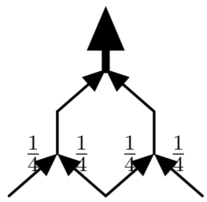
niveau 2

À chaque intersection, autant de fourmis arrivent de droite que de gauche. Pour trouver la réponse, il faut partir de la fin ! En effet, à la dernière étape, la moitié des fourmis doivent arriver de la droite, l'autre moitié de la gauche... On pourra raisonner avec des pourcentages ou plus simplement (afin d'éviter les nombres à virgule trop long) avec des fractions.

La moitié de la colonie arrive de droite, l'autre moitié de gauche soit $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

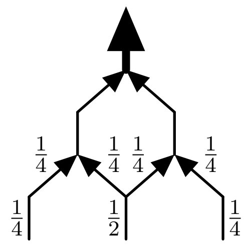


L'étape d'avant, il y a donc la moitié de la moitié (c'est-à-dire un quart) des fourmis qui arrivent de chaque coté :

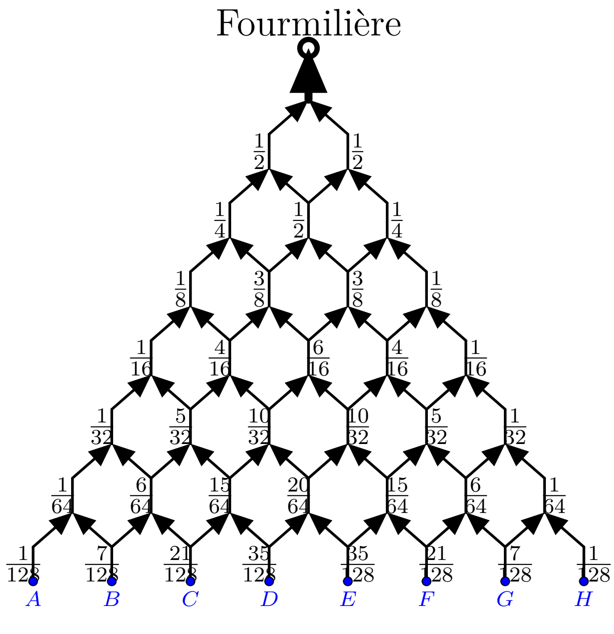


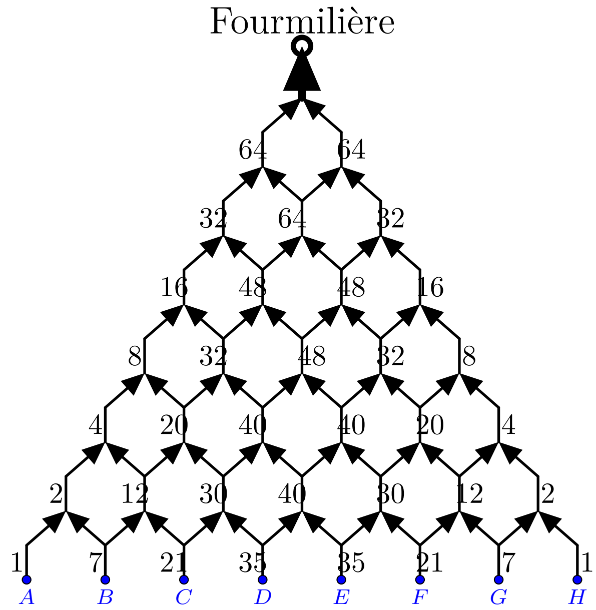
Et donc, comme

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$



On continue ainsi de suite pour obtenir le schéma suivant. Le nombre de fourmis étant un nombre entier, il y en a au moins 128. Le numérateur des fractions de la première ligne nous donne le nombre de fourmis de chaque point de départ. On peut ainsi compléter le schéma de droite :




Fourmilière
64
64
32
64
32
16
48
48
16
8
32
48
32
8
4
20
40
40
20
4
2
12
30
40
30
12
2
1
7
21
35
35
21
7
1
A
B
C
D
E
F
G
H

Problème 4 : Le repas du héron **niveau 2**

« Pour être sûr d'avoir au moins :

— deux grenouilles de la même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum 4 ;

On en déduit :

Il y a donc forcément trois couleurs de grenouilles.
En effet, dans le cas le moins favorable, le héron tire une grenouille bleue, une verte, une d'une autre couleur (supposons rouge pour la suite du problème), et la 4e fournira forcément une couleur déjà sortie.

— deux grenouilles de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum 12 ;

On en déduit :

Cela signifie qu'une couleur comporte 11 grenouilles.
Toujours en raisonnement dans le cas le moins favorable, on épuise toutes les grenouilles d'une couleur en ne tirant que cette couleur, et forcément la suivante fournira une autre couleur.

— deux grenouilles bleues, il faudrait que j'en prenne au minimum 10 ;

On en déduit :

Dans le cas le moins favorable, on pioche 8 grenouilles non bleues, pour ne pouvoir piocher ensuite que 2 bleues. Donc

$$\text{Vertes} + \text{Rouges} = 8$$

— deux grenouilles vertes, il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

On en déduit :

Dans le cas le moins favorable, on pioche 14 grenouilles non vertes, et on ne peut que piocher 2 vertes ensuite. Donc

$$\text{Bleues} + \text{Rouges} = 14$$

En récapitulant :

$$\begin{cases} \text{une couleur} = 11 \\ \text{Vertes} + \text{Rouges} = 8 \\ \text{Bleues} + \text{Rouges} = 14 \end{cases}$$

On en déduit forcément que ni vert, ni rouge ne peut avoir 11 grenouilles. Donc il y a 11 Bleues, et donc $14 - 11 = 3$ Rouges et enfin $8 - 3 = 5$ Vertes.

Comme $11 + 3 + 5 = 19$, on en déduit qu'**il y a 19 grenouilles dans l'étang**.

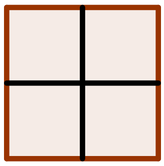
Problème 5 : Les hérissons fâchés niveau 3

Ajoutons les deux segments suivants qui relient les milieux des cotés opposés du carré. L'enclos des hérissons est donc découpé en quatre carrés de 1 mètre de coté.

Il y a cinq hérissons donc il y aura au moins un carré contenant deux hérissons.

La distance maximale entre deux points d'un carré étant sa diagonale, on la calcule (grâce à Pythagore) et on obtient $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Les deux hérissons présents dans le même carré sont donc à une distance inférieure ou égale à $\sqrt{2}$ mètres.



Problème 6 : La promenade du canard

niveau 3

Corrigé du canard

Une première méthode brute consisterait à tracer à la main le trajet complet du canard et ainsi réaliser la « spirale carrée » jusqu'au 2019^{e} fruit et répondre aux 3 questions à la lecture de ce schéma. Nous espérons que les élèves ne sont pas aussi patient·e·s.

Cependant, une telle réalisation pour les 20 ou 30 premiers fruits permettra d'observer la répartition des fruits dans ses particularités, sa régularité et de formuler des conjectures sur celles-ci.

Si dans un premier temps, les élèves énumèrent la liste des fruits dans l'ordre de leur pose, on obtient :

coing-coing-kumquat-coing-kumquat-coing-kumquat-kumquat-coing-kumquat-kumquat-coing-kumquat- kumquat- kumquat-coing-kumquat kumquat-kumquat-coing-…

Pour poursuivre, on peut simplement compter le nombre de kumquats entre deux coings :

coing-0 kumquat-coing-1 kumquat-coing-1 kumquat-coing-2 kumquats-coing-2 kumquats-coing-3 kumquats-coing-3 kumquats-coing-…

… qui peut encore être réduit en la liste des nombres de kumquats entre deux coings :

0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6,…

La règle de récurrence de cette suite peut être facilement appréhendée.
On peut interpréter cette suite comme la conséquence du fait que le canard doit, lorsqu'il avance dans une direction faire un pas de plus que lors du dernier mouvement dans le sens opposé pour dépasser le coing qui termine la ligne de fruit qu'il longe sur sa gauche.

On peut alors avancer de coings en coings de façon « automatique » :

Le coing n° 1 est le fruit n° 1.	
Le coing n° 2 est le fruit n° 2.	*1+0+1 = 2*
Le coing n° 3 est le fruit n° 4.	*2+1+1 = 4*
Le coing n° 4 est le fruit n° 6.	*4+1+1 = 6*
Le coing n° 5 est le fruit n° 9.	*6+2+1 = 9*
Le coing n° 6 est le fruit n° 12.	*9+2+1 = 12*
…	

le coing rajouté
nombre de kumquat(s) rajouté(s)
numéro de fruit du coing précédent

Pour répondre à la **question 1**, il suffit alors de regarder si le fruit n° 2 019 apparaît dans la suite de phrase précédente. Or on écrira que :

Le coing n° 88 est le fruit n° 1 980.	*1 936+43+1 = 1 980*
Le coing n° 89 est le fruit n° 2 025	*1 980+44+1 = 2 025*

… et on constate que **le fruit n° 2 019 est un kumquat** entre les coings n° 88 et 89.

Pour répondre à la **question 2**, dans cette même liste on constate que le dernier coing posé avant le fruit n° 2 019 est le coing n° 88, donc qu'il a été posé 88 coings au total depuis le départ du canard.

Pour répondre à la question 3, il faut raisonner encore un peu :

Après le coing n° 1, il dit « Kouin » 1 fois : au total, il l'a dit 1 fois. *1 = 1*
Après le coing n° 2, il dit « Kouin » 2 fois : au total, il l'a dit 3 fois. *1+2 = 3*
Après le coing n° 3, il dit « Kouin » 3 fois : au total, il l'a dit 6 fois. *3+3 = 6*
Après le coing n° 4, il dit « Kouin » 4 fois : au total, il l'a dit 10 fois. *6+4 = 10*
Après le coing n° 5, il dit « Kouin » 5 fois : au total, il l'a dit 15 fois. *10+5 = 15*
Après le coing n° 6, il dit « Kouin » 6 fois : au total, il l'a dit 21 fois. *15+6 = 21*
...

nombre total de « Kouin(s) » prononcé(s) au coings précédent
nombre de « Kouin(s) » prononcé(s) à ce coing

..., et finalement écrire :
Après le coing n° 88, il dit « Kouin » 88 fois : au total, il l'a dit 3 916 fois. *3 828+88 = 3 916*

..., pour conclure qu'**il a dit 3 916 fois « Kouin »**.

<u>Méthodes alternatives :</u>

1/ La feuille de calcul ci-dessous produit les mêmes calculs que ceux réalisé précédemment.

	A	B	C	D	E
1	**Lorsque le canard pose le coing n° ...,**	**il vient de poser ... kumquat(s) depuis le dernier coing.**	**Il a donc posé au total ... fruit(s). (autrement dit, ce coing est le fruit n° ...).**	**Il prononce à ce moment-là ... fois « Kouin »**	**Ce qui fait un total de ... « Kouin » prononcé depuis son départ.**
2	1	-	1	= A2	1
3	= A2 + 1	0	= C2 + B3 + 1		=E2 + D3
4		1			
5		= B3 + 1			
6					

<u>Note :</u> chaque formule écrite ci-dessus doit ensuite être étirée vers le bas.

La colonne B n'est pas si simple à coder, mais des élèves pourraient aussi entrer à la main les valeurs nécessaires (il y en a moins d'une centaine).

2/ Plutôt que de s'intéresser au nombre de kumquat(s) placé(s) entre deux coings, les élèves peuvent remarquer que les « coings impairs » forment avec leur numéro de fruit la suite croissantes de tous les carrés des entiers. On complétera cette liste soit à la main (en recomptant les kumquats comme dans la méthode proposée précédemment), soit par un constat similaire sur les « coings pairs » qui forment la suite croissante des produits de deux entiers consécutifs :

Coings impairs

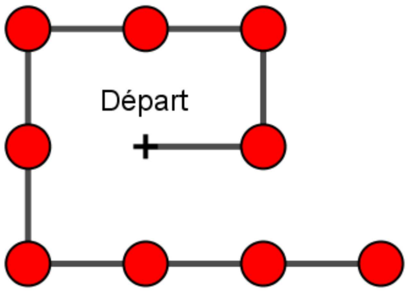
Le coing n° 1 est le fruit n° 1 $(=1^2)$.
Le coing n° 3 est le fruit n° 4 $(=2^2)$.
Le coing n° 5 est le fruit n° 9 $(=3^2)$.
Le coing n° 7 est le fruit n° 16 $(=4^2)$.

Coings pairs

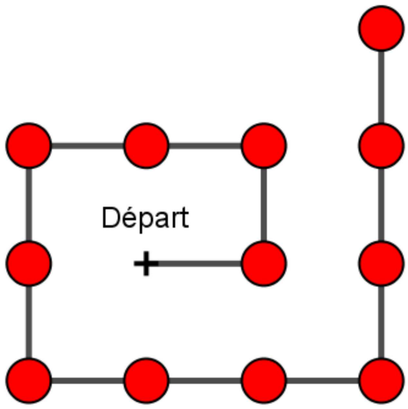
Le coing n° 2 est le fruit n° 2 (=1×2).
Le coing n° 4 est le fruit n° 6 (=2×3).
Le coing n° 6 est le fruit n° 12 (=3×4).
Le coing n° 8 est le fruit n° 20 (=4×5).

Cette curiosité peut-être visualisée en déplaçant le dernier coing posé sur le point de départ et en observant la « forme de l'ensemble des fruits ».

Coings impairs (forme « carré »)



Coings pairs (forme « rectangulaire »)



On peut alors répondre aux questions 1 et 2 sans faire beaucoup de calcul :

• En vérifiant que 2 019 n'est ni un carré d'entier ni un produit de deux entiers consécutifs on conclut que le fruit n° 2 019 n'est pas un coing (en effet $\sqrt{2\,019} \approx 44{,}933$ et $44 \times 45 \neq 2019$) ;

• En cherchant le carré d'entier et le produit de deux entiers consécutifs qui soient les plus grands possibles inférieurs à 2 019 (44^2 et 44×45), on trouve que le dernier coing posé est le coing n° 88.

La question 3 sera résolue de la même façon que dans la méthode présentée plus haut.

Problème 7 : Le butin des singes niveau 3

On note x le nombre de bananes que chaque singe a au départ.

Singes n°	1	2	3	4	5	La boîte contient
Au départ	x	x	x	x	x	0
À la fin du premier tour	0	$x+2$	$\frac{x}{2}$	$x+4$	x	$\frac{3}{2}x-6$
À la fin du deuxième tour	1	$x+2$	$\frac{x}{2}$	$x+8$	$\frac{x}{4}+3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 x-14$
À la fin du troisième tour	2	$-\frac{x}{8}+9$	$\frac{x}{2}+3$	$x+8$	$\frac{x}{4}+3$	$\left(\frac{3}{2}\right)^3 x-25$
À la fin du quatrième tour	2	$-\frac{x}{8}+9$	$\frac{x}{2}+6$	$-\frac{11}{6}x+\frac{41}{2}$	$\frac{x}{4}+8$	$\left(\frac{3}{2}\right)^4 x-\frac{91}{2}$
À la fin du jeu	0					$\left(\frac{3}{2}\right)^4 x-\frac{91}{2}+2$

Remarque : nous avons juste besoin de la quantité de bananes contenue dans la boîte car si un singe n'en a pas suffisamment, il peut en prendre dans la boîte d'un de ses camarades (sauf celui qui a proposé le jeu).

À la fin du jeu, la boîte contient $5x$ bananes car les quatre autres singes n'ont plus aucune banane.

On résout donc l'équation :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 x-\frac{91}{2}+2=5x$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{2}\right)^4 x-\frac{91}{2}+2 &= 5x\\
\left(\frac{81}{16}\right) x-\frac{87}{2} &= 5x\\
\left(\frac{81}{16}-5\right) x &= \frac{87}{2}\\
\left(\frac{1}{16}\right) x &= \frac{87}{2}\\
x &= \frac{87}{2}\times 16\\
x &= 696
\end{aligned}$$

Conclusion

Chaque singe avait au départ 696 bananes.