Corrigé Rallye Mathématique d'Auvergne 2016
19e édition

Voici un corrigé possible des exercices proposés :

Sujets communs à tous les niveaux

(1) Échauffement

Appelons A le nombre considéré.
On constate que $3333=101\times 33$.
Comme $\frac{2016}{4}=504$, 2016 s'écrit avec 504 tranches de 3333. A est donc la somme de 504 termes de la forme 3333×10^n , avec n entier positif ou nul.
Chacun de ces termes est divisible par 101, donc A est lui aussi divisible par 101.
Le reste de la division euclidienne de A par 101 est donc 0.

L'aiguille des heures tourne de $\frac{360}{(12\times 60\times 2)}=\frac{1}{4}=0,25$ degrés en 30 secondes.
L'aiguille des minutes tourne de $\frac{360}{(60\times 2)}=3$ degrés en 30 secondes.

Donc en 30 secondes, l'angle entre les deux aiguilles diminue de 2,75°.

Il est plus facile de déterminer l'angle entre les deux aiguilles à exactement 18h. Il est égal à 180°.
à 18:10:00, soit 10 minutes ou 20 périodes de 30 secondes plus tard, cet angle a diminué de $20\times 2,75=55\,°$, il est donc égal à 125°.
Pour que l'angle soit inférieur à 90°, il faut qu'il diminue au moins de 35°.
Pour ce faire, il faut au moins 13 périodes. ($\frac{35}{2.75}\approx 12,7$)
La première fois qu'Olivia verra l'angle inférieur à 90° est donc au bout de 13 périodes, soit 6 minutes et 30 secondes. Cela correspond à 18:16:30

1) $(12*11)*(12\times11)=6*132=18$

2)

a) $(2*5)*3=1*3=3$ et $2*(5*3)=2*6=3$

b) $2*(5+3)=2*8=7$ et $2*5+2*3=1+6=7$.

Dans les deux cas , les égalités sont vérifiées.

Lorsque l'on fait une preuve par 9, on fait la somme des chiffres du résultat, puis on répète cette somme jusqu'à ce que l'on obtienne un nombre compris entre 1 et 9 et cela donne le reste de la division du résultat par 9.
Ici, on ne fait la somme qu'une seule fois. Si le résultat est plus grand que 9, on n'obtient pas le reste de la division par 9 et il est possible que par un autre cacul, on trouve ce reste ou un autre nombre ayant le même reste.

Pour trouver un contre exemple, il faut tester des nombres dont la somme des chiffres est plus grande que 9.

Pour a) : $(83*125)*2=16*2=5$
mais $83*(125*2)=83*7=14$

Pour b) $9*(7+5)=9*12=9$ et $9*7+9*5=9+9=18$.

Dans les deux cas, les résultats sont différents mais ont bien le même reste dans la division par 9.

(2) Les trois mousquetaires

D'Artagnan s'étant trompé de 35 livres, le nombre total de livres est soit 440 ($475-35=440$), soit 510 ($475+35=510$).

Étudions les deux cas :

1. Cas où le nombre total de livres est 440

D'après l'énoncé, on a : $30\,\text{écus}+35\,\text{pistoles}=440\,\text{livres}$.
En divisant chaque membre de l'égalité par 5, on obtient : $6\,\text{écus}+7\,\text{pistoles}=88\,\text{livres}$.

Étudions toutes les éventualités :

Si un écu vaut :	alors 6 écus valent :		Si une pistole vaut :	Alors 7 pistoles valent :
1 livre	6 livres		1 livre	7 livres
2 livres	12 livres		2 livres	14 livres
3 livres	**18 livres**		3 livres	21 livres
4 livres	24 livres		4 livres	**28 livres**
5 livres	30 livres		5 livres	35 livres
6 livres	36 livres		6 livres	42 livres
7 livres	42 livres		7 livres	49 livres
8 livres	48 livres		8 livres	56 livres
9 livres	54 livres		9 livres	63 livres
10 livres	**60 livres**		10 livres	**70 livres**
11 livres	66 livres		11 livres	77 livres
12 livres	72 livres		12 livres	84 livres
13 livres	80 livres		13 livres	91 livres
14 livres	86 livres			
15 livres	92 livres			

Deux éventualités donnent comme résultat 88 livres :

- 18 livres + 70 livres, ce qui donne qu'un écu vaut 3 livres et qu'une pistole en vaut 10 ;
- 60 livres + 28 livres, ce qui donne qu'un écu vaut 10 livres et qu'une pistole en vaut 4.

La deuxième éventualité n'est pas possible, car l'énoncé dit qu'une pistole vaut plus qu'un écu.

La seule possibilité est donc qu'*un écu vaut 3 livres*.

2. **Cas où le nombre total de livres est 510**

D'après l'énoncé, on a cette fois : $30\,\text{écus} + 35\,\text{pistoles} = 510\,\text{livres}$.

En divisant chaque membre de l'égalité par 5, on obtient : $6\,\text{écus} + 7\,\text{pistoles} = 102\,\text{livres}$.

Étudions toutes les éventualités :

Si un écu vaut :	alors 6 écus valent :		Si une pistole vaut :	Alors 7 pistoles valent :
1 livre	6 livres		1 livre	7 livres
2 livres	12 livres		2 livres	14 livres
3 livres	**18 livres**		3 livres	21 livres
4 livres	24 livres		4 livres	28 livres
5 livres	30 livres		5 livres	35 livres
6 livres	36 livres		6 livres	**42 livres**
7 livres	42 livres		7 livres	49 livres
8 livres	48 livres		8 livres	56 livres
9 livres	54 livres		9 livres	63 livres
10 livres	**60 livres**		10 livres	70 livres
11 livres	66 livres		11 livres	77 livres
12 livres	72 livres		12 livres	**84 livres**
13 livres	80 livres		13 livres	91 livres
14 livres	86 livres		14 livres	98 livres
15 livres	92 livres		15 livres	105 livres
16 livres	98 livres			
17 livres	104 livres			

Seules deux éventualités donnent comme résultat 102 livres :

- 18 livres + 84 livres, ce qui donne qu'un écu vaut 3 livres et qu'une pistole en vaut 12 ;
- 60 livres + 42 livres, ce qui donne qu'un écu vaut 10 livres et qu'une pistole en vaut 6.

La deuxième éventualité n'est toujours pas possible, car l'énoncé dit qu'une pistole vaut plus qu'un écu.

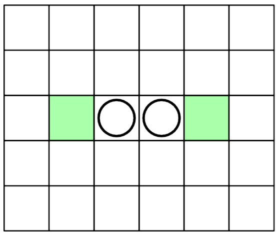
La seule possibilité est donc qu'*un écu vaut 3 livres*.

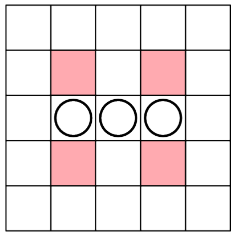
Dans chacun des deux cas, on trouve la solution : *un écu vaut 3 livres*.

(3) Jeu sur quadrillage

Emmy peut gagner en 7 coups (4 pour Emmy et 3 pour Sophie).

Après le premier coup d'Emmy, puis la réponse de Sophie, Emmy peut placer son deuxième rond à côté du premier, de sorte que les deux cases alignées et à côté de ces deux ronds soient libres (figure de gauche). Selon les cas, elle doit aligner le deuxième rond horizontalement ou verticalement.



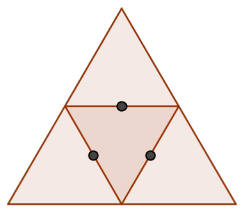
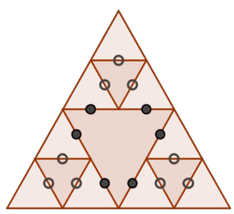
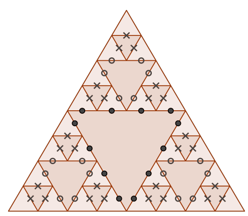


La réponse de Sophie remplira au plus une des deux cases vertes, donc au coup suivant, Emmy pourra jouer dans une des cases vertes de sorte qu'elle ait 3 ronds alignés.

Après la réponse de Sophie, Sophie aura joué 3 coups, donc au moins une des 4 cases rouges sera libre (figure de droite). Il suffit alors à Emmy de jouer dans une case rouge pour gagner.

(4) Les portes du musée de Sir Pinsky

On raisonne étape par étape (avec des schémas pour les premières étapes) :

Étape	Type de triangles		Nombres de portes associées à chaque type de triangle	Schéma
Étape 1 :	1	grand triangle	3	
Étape 2 :	1 3	grand triangle triangles plus petits	6 3	
Étape 3 :	1 3 9	grand triangle triangles plus petits triangles plus petits	12 6 3	

On en déduit le mécanisme de création des pièces et des portes pour les cas plus complexes :

- il y a toujours trois fois plus de « nouveaux » triangles (plus petits) à chaque étape ;
- il y a toujours deux fois plus de portes à chaque étape pour chaque type de triangle (car on partage les murs en deux).

On peut terminer le tableau :

Étape	Type de triangles		Nombres de portes associées à chaque type de triangle
Étape 4 :	1	grand triangle	24
	3	triangles plus petits	12
	9	triangles plus petits	6
	27	triangles plus petits	3
Étape 5 :	1	grand triangle	48
	3	triangles plus petits	24
	9	triangles plus petits	12
	27	triangles plus petits	6
	81	triangles plus petits	3
Étape 6 :	1	grand triangle	96
	3	triangles plus petits	48
	9	triangles plus petits	24
	27	triangles plus petits	12
	81	triangles plus petits	6
	243	triangles plus petits	3
Étape 7 :	1	grand triangle	192
	3	triangles plus petits	96
	9	triangles plus petits	48
	27	triangles plus petits	24
	81	triangles plus petits	12
	243	triangles plus petits	6
	729	triangles plus petits	3

On en déduit le nombre de portes à la septième étape :

$192\times1+96\times3+48\times9+24\times27+12\times81+6\times243+3\times729=6177$.

Sujets collège

(5) Tableau

On note :
(1) "Son chiffre des centaines est 5."
(2) "Son chiffre des dizaines est 5."
(3) "C'est un multiple de 5."
(4) "Il est plus grand que le carré du triple de 5."
(5) "La somme de ses chiffres est égale au nombre entier qui suit 5."
(6) "C'est un nombre premier."

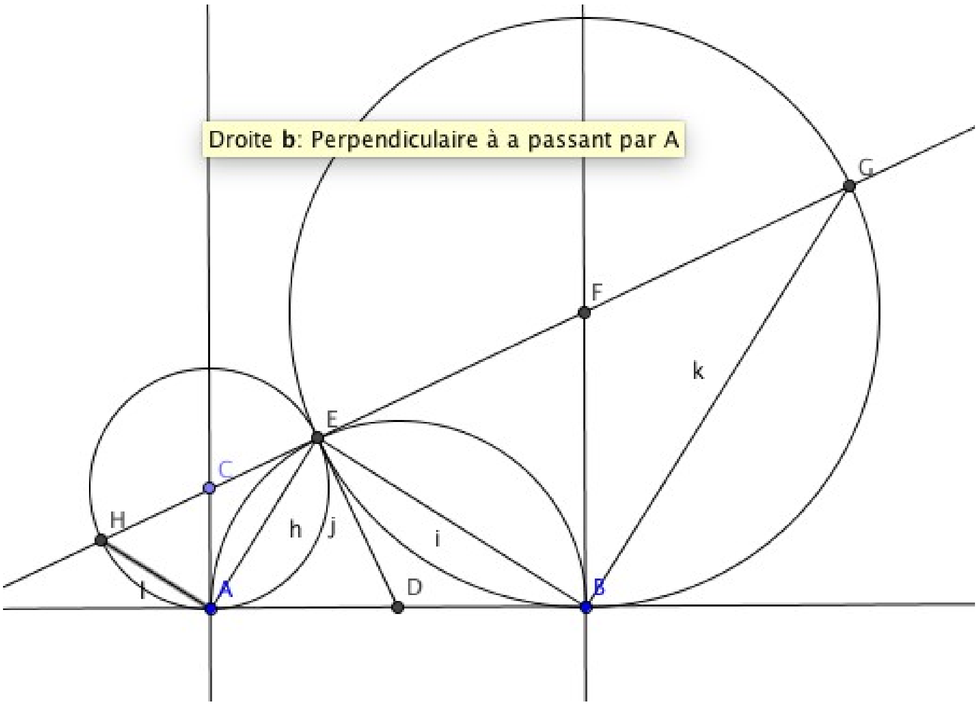
On peut remarquer que certaines propositions sont contradictoires :
_ (3) et (6)
_ (1) et (2), car d'après l'énoncé : le nombre mystère est composé de trois chiffres distincts.

Puisqu'il y a deux propos faux, on en déduit que :
_ (3) ou (6) est faux. (mais l'un des deux est vrai)
_ (1) ou (2) est faux. (mais l'un des deux est vrai)
_ (4) et (5) sont vrais. Donc le nombre mystère est plus grand que $(3x5)^2$, soit 225 (4). De plus, la somme de ses chiffres est égale à 6 (5).

En utilisant (5) et le fait que "(1) ou (2) est vrai", on déduit que le nombre mystère est nécessairement composé des trois chiffres 5, 1 et 0. Les possibilités sont donc :
_ 015 : Impossible puisque d'après l'énoncé le chiffre des centaines n'est pas égale à zéro.
_ 051 : Impossible pour la même raison que ci-dessus.
_ 105 : Impossible d'après (4).
_ 150 : Impossible d'après (4).
_ 501 : Impossible car (3) ou (6) doit être vrai.
_ **510** : C'est le seul candidat qui répond à toutes les conditions. On a alors (1), (3), (4) et (5) qui sont vrais tandis que (2) et (6) sont faux. **510 est donc le nombre mystère !**

(6) **Sangaku**

Solution :



Solution :
Le triangle
AEB est rectangle. (ADEC est un cerf-volant, ainsi que DBFE donc DA=DE=DB)
On construit donc le demi cercle ayant pour centre le milieu D de [AB] et de diamètre [AB]. Son intersection avec le cercle de centre C et de rayon [AC] donne le point E. Le centre du second cercle est sur la droite (CE) et se projette orthogonalement sur la droite (AB) en B.

Pour démontrer la relation cherchée :
Les triangles HAE et EBG sont rectangles, leurs côtés sont deux à deux parallèles, donc

$$\frac{HE}{EG}=\frac{HA}{EB}=\frac{AE}{BG}$$

Les droites (HA) et (EB) sont parallèles et coupent (OE) et (OB) en H, E et A, B donc

$$\frac{HE}{AB}=\frac{HA}{EB}\ .$$

De même avec les droites (EA) et (GB) on obtient :

$$\frac{AB}{EG}=\frac{AE}{BG}$$

De ces égalités, on déduit $\frac{AB}{EG}=\frac{HE}{AB}$ soit, avec les notations de l'énoncé :

$$\frac{AB}{d}=\frac{D}{AB}$$

Sujets lycée général et lycée technologique

(7) Moulinette

(1) * 35 = 3 × 11 + 2 : le reste de la division euclidienne de 35 par 3 est 2,
donc la moulinette calcule 35 × 5 – 1 = 174.
* 174 = 3 × 58 : le reste de la division euclidienne de 174 par 3 est 0,
donc la moulinette calcule 174 ÷ 3 = 58.
* 58 = 3 × 19 + 1 : le reste de la division euclidienne de 58 par 3 est 1,
donc la moulinette calcule 58 × 5 + 1 = 291.
En poursuivant le résultat, on obtient la suite de nombres :
35 ; 174 ; 58 ; 291 ; 97 ; 486 ; 162 ; 54 ; 18 ; 6 ; 2 ; 9 ; 3 ; 1.
Le calcul s'arrête donc au bout de 13 étapes.

(2) Voici plusieurs façons différentes d'arriver au résultat, qui est de 810 étapes :

(a) avec un tableur :

A2 | =SI(MOD(A1;3)=0;A1/3;SI(MOD(A1;3)=1;5*A1+1;5*A1-1))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	86							
2	429							
3	143							
4	714							
5	238							
6	1191							
7	397							
8	1986							
9	662							
10	3309							
11	1103							
12	5514							
13	1838							
14	9189							

On rentre la formule dans la case A2, puis on la recopie vers le bas. Le nombre « 1 » apparaît pour la première fois dans la case A811, il faut donc 810 étapes pour l'atteindre.

(b) avec un programme :

Voici 3 versions différentes du même programme. La variable « n » contient le nombre qui est transformé par la moulinette, et la variable « c » compte le nombre d'étapes.

* avec une calculatrice Casio :

```
?→N↵
0→C↵
While N≠1↵
C+1→C↵
If (N-3×Int (N÷3))=0↵
Then N÷3→N↵
Else If (N−3×Int(N÷3))=1↵
Then N×5+1→N↵
```

```
Else N×5-1→N↵
IfEnd↵
IfEnd↵
WhileEnd↵
C↵
```

* <u>avec une calculatrice TI :</u>

```
:Input N
:0→C
:While N≠1
:C+1→C
:If (N-3*Int (N/3))=0
:Then
:N/3→N
:Else
:If (N−3×Int(N/3))=1
:Then
:N×5+1→N↵
:Else
:N×5-1→N
:End
:End
:End
:Disp C
```

<u>* avec Algobox :</u>

```
VARIABLES
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  c PREND_LA_VALEUR 0
  n PREND_LA_VALEUR 86
  TANT_QUE (n!=1) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    c PREND_LA_VALEUR c+1
    SI (n%3==0) ALORS
      DEBUT_SI
      n PREND_LA_VALEUR n/3
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        SI (n%3==1) ALORS
          DEBUT_SI
          n PREND_LA_VALEUR 5*n+1
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            n PREND_LA_VALEUR 5*n-1
            FIN_SINON
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER c
FIN_ALGORITHME
```

(8) Le lièvre et la tortue

Lorsqu'on additionne les 4 probabilités des secteurs données la somme doit faire 1, donc :

$$0{,}2+p+\frac{1}{40}+2p+\frac{1}{4}p+0{,}325-p=1$$
$$\frac{11}{20}+\frac{9}{4}p=1$$
$$\frac{9}{4}p=\frac{9}{20}$$
$$p=0{,}2$$

A partir de là, on peut déterminer la probabilité d'apparition du secteur 4 : 12,5%.

Donc la tortue gagne si le 4 ne sort pas pendant 6 tours de suite, donc :
$(1-0{,}125)^6=0{,}875^6\approx0{,}448$ soit environ 45%.

On en déduit que la tortue a une probabilité de gagner inférieure à celle du lièvre (55%), c'est donc le lièvre qui a la plus grande chance de gagner !

De plus on peut par suite refaire et compléter le tableau de la façon suivante :

Secteur	1	2	3	4
Probabilité d'apparition	$20\,\%$	$p+\frac{1}{40}=22{,}5\,\%$	$2p+\frac{1}{4}p=45\,\%$	$0{,}325-p=12{,}5\,\%$
Valeur de l'angle	72°	81°	162°	45°

Ainsi on obtient la roue suivante :