Rallye Mathématique d'Auvergne 2016

19e édition

académie Clermont-Ferrand

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE

À vous, maintenant, jeunes collégiens et lycéens d'Auvergne de faire preuve de vos qualités de réflexion, d'initiative, d'imagination ! Au sein de votre équipe, les connaissances et compétences de chacun seront nécessaires pour venir à bout des exercices originaux et astucieux que l'équipe d'élaboration des sujets vous a préparés.

Mais malgré les difficultés que vous allez rencontrer, vous devez en être persuadés, le succès est à votre portée !

Bon rallye 2016 !

Françoise Barachet,
IA-IPR mathématiques

Jean-Alain Roddier,
IA-IPR mathématiques

Claire Marlias,
IEN-ET-EG mathématique-sciences

Contacts

Anne Crouzier,
professeur de mathématiques,
anne.crouzier@wanadoo.fr

Lucas Girard,
professeur de mathématiques,
Lucas.Girard1@ac-clermont.fr

15 mars 2016

Épreuves interclasses troisièmes et secondes

Les consignes

- Les calculatrices et les ordinateurs sans accès internet sont autorisés.
- La solution de chacun des quatre problèmes communs et des deux sujets correspondant au niveau de la classe sera rédigée sur une des feuilles jointes.
- Chaque feuille portera :
  - ✔ le nom de la classe,
  - ✔ le nom de l'établissement,
  - ✔ le numéro du problème,
  - ✔ ainsi que l'effectif de la classe et des participants.
- Pour chaque problème, le jury évaluera :
  - ✔ l'exactitude de la (ou des) réponse(s) aux questions posées,
  - ✔ l'argumentation,
  - ✔ la présentation.
- Le jury appréciera à la fois la qualité esthétique, l'originalité et la qualité des contenus mathématiques.

Conception et Rédaction : IREM, APMEP, IA-IPR de mathématiques.
Impression : rectorat.

Sujets communs à tous les niveaux

(1) Echauffement

Un nombre est constitué de 2016 chiffres, chacun étant le chiffre 3.
Quel reste obtient-on si l'on effectue la division euclidienne de ce nombre par 101 ?

Dans l'exercice, les heures sont données sous le format hh:mm:ss.
L'horloge de la gare indique exactement 18:10:00.
Olivia regarde l'horloge toutes les 30 secondes.

Parmi les propositions suivantes, quelle est l'heure à laquelle, pour la première fois, elle verra que l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes est inférieur à 90° ?

a) 18:14:30 b) 18:15:00 c) 18:15:30 d) 18:16:00 e) 18:16:30 f) 18:17:00 g) 18:17:30

Les nombres a et b sont des entiers positifs. On définit $a * b$ par la somme des chiffres du produit de a par b. Par exemple : $3 * 8 = 6$ et $35 * 17 = 19$.
Les opérations usuelles sur les entiers sont notées : $+$, $-$ et $\times$.

1) Calculer : $(12 * 11) * (12 \times 11)$.

2) Montrer que :
a) $(2 * 5) * 3 = 2 * (5 * 3)$.
b) $2 * (5 + 3) = 2 * 5 + 2 * 3$.

3) Ces résultats ne se généralisant pas à tous les entiers,
a) trouver trois entiers a, b, c tels que : $a * (b * c) \neq (a * b) * c$;
b) trouver trois entiers e, f, g tels que : $e * (f + g) \neq e * f + e * g$.

(2) Les trois mousquetaires

Voici un extrait du célèbre roman d'Alexandre Dumas, *Les trois mousquetaires* :

— Maintenant, calculons combien nous possédons en tout :
« Porthos ?
— Trente écus.
— Aramis ?
— Dix pistoles.
— Et vous, d'Artagnan ?
— Vingt-cinq [*pistoles*].
— Cela fait en tout ? dit Athos.
— Quatre cent soixante-quinze livres ! » dit d'Artagnan, qui comptait comme Archimède.

On sait que :

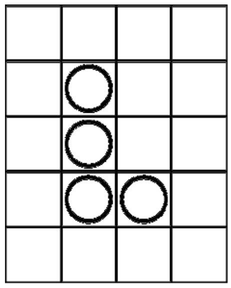
- une pistole a plus de valeur qu'un écu ;
- une pistole et un écu valent chacun un nombre entier de livres ;
- d'Artagnan s'est trompé de 35 livres ;
- Athos n'a pas participé.

Combien un écu vaut-il de livres ?

(3) Jeu sur quadrillage

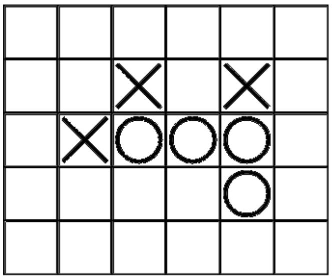
Emmy et Sophie ont mis au point un jeu qu'elles jouent sur une grande feuille à petits carreaux.

C'est toujours Emmy qui commence. À chaque tour, elle dessine un cercle sur une case vide, tandis que Sophie dessine une croix sur une case vide.



Le but d'Emmy est de réaliser une figure comportant quatre cercles en forme de « L » (elle peut orienter la figure comme elle veut pour gagner) ; celui de Sophie est de l'en empêcher.

Voici par exemple le résultat d'une partie où Emmy a gagné :



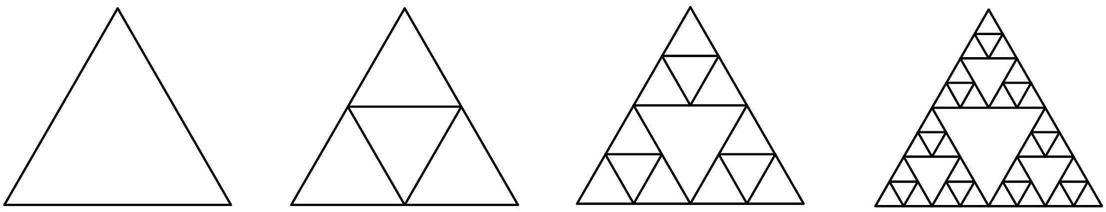
Après quelques parties jouées, Emmy a découvert une stratégie qui lui assure la victoire quels que soient les coups joués par Sophie.

Saurez-vous trouver et expliquer une telle stratégie ?

(4) Les portes du musée de Sir Pinsky

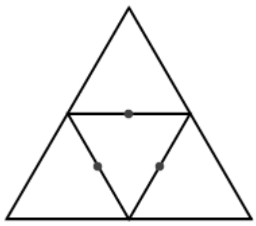
Un philanthrope anglais, Sir Pinsky, décide de fabriquer un musée. Passionné de Mathématiques, il décide de procéder à l'aide de triangles équilatéraux et de milieux. Plus précisément, à chaque étape de la construction, il prend les milieux des côtés des triangles pointe en haut comme dans l'étape 0, afin de construire de nouveaux triangles (voir les schémas ci-dessous) :

Étape 0 — Étape 1 — Étape 2 — Étape 3 — etc.

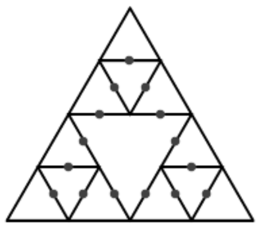


On s'intéresse au nombre de portes intérieures que comporte l'édifice. Les portes sont installées au milieu des murs de chaque pièce. Une pièce doit ainsi pouvoir communiquer directement avec toutes les pièces voisines.

Par exemple, si l'on s'arrêtait à la première étape, il y aurait 3 portes intérieures (voir schéma ci-contre) :



Mais si l'on s'arrêtait à la deuxième étape, il y aurait 15 portes intérieures :



Combien de portes intérieures comportera l'édifice à la 7^{e} étape ?

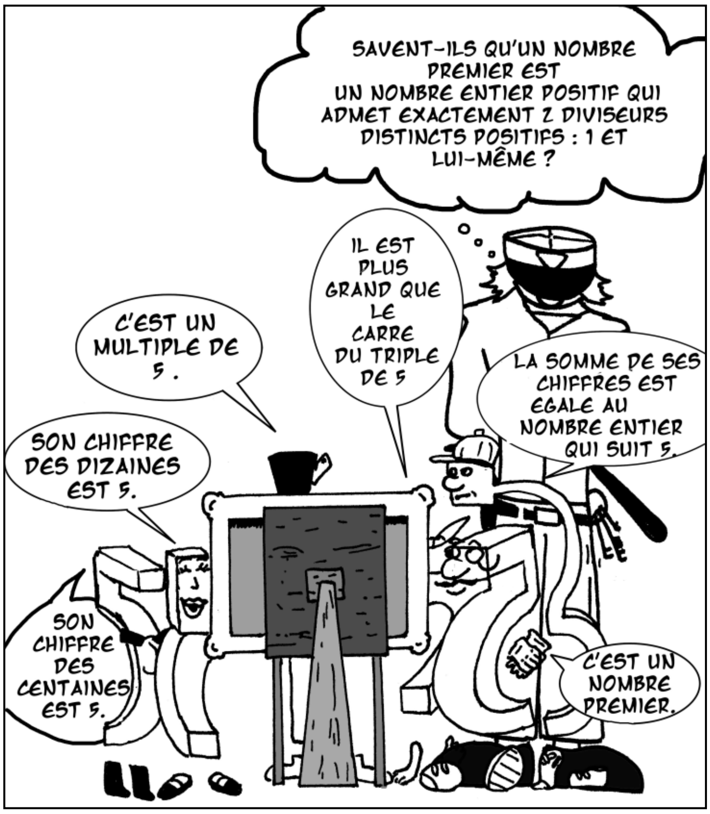
Sujets collège

(5) Tableau

Trouver le nombre entier mystère composé de trois chiffres dont parlent les personnages.

Attention :

- il y a exactement deux des personnages dont les propos sont faux ;
- les trois chiffres sont distincts et celui des centaines n'est pas égal à zéro.



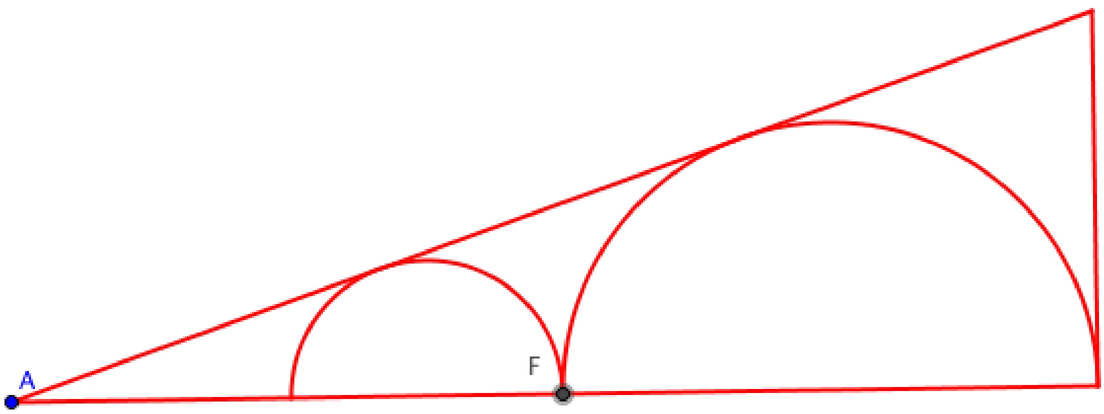
(6) Sangaku

Pour cet exercice, il faudra faire envoyer par votre professeur, après l'épreuve, le fichier à l'adresse suivante : anne.crouzier@wanadoo.fr.

Dans la figure suivante, les demi-cercles sont tangents aux côtés d'un triangle rectangle et tangents entre eux.

Réaliser cette figure avec un logiciel de géométrie dynamique.
La seule contrainte à respecter est que les propriétés précédentes résistent au déplacement de tout point libre de la figure.

On note r et R les rayons respectifs du petit et du grand demi-cercle, et d la longueur AF.
Démontrer l'égalité : $\frac{r}{R} = \frac{d-r}{d+R}$.



Sujets lycée général et lycée technologique

(7) Moulinette

On met un nombre dans une moulinette.

Si ce nombre vaut 1, alors la moulinette s'arrête.
Sinon :

• si ce nombre est divisible par 3,
alors la moulinette le divise par 3 et continue de mouliner ;

• si la division euclidienne de ce nombre par 3 a pour reste 1,
alors la moulinette le multiplie par 5, ajoute 1, et continue de mouliner ;

• si la division euclidienne de ce nombre par 3 a pour reste 2,
alors la moulinette le multiplie par 5, soustrait 1, et continue de mouliner.

1) On met 35 dans cette moulinette, on constate qu'elle s'arrête. Déterminer au bout de combien d'étapes.

2) On met 86 dans cette moulinette. Va-t-elle s'arrêter ? Justifier par un algorithme.

Aide-mémoire

Calculs

Langage naturel \ Syntaxes	**Tableur**	**AlgoBox**	**TI** **Casio**
Partie entière	ENT( )	floor( )	int( )
Reste de la division euclidienne de n par 3	MOD(…;3)	n%3	n - 3 x int(n÷3)

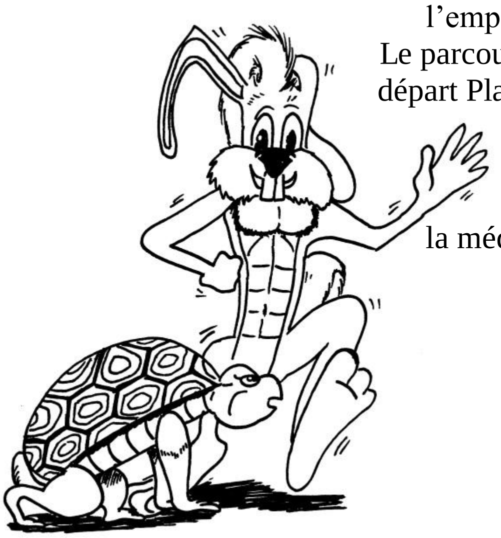
Instructions de programmation

Langage naturel \ Syntaxes	**Tableur**	**AlgoBox**	**TI**	**Casio**
Si x=1 alors alors *{instructions 1}* sinon *{instructions 2}* FinSi	SI(x=1;*{instructions 1}*;*{instructions 2}*)	Ajouter SI…ALORS SI la condition : x==1 est vérifiée ALORS… Ajouter SINON	PROGRAM:EX1 :If X=1 :Then :(Instructions 1) :Else :(Instructions 2) :End	====== ====== If X=1↵ Then {INSTRUCTIONS1}↵ Else {INSTRUCTIONS2}↵ IfEnd If Then Else IEnd
Tant Que *{condition C}* Faire *{instructions}* FinTantQue		Ajouter TANT QUE… TANT QUE la condition : est vérifiée	PROGRAM:EX2 :While (Condition) :(Instructions) :End	====== ====== While {CONDITION C}↵ {INSTRUCTIONS}↵ WhileEnd Whle WEnd Do Lp-W

(8) Le lièvre et la tortue

Un lièvre et une tortue décident de réécrire la fable de La Fontaine.
Ils organisent une course les opposant dans Clermont-Ferrand. Le lièvre parie à nouveau qu'il l'emportera contre la tortue.

Le parcours comporte 6 étapes :
départ Place de Jaude, La Pardieu,
le jardin Lecoq,
le campus des Cézeaux,
la piscine Coubertin,
la médiathèque et arrivée au
stade Marcel-Michelin.



Pour décider qui avance, ils utilisent une roue de loterie comportant des secteurs de tailles différentes, numérotés de 1 à 4. La probabilité d'apparition de chaque secteur est donnée par le tableau suivant (où p est un nombre) :

Secteur	1	2	3	4
Probabilité d'apparition du secteur	20%	$p+\frac{1}{40}$	$2p+\frac{1}{4}p$	$0{,}325-p$

Pour éviter tout malentendu, la roue est lancée par un arbitre impartial.
Si le 4 ne sort pas, la tortue avance d'une étape. Sinon, le lièvre avance de 6 étapes d'un coup et remporte la course. L'arbitre relance la roue jusqu'à ce qu'il y ait un vainqueur.

1) Qui, du lièvre ou de la tortue, a la plus grande probabilité de remporter la course ?

2) Représenter les secteurs de la roue de loterie sur un disque de rayon 5 cm.