

## TD : travail interdisciplinaire sur Cassini (à compléter directement sur la feuille) :

D'après un TD Irem issu du site (qu'il est fortement conseillé de parcourir) :

<http://dutarte.perso.neuf.fr/instruments/Triangulation.htm>

### Document 1

#### LA TRIANGULATION DE PICARD

En 1668, *l'abbé Picard* met en œuvre une opération géodésique de grande envergure.

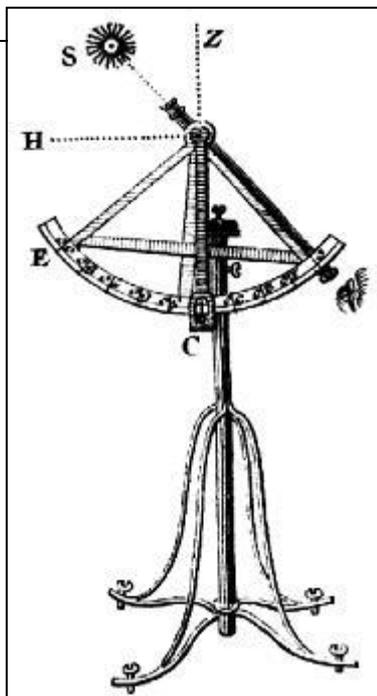
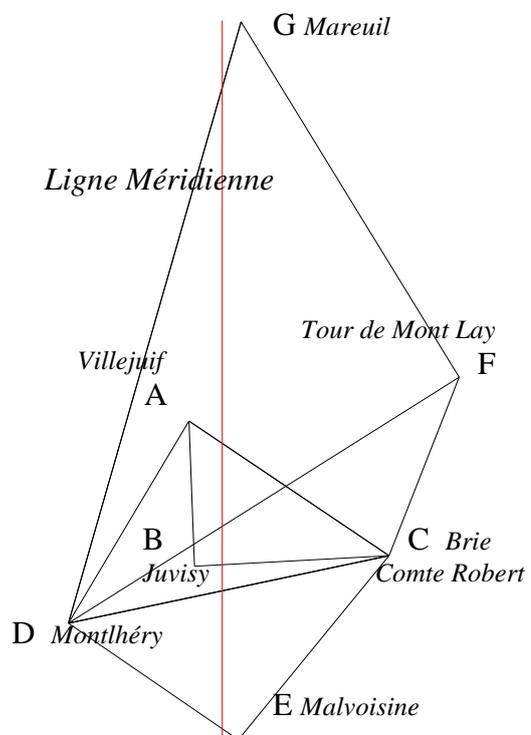
Selon son rapport à l'Académie, "outre que par ce moyen on aurait une carte la plus exacte qui ait encore été faite, on en tirerait cet avantage de pouvoir **déterminer la grandeur de la terre**".

Picard se servit des principes de la **triangulation** :

Il construisit une **chaîne de treize triangles** (la figure ci-contre en montre cinq) en partant d'une **base** mesurée sur le terrain (une deuxième base permettra une vérification) et complétée par des **mesures d'angles** à partir de points visibles les uns des autres (tours, clochers, ...).

Ayant calculé la longueur totale d'un arc de méridien, il ne resta plus qu'à mesurer la latitude aux extrémités pour savoir de quelle fraction de méridien il s'agit.

Picard conçoit lui même ses instruments de mesure et, le premier, va utiliser une lunette munie d'un réticule.



A partir du texte de Picard, documents 1 et 2 répondre aux questions suivantes

1) Dans le triangle ABC, *Picard* mesure la "base" [AB] et les trois angles.

a) le triangle ABC est-il rectangle ? justifier

b) Soit H le pied de la hauteur issue de A.  
Faire une figure et calculer AH (en *toises*).

34 *Mesure de la Terre,*  
qui ne donnoient les minutes que de six  
en six, ils n'ont pas laissé d'approcher de  
la justesse autant qu'il étoit nécessaire,  
pour faire voir qu'on ne s'étoit pas trompé  
aux conclusions.

**I. TRIANGLE ABC.**  
*Pour connoître le côté AC.*

CAB..... $54^{\circ}4'35''$ .  
ABC..... $95^{\circ}6'55''$ .  
ACB..... $30^{\circ}48'30''$ .  
AB..... $45663$  Toises de mesure actuelle.  
Donc AC..... $11012$  Toises 5 pieds.  
Et BC..... $8954$  Toises.

**II. TRIANGLE ADC.**  
*Pour DC & AD.*

DAC..... $77^{\circ}25'50''$ .  
ADC..... $55^{\circ}0'10''$ .  
ACD..... $47^{\circ}34'0''$ .  
AC..... $11012$  Toises 5 pieds.  
Donc DC..... $13121$  Toises 3 pieds.  
Et AD..... $9922$  Toises 2 pieds.

**III. TRIANGLE DEC.**  
*Pour DE & CE.*

DEC..... $74^{\circ}9'30''$ .  
DCE..... $40^{\circ}34'0''$ .  
CDE..... $65^{\circ}16'30''$ .  
DC..... $13121$  Toises 3 pieds.  
Donc DE..... $8870$  Toises 3 pieds.  
Et CE..... $12389$  Toises 3 pieds.

par M. P. Abbé Picard.

35

**IV. TRIANGLE DCF.**  
*Pour DF.*

DCF..... $113^{\circ}47'40''$ .  
DFC..... $33^{\circ}40'0''$ .  
FDC..... $32^{\circ}32'20''$ .  
DC..... $13121$  Toises 3 pieds.  
Donc DF..... $21658$  Toises.

Notez que dans ce quatrième triangle, l'angle DFC a été augmenté de  $10''$ , qui manquoient à la somme des trois angles.

**V. TRIANGLE DFG.**  
*Pour DG & FG.*

DFG..... $91^{\circ}5'10''$ .  
DGF..... $57^{\circ}34'0''$ .  
GDF..... $30^{\circ}20'40''$ .  
DF..... $21658$  Toises.  
Donc DG..... $25643$  Toises.  
Et FG..... $12963$  Toises 3 pieds.

Ensuite de ces cinq triangles, il a été facile de conclure la distance GE entre Malvoisine & Marcuil, sans supposer aucune nouvelle Observation.

2) En déduire la valeur de AC et comparer avec celle obtenue par Picard (il y a 6 *pieds* dans une *toise*).

On retrouve ainsi la formule appelée aussi « formule des sinus » :

3) Justifier l'affirmation finale de Picard : "il a été facile de conclure la distance GE".  
Effectuer le calcul, en sachant que la *toise de Paris* est égale à 1,949 m.

## éléments de réponse

1) D'après le texte, on a :

$AB = 5663$  toises,  $\hat{A} \approx 54,076^\circ$ ,  $\hat{B} \approx 95,115^\circ$  et  $\hat{C} \approx 30,808^\circ$ .

Dans le triangle ABH, rectangle en H, on obtient :

$AH = AB \sin A \hat{B} H = 5663 \sin(180^\circ - 95,115) \approx \mathbf{5640,4}$  toises.

2) Dans le triangle AHC, rectangle en H, on peut en déduire :  $AC = \frac{AH}{\sin \hat{C}} \approx \frac{5640,4}{\sin 30,808^\circ}$ .

Ainsi  $AC \approx 11\,012,9$  toises.

On retrouve donc bien les 11 012 toises 5 pieds obtenus par Picard, à un pied près.

3) Pour le calcul de GE, on procède de façon analogue dans le triangle DGE.

Les données sont :  $GD = 25\,643$  toises,  $DE = 8870,5$  toises et  $G \hat{D} E = 128,158^\circ$ .

Soit H le pied de la hauteur issue de G.

On a  $GH = GD \sin(180 - 128,158)$ , puis  $DH = DG \cos(180 - 128,158)$ .

Le théorème de *Pythagore* dans le triangle GHE, rectangle en H, donne alors

$GE \approx \mathbf{31\,895,5}$  toises c'est à dire 31 895 toises et 3 pieds,

soit encore,  $GE \approx \mathbf{62\,164,33}$  m.