

Forte connexité

Malika More

(malika.more@u-clermont1.fr)

IREM Clermont-Ferrand

Formation ISN

20 octobre 2011

Plan du cours

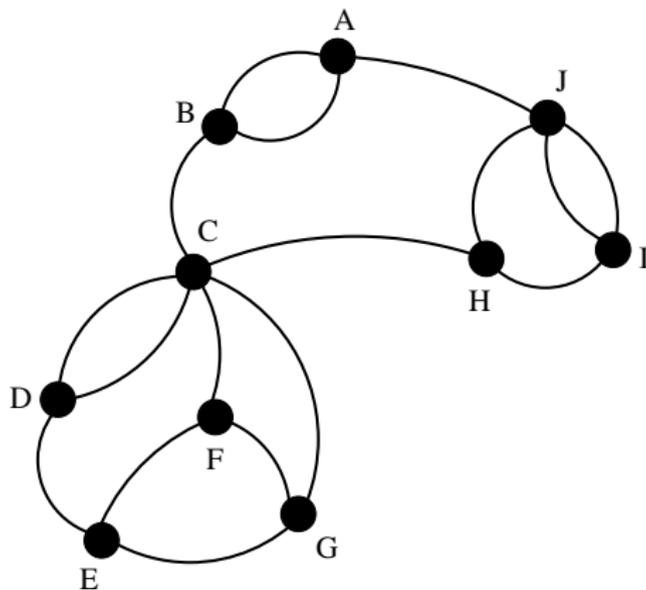
- 1 Introduction
- 2 Algorithme de Tarjan

1 Introduction

2 Algorithme de Tarjan

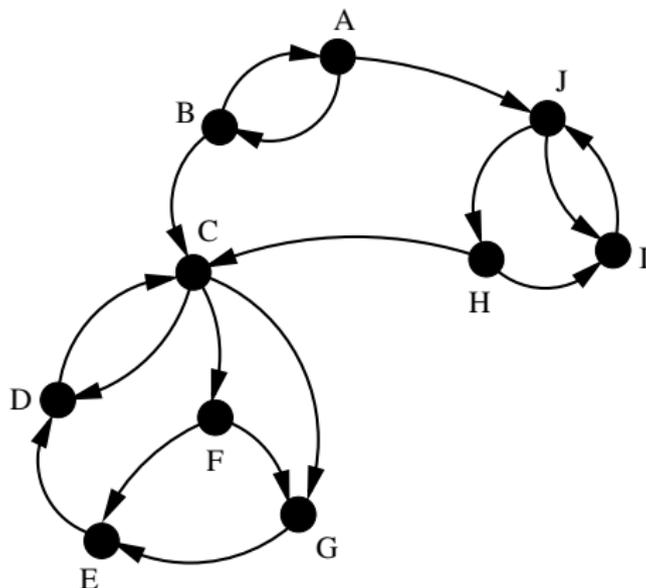
Graphe non orienté

On peut parcourir les arêtes dans les deux sens

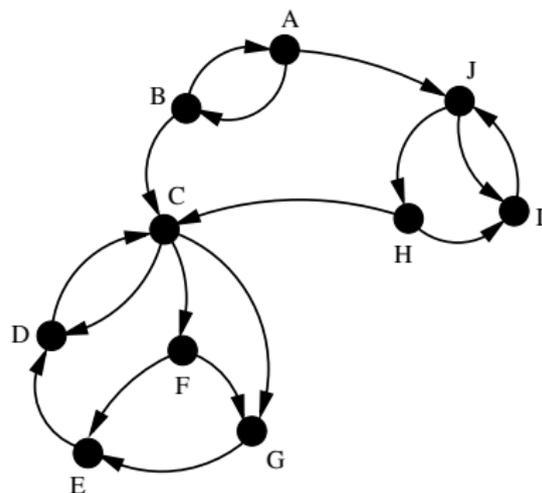


Graphe orienté

- Chaque arc a un **sens** (flèche)
- On ne peut suivre un arc que dans le sens de la flèche

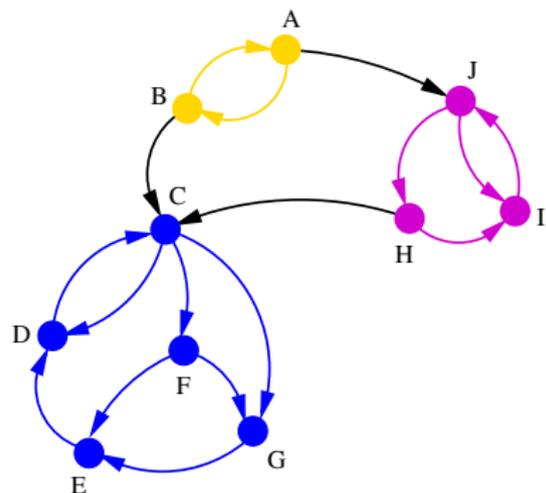


La notion de connexité est différente



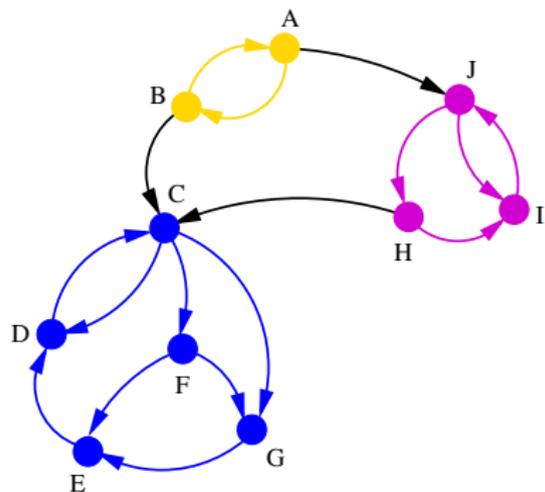
- On peut aller de J à C , mais pas de C à J
- Si tous les couples de sommets d'un graphe orienté sont mutuellement accessibles, on dit qu'il est **fortement connexe**

La notion de connexité est différente



- Le graphe orienté ci-contre comprend plusieurs **composantes fortement connexes**
- Comment calculer la composante fortement connexe d'un sommet ?

Un algorithme simple mais long

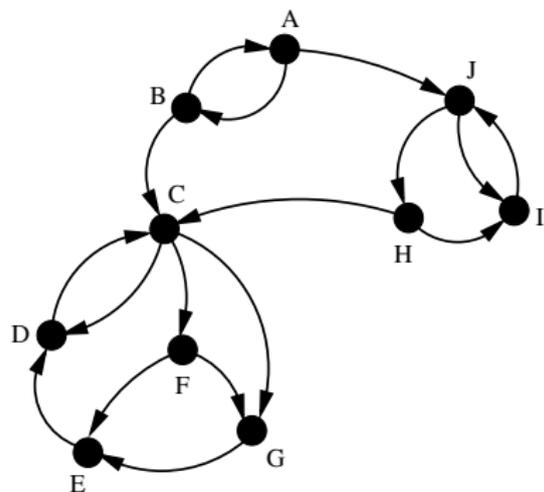


- Trouver tous les sommets accessibles à partir de X en utilisant un parcours
- Pour chaque sommet Y accessible à partir de X , utiliser un parcours pour vérifier si X est aussi accessible à partir de Y

1 Introduction

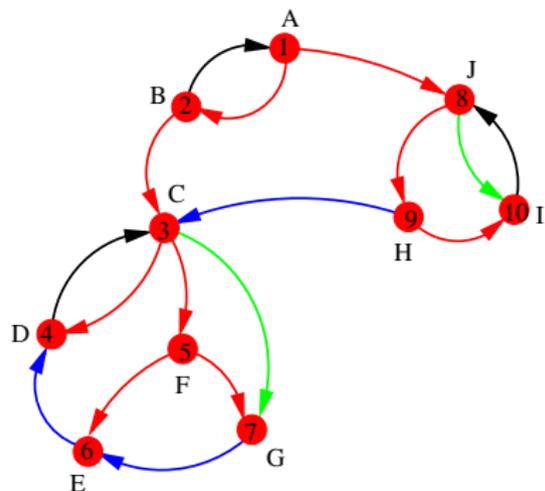
2 Algorithme de Tarjan

Idée générale



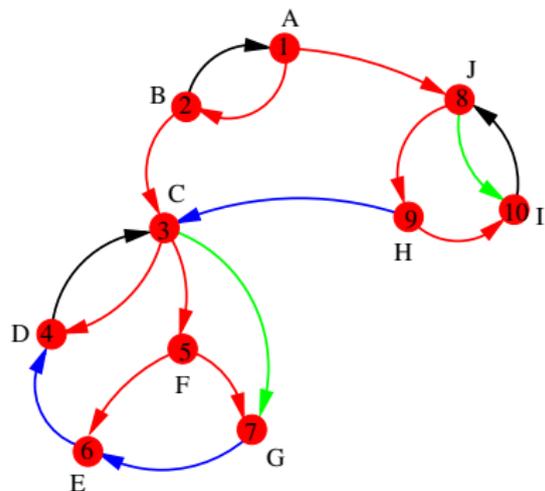
- On effectue un parcours en profondeur à partir d'un sommet du graphe à l'aide d'une pile `Parcours` en mémorisant le rang de `Découverte` de chaque sommet visité
- Pendant le parcours, on calcule les composantes fortement connexes rencontrées à l'aide d'une deuxième pile `Tarjan` et d'un `Index` associé à chaque sommet visité

Préliminaire



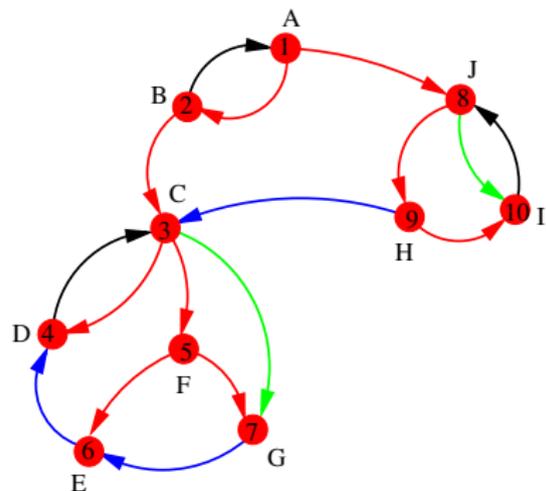
- Parcours en profondeur à partir de A et rang de Découverte
- Arc de liaison : rouge
- Arc avant : *CG, JI*
- Arc arrière : *BA, DC, IJ*
- Arc transverse : *GE, ED, HC*

Les 5 règles de calcul



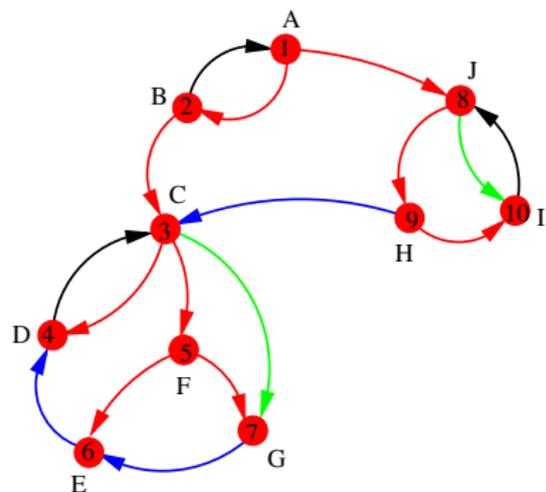
- 1 La première fois qu'on rencontre un sommet X , on l'empile sur Tarjan et on initialise son `Index` avec la valeur `Découverte(X)`

Les 5 règles de calcul



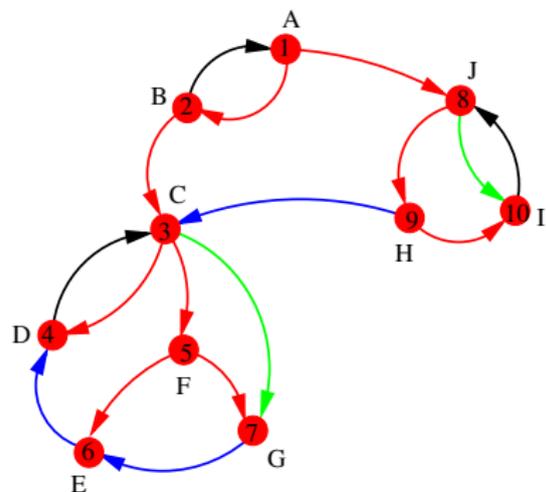
- 2 Quand on visite à partir de X un arc arrière (i.e. qui revient vers un sommet Y déjà visité et stocké dans la pile Parcours), on met à jour $\text{Index}(X) = \text{Min}(\text{Index}(X), \text{Index}(Y))$

Les 5 règles de calcul



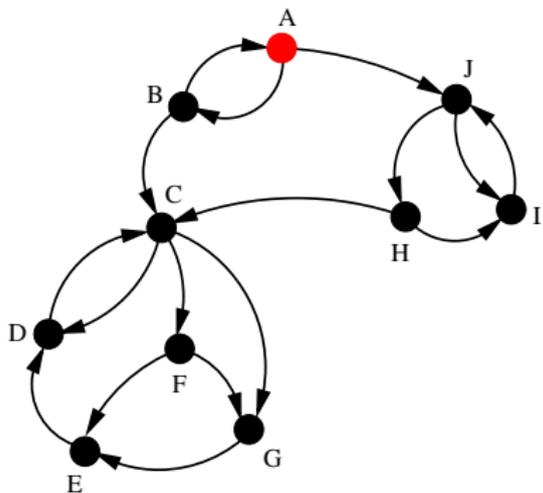
- ③ Quand on visite à partir de X un arc transverse (i.e. qui revient vers un sommet Y déjà visité et tel que $\text{Index}(Y) < \text{Index}(X)$), à condition que Y soit stocké dans la pile Tarjan, on met à jour
- $$\text{Index}(X) = \text{Min}(\text{Index}(X), \text{Index}(Y))$$

Les 5 règles de calcul



- ④ Quand on revient à X après avoir dépilé de la pile
Parcours son successeur Y , on met à jour
 $\text{Index}(X) = \text{Min}(\text{Index}(X), \text{Index}(Y))$ pour que X hérite éventuellement de l'index calculé pour Y

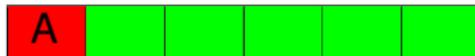
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

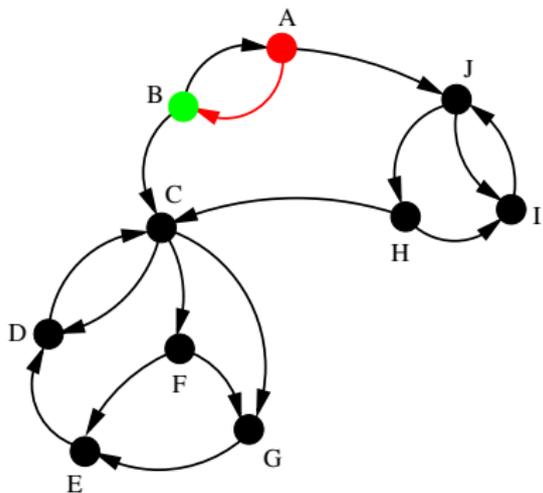


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1									
Index	1									

Exemple



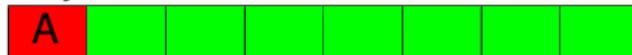
▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

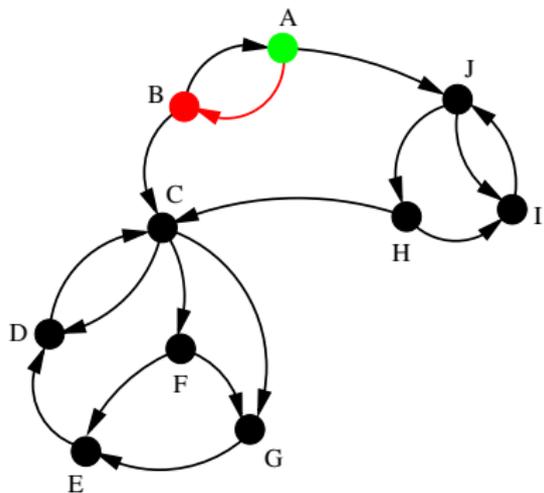


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1									
Index	1									

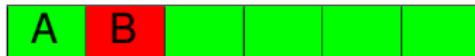
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

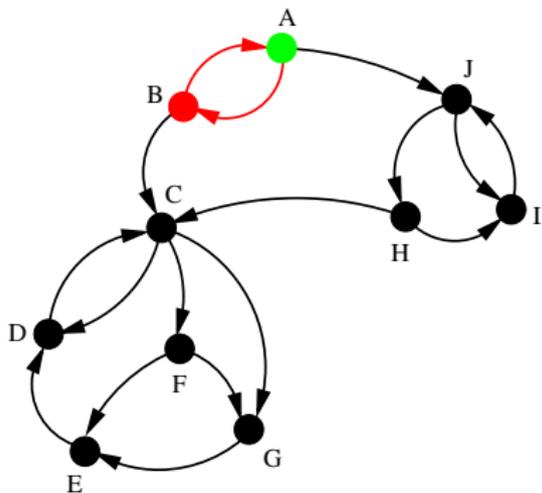


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2								
Index	1	2								

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

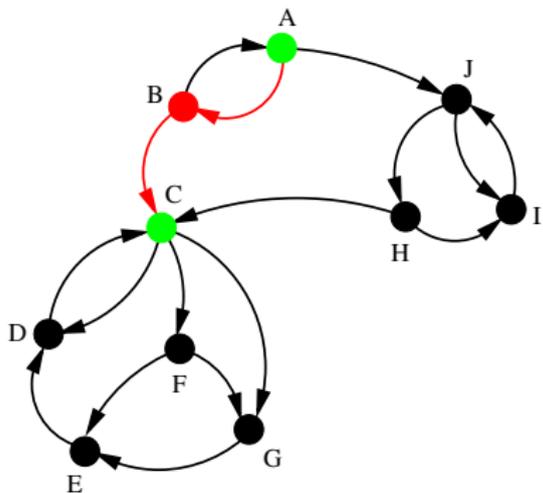


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2								
Index	1	1								

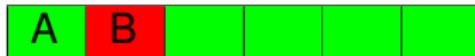
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

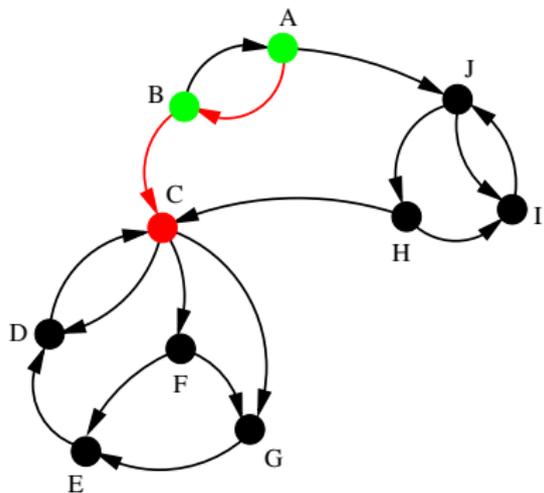


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2								
Index	1	1								

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

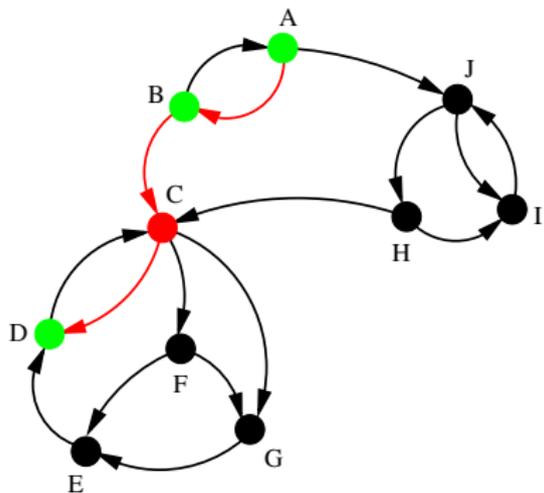


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3							
Index	1	1	3							

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

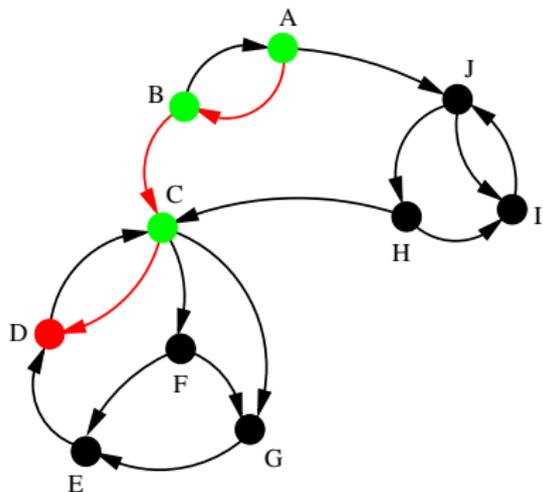


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3							
Index	1	1	3							

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

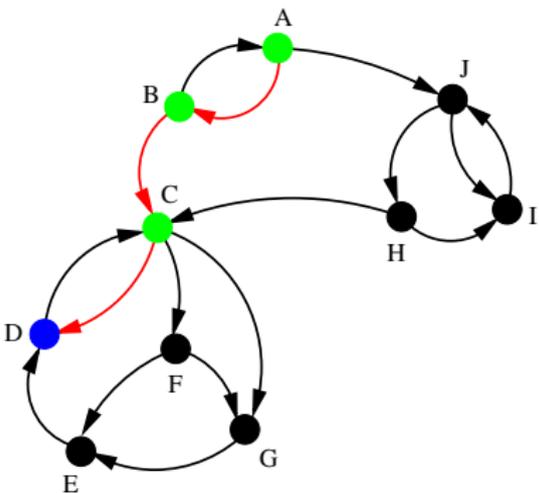


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4						
Index	1	1	3	4						

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

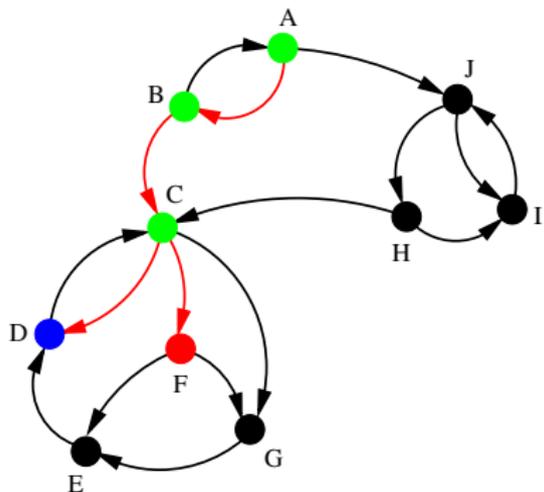


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4						
Index	1	1	3	3						

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

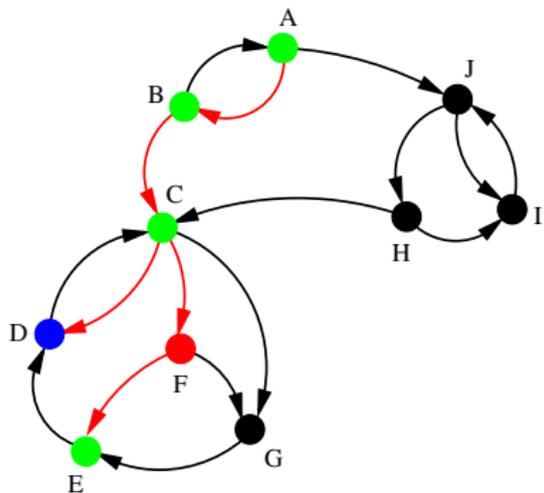


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4		5				
Index	1	1	3	3		5				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

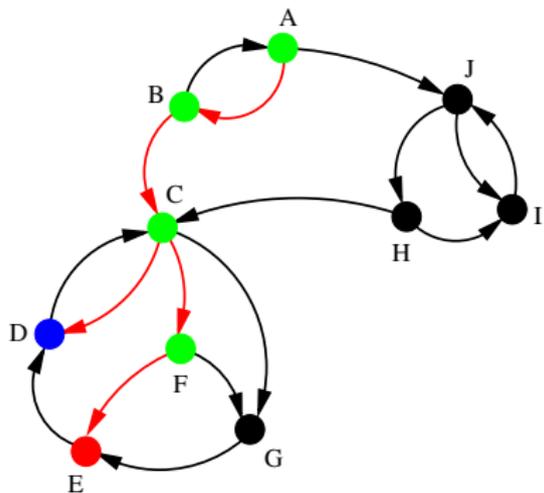


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4		5				
Index	1	1	3	3		5				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

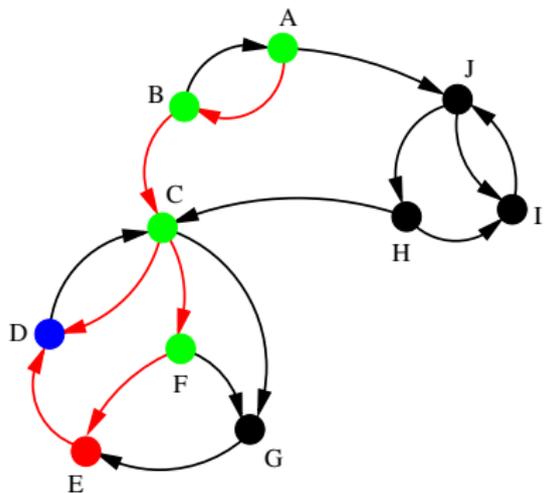


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5				
Index	1	1	3	3	6	5				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

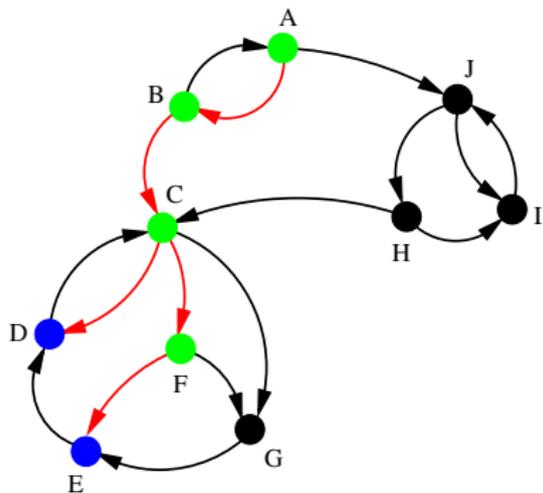


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5				
Index	1	1	3	3	3	5				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

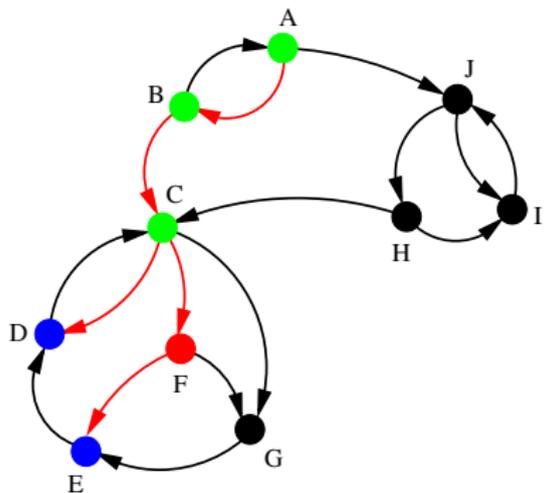


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5				
Index	1	1	3	3	3	5				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

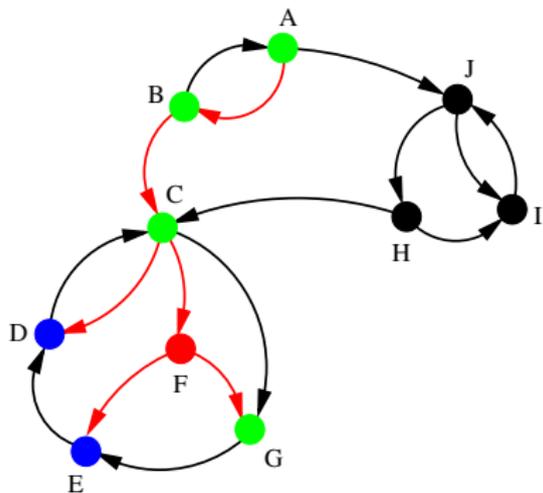


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5				
Index	1	1	3	3	3	3				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

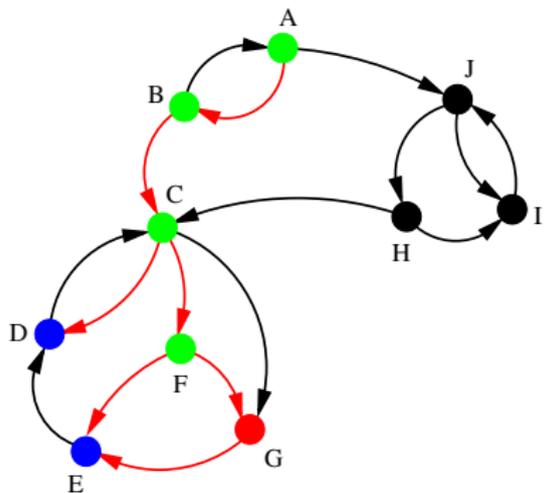


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5				
Index	1	1	3	3	3	3				

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

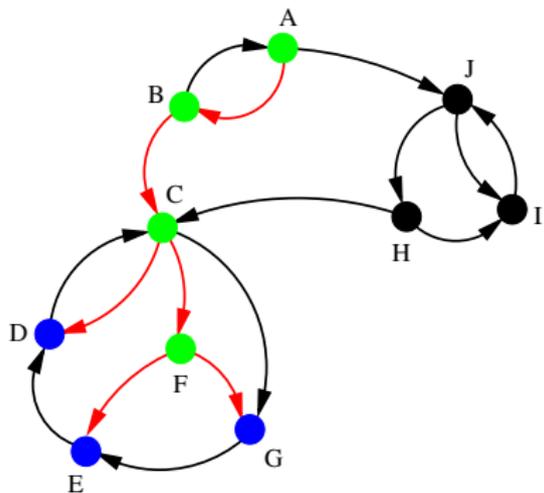


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

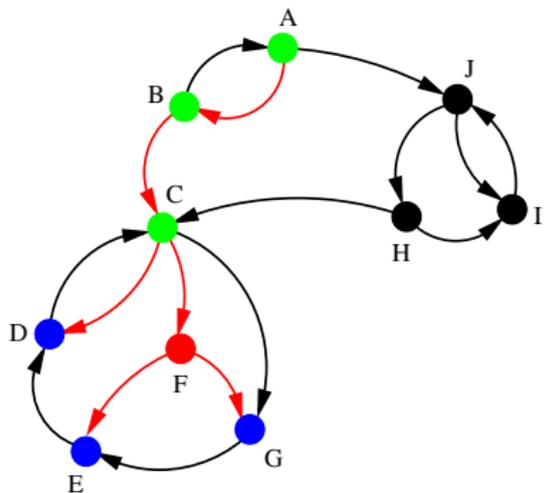


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

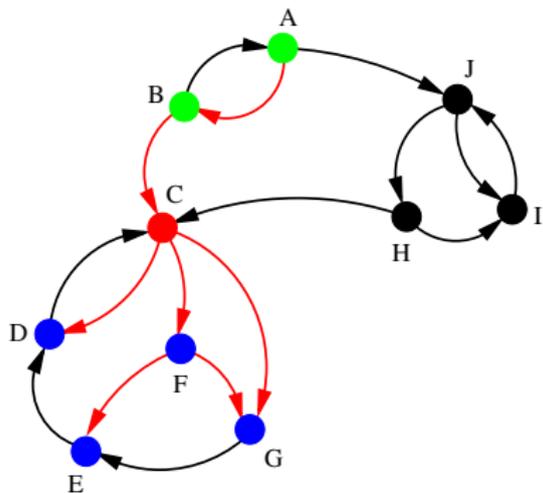


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

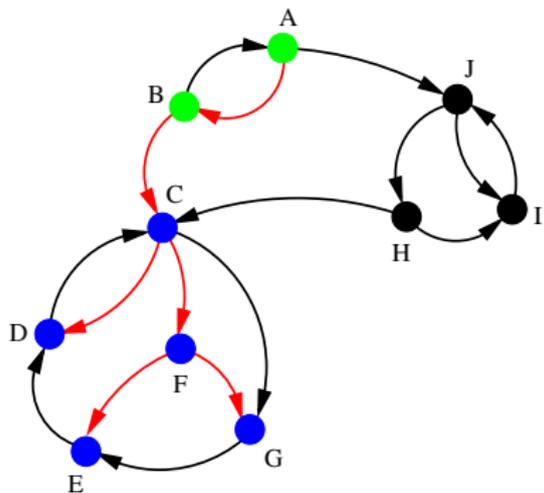


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

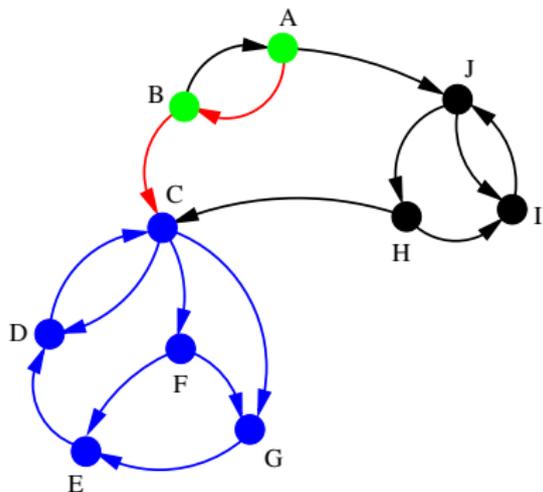


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

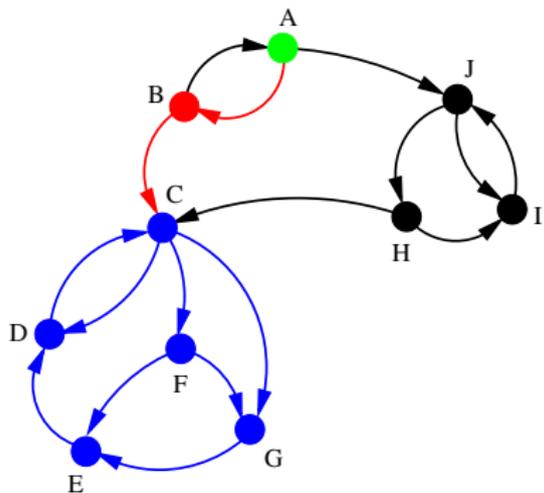


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

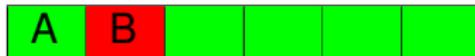
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

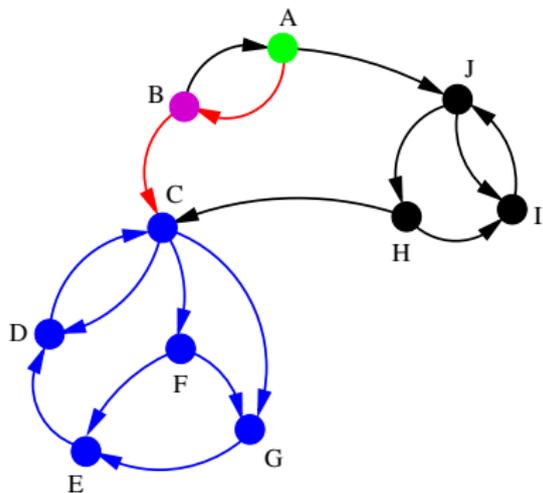


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

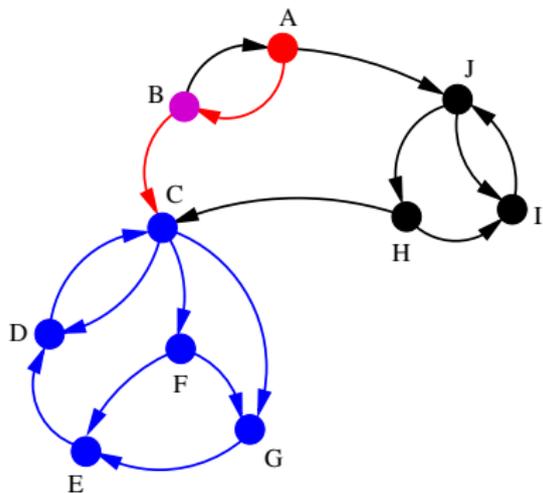


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

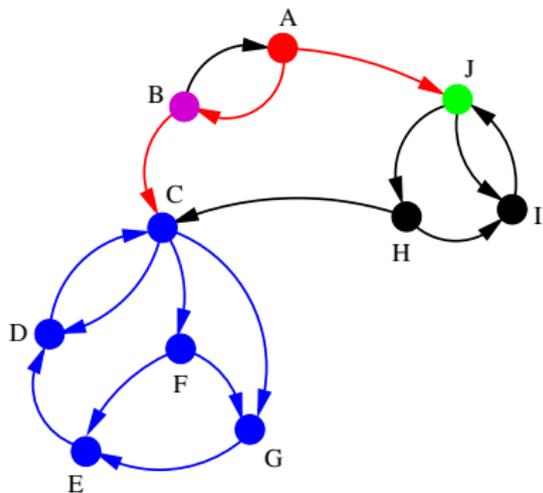


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

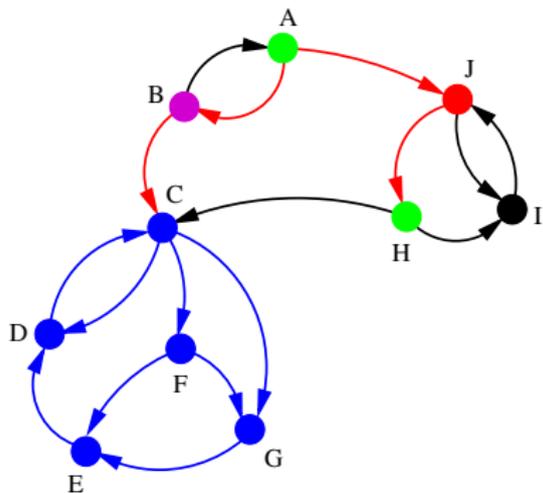


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			
Index	1	1	3	3	3	3	3			

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

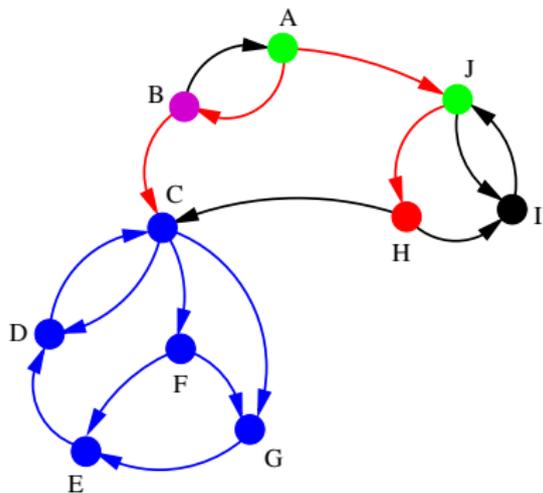


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7			8
Index	1	1	3	3	3	3	3			8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

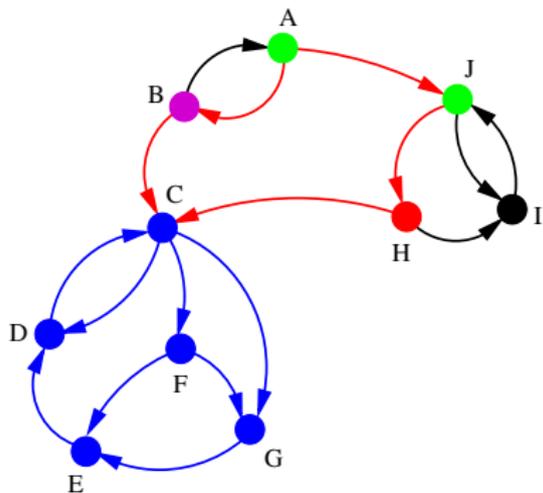


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9		8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9		8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

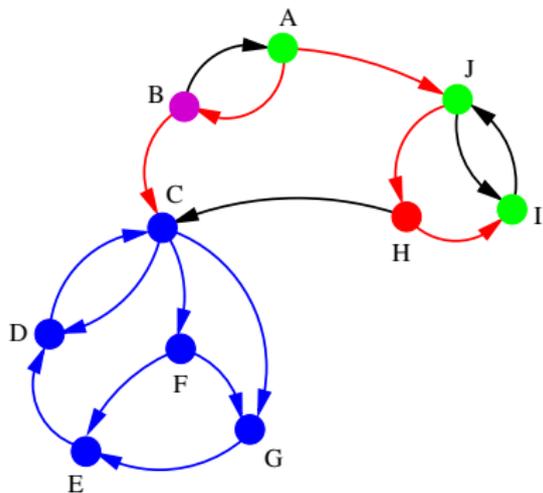


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9		8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9		8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

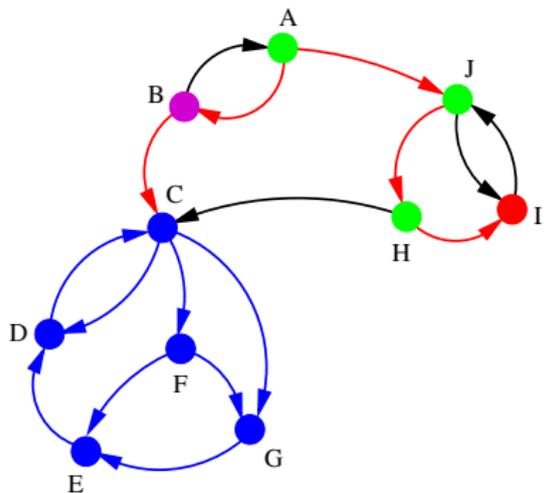


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9		8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9		8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

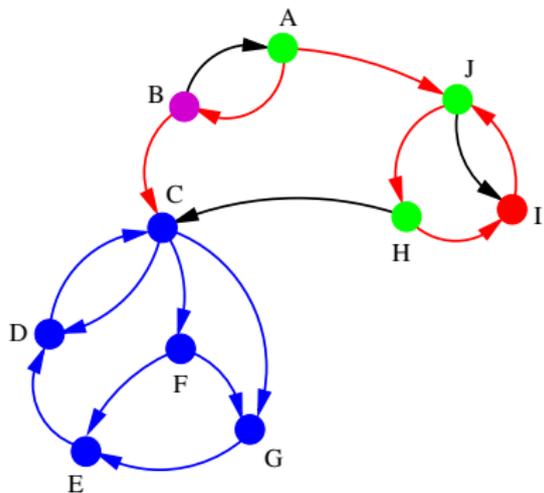


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9	10	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

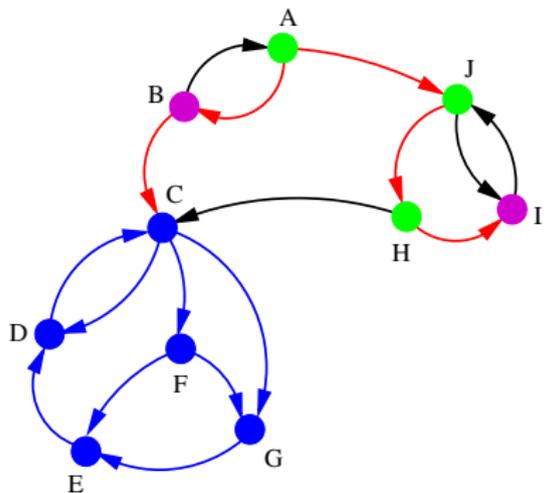


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

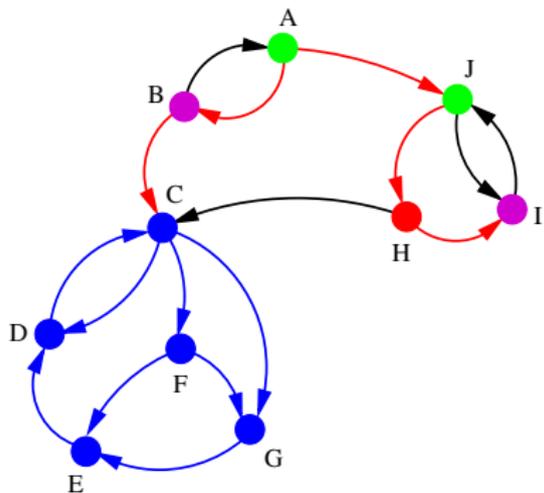


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	9	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

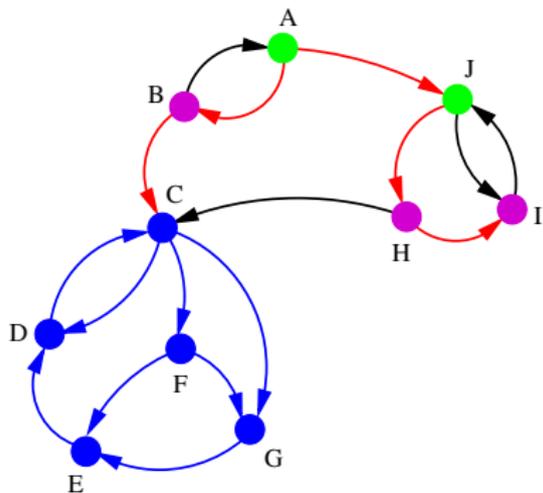


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

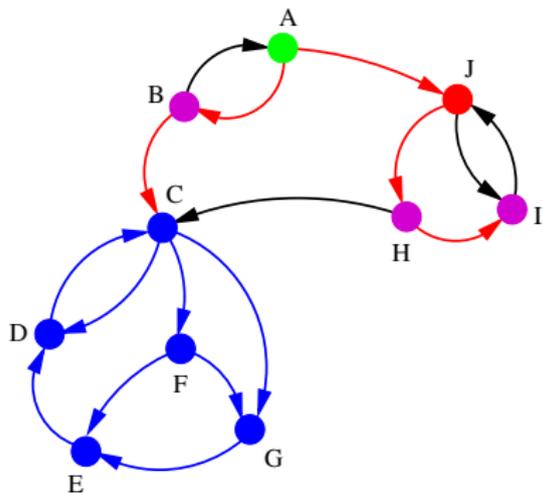


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

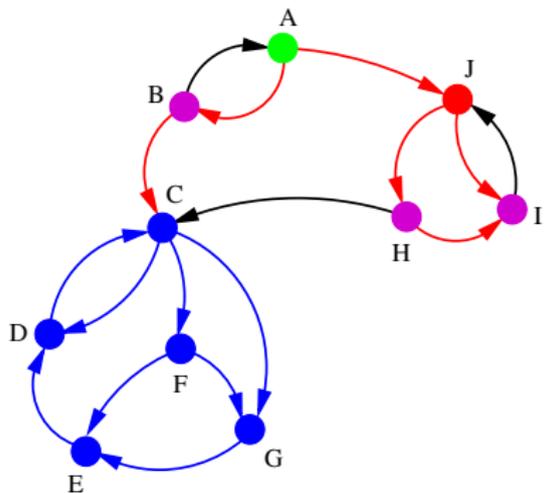


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

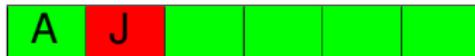
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

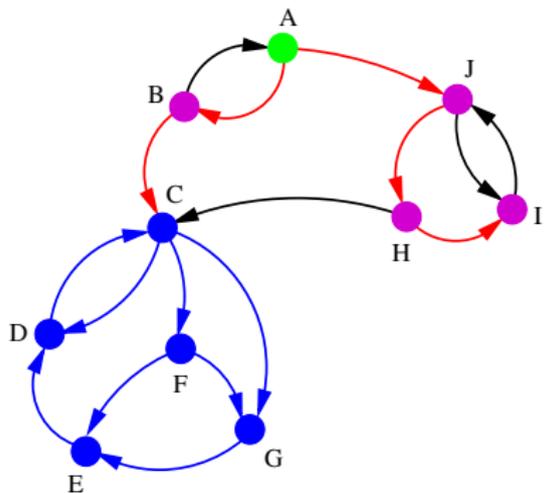


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

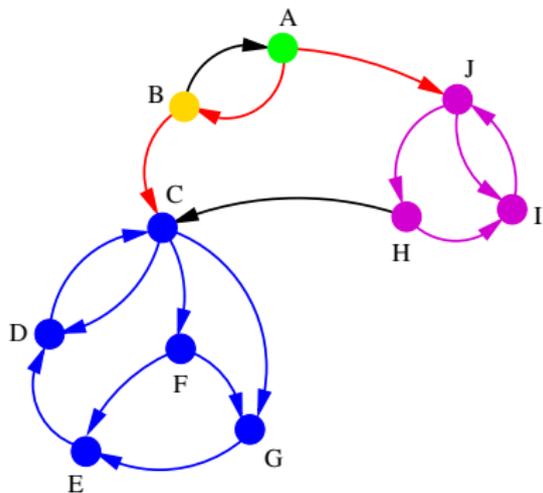


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

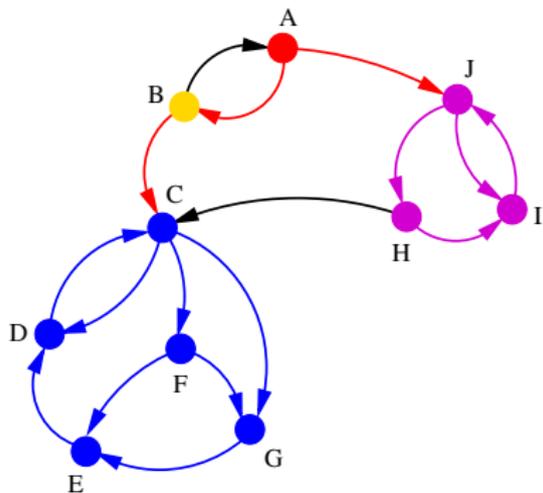


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

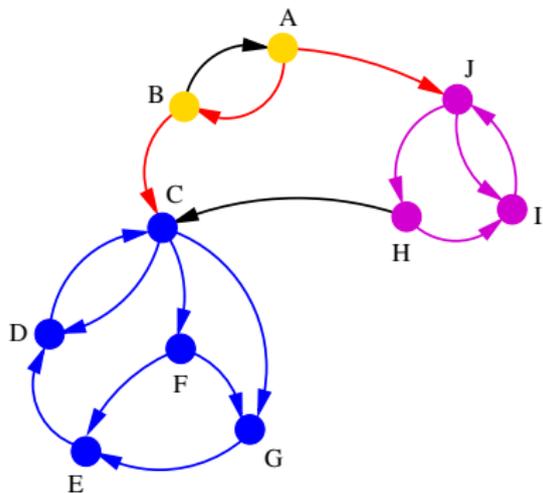


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

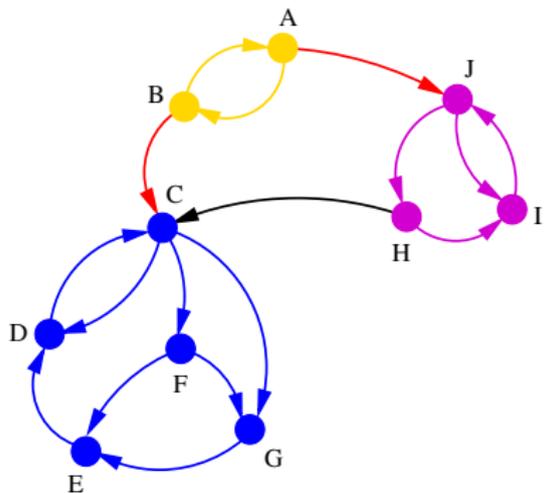


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

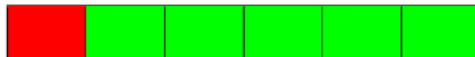
Exemple



▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :

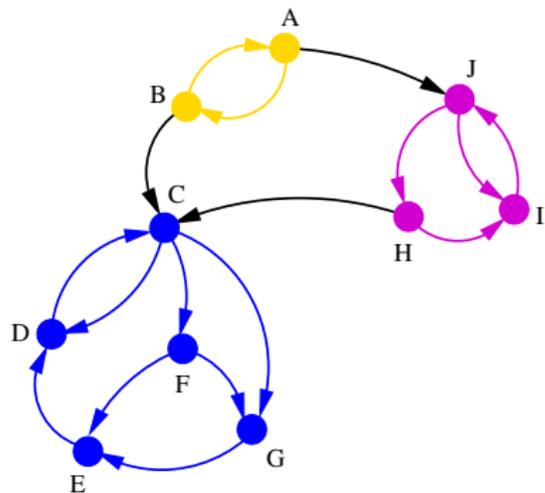


Tarjan :



Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

Exemple



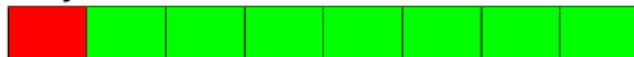
▶ Début Animation

▶ Fin Animation

Parcours :



Tarjan :

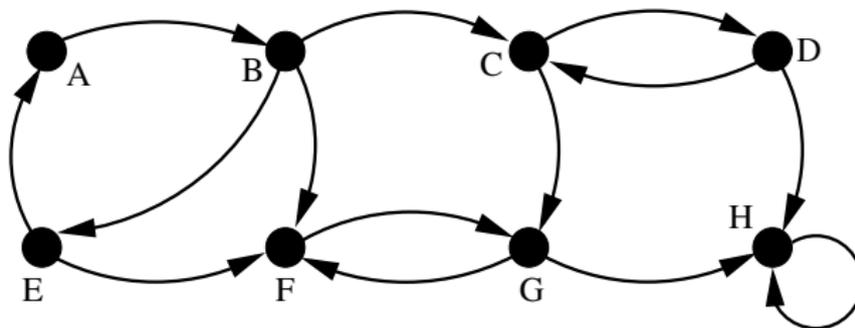


Sommet	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Découverte	1	2	3	4	6	5	7	9	10	8
Index	1	1	3	3	3	3	3	8	8	8

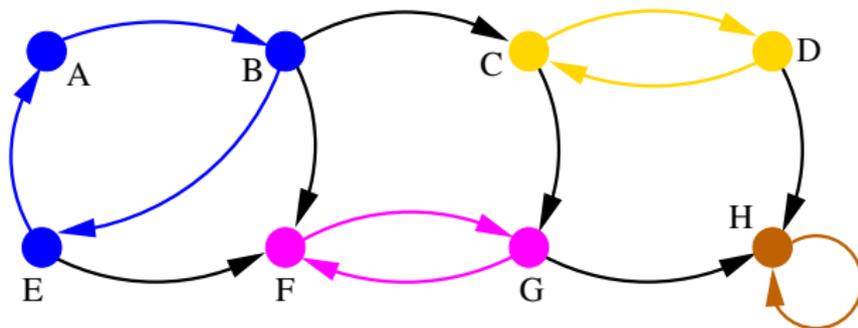
Nécessité d'une preuve

- On se convainc assez facilement que l'algorithme de Tarjan permet de calculer les composantes fortement connexes d'un graphe orienté
- Mais la preuve que c'est bien le cas est loin d'être évidente...

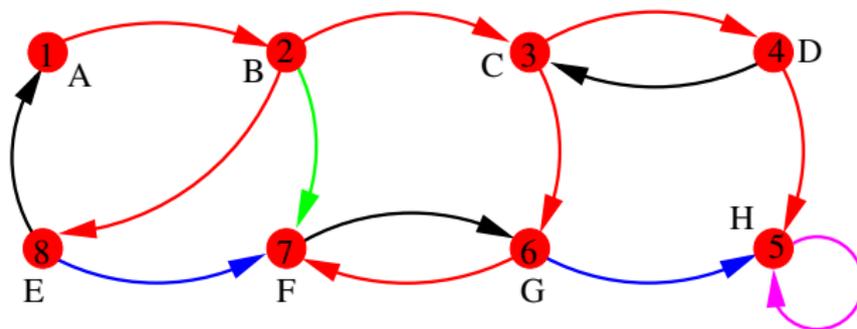
Autre exemple



Autre exemple



Autre exemple



FIN