PROBLEMES DE CONSTRUCTION
METHODE D'ABANDON DE CONTRAINTE

Danièle EYNARD (lycée Virlogeux à Riom)
et Charles PINTRAND (collège de Lezoux)

Ce travail a été rédigé à partir d'un projet de Daniel Thiriet, qui a fourni les premiers exemples et le thème de l'abandon de contrainte.

I - INTRODUCTION

Que ce soit au collège ou au lycée, il est souvent demandé à nos élèves de résoudre des problèmes de constructions géométriques. Comme l'indiquent les commentaires des programmes de 5ème et de 4ème, "*l'intérêt d'une construction porte plus sur la procédure utilisée que sur le résultat obtenu. La justification qui l'accompagne est une occasion de raisonnement*".
La procédure à utiliser est celle que l'on désigne souvent par les termes « d'analyse–synthèse » et met en œuvre le maniement de conditions nécessaires, "l'analyse", et de conditions suffisantes, « la synthèse ». La raison en est la suivante : soit à construire un objet géométrique que nous désignerons par O. Sans plus d'informations on est souvent en difficulté pour réaliser la construction d'un tel objet. Pour lever la difficulté, on peut procéder à une analyse, c'est-à-dire rechercher des conditions que nécessairement O doit vérifier : l'intérêt a priori non évident est que certaines des nouvelles propriétés ainsi découvertes vont permettre dans certains cas une construction effective, dans d'autres cas d'affirmer qu'il n'y a pas de solutions ou encore de trouver l'ensemble des objets répondant aux hypothèses de construction. C'est ce qui se fait en synthèse : des conditions nécessaires découvertes, il convient de s'assurer (et il peut y avoir discussion selon les cas dans lesquels on peut se trouver) qu'elles sont bien suffisantes pour l'existence de O et sa construction effective.
On peut aussi, dans un premier temps, trouver des conditions suffisantes à l'existence de O et permettant sa construction ; dans un deuxième temps on peut examiner si ces conditions sont nécessairement vérifiées, cela permet souvent de déterminer l'ensemble des solutions possibles.
Le plus souvent, le plus difficile est de découvrir des propriétés, qu'elles soient nécessaires ou suffisantes, qui vont s'avérer pertinentes pour la construction demandée. Comment faire pour trouver de telles conditions pertinentes ? On peut classiquement ‘’supposer le problème résolu ‘‘, se donner une figure d'étude et rechercher de bonnes propriétés par examen de la figure supposée construite. Une autre façon de procéder est l'abandon de contraintes. « On pourra expliciter une méthode consistant dans un premier temps à abandonner l'une des contraintes du problème » lit-on dans les programmes de l'option de terminale L. Pour faciliter la découverte de propriétés pertinentes pour la construction souhaitée, on "simplifie" le problème en enlevant une des contraintes que doit vérifier la construction : la méthode d'abandon de contrainte apparaît ainsi comme une méthode heuristique aidant à la résolution de problèmes pas toujours simples.
De plus, cette méthode s'intègre d'autant mieux dans les programmes actuels que ceux-ci nous suggèrent l'utilisation de LGD (Logiciels de géométrie dynamique) qui, comme on le verra dans les exemples ci-dessous, est parfaitement adaptée au traitement de problèmes de ce type : en effet, l'abandon d'une contrainte autorise des constructions annexes qui favorisent l'observation de propriétés pertinentes à prendre en compte.

Nous vous proposons ci-dessous dans une première partie des exemples qui peuvent être traités suivant les cas depuis la classe de cinquième (bien qu'il soit difficile dans une telle classe d'exiger la rédaction de la justification de la construction) jusqu'à la classe de terminale, avec pour chaque exemple l'apport des LGD. Dans une seconde partie on peut trouver de façon plus détaillée une activité pour la classe de troisième à propos de la construction d’un carré dans un triangle.

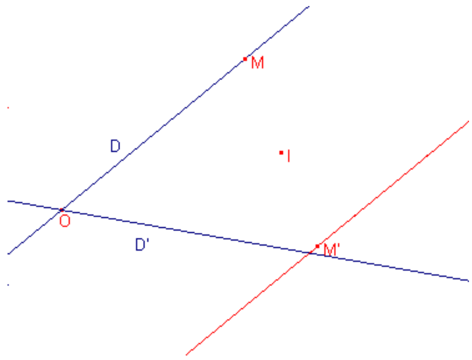
II - PREMIÈRE PARTIE : QUELQUES EXEMPLES (PARTIE RÉDIGÉE PAR DANIELLE EYNARD)

II - 1 Premier exemple :

Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O et I un point n'appartenant à aucune des deux droites. Construire M sur (D) et M' sur (D') tels que I soit le milieu de [MM'].

Quelle contrainte abandonner ? Si nous prenons M quelconque sur (D), nous pouvons construire facilement M' tel que I soit le milieu de [MM']. Par contre a priori M' ne sera pas sur (D'). Examinons ce que donne cette piste avec un LGD :
Sur le papier, on pourrait construire plusieurs points M, puis les points M' correspondants et commencer à "voir" quelque chose. Par contre, en faisant afficher la trace de M' quand M se déplace sur (D), on voit tout de suite que M' se déplace sur une droite parallèle à (D), la droite (Δ) symétrique de (D) par rapport à I. C'est alors le moment de réintroduire la contrainte enlevée : M' est sur la droite (Δ)symétrique de (D) par rapport à I, mais (contrainte) M' est aussi sur (D'). Il est donc à l'intersection de ces deux droites. C'est cette propriété qui est ici pertinente : "*M' intersection de (D') et de la droite (Δ) symétrique de (D) par rapport à I*".
Les connaissances nécessaires à ce raisonnement sont de niveau 5ème.

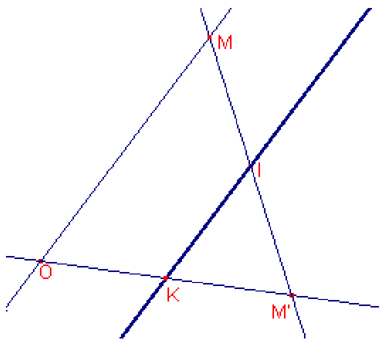
La synthèse est ensuite immédiate : le point M' intersection de (D') et (Δ) existe (si deux droites sont parallèles, toute sécante à l'une est sécante à l'autre), et M symétrique de M' par rapport à I sera sur (D) symétrique de (Δ) par rapport à I. (Notons qu'une discussion aurait été nécessaire si on n'avait rien su a priori des positions respectives de (D) et (D'). : si (D) et (D') sont parallèles, alors ou bien (D') est la droite symétrique de (D) par rapport à I, en ce cas il y a une infinité de solutions, sinon il ne peut y avoir de solution).



On peut aussi se demander ce que l'on aurait obtenu en oubliant la contrainte "I milieu de [MM']". Certes l'exercice étant souvent posé dans un chapitre sur la symétrie centrale, c'est la solution précédente qui est attendue. Mais plaçons-nous dans le cas d'un élève qui ayant compris les principes généraux de la méthode s'y essaie de cette manière.
On peut alors placer M sur (D) et M' sur (D') et se demander ce qu'il faudrait pour que J milieu de [MM'] coïncide avec I. Avec un LGD, je peux placer M sur (D), M' sur (D') et construire J. Je peux déplacer M sur (D) et observer les variations de J, lequel se déplace sur une parallèle à (D). On peut alors dégager la propriété suivante : dans le triangle OMM', J étant le milieu de [MM'] est sur la parallèle à (D) passant par K milieu de [OM']. Si on veut que I = J, alors nécessairement K est sur la parallèle (Δ) à (D) passant par I : c'est donc l'intersection de (Δ) et de (D'). K ainsi déterminé est le milieu de [OM'] et donc M' est le symétrique de O par rapport à K. Arrêtons ici l'analyse et débutons la synthèse : soit alors M intersection de (D) et de (IM'). Cette intersection existe car sinon M' = K et alors O = K ce qui voudrait dire que I est sur (D) ce qui est exclu par hypothèse. La doite (IK) par construction est parallèle à (D) de plus K est le milieu de [OM'], donc I est le milieu de [MM'].

Programme de construction :

1) On trace la parallèle (Δ) à (D) passant par I
2) K est l'intersection de (Δ) et (D').
3) M' est le symétrique de O par rapport à K
4) M est l'intersection de (D) et de (IM').

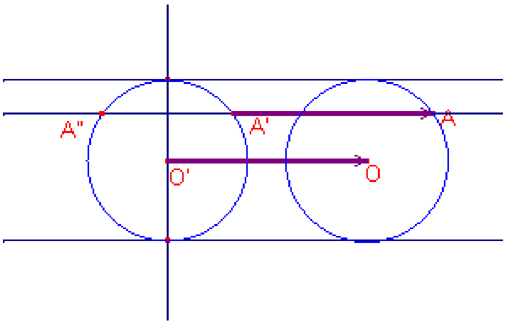


II - 2 Deuxième exemple :

Dans cet exemple, nous montrons, toujours avec l'abandon d'une contrainte, que nous pouvons trouver une propriété pertinente pour la construction, mais celle-ci apparaît tout d'abord comme une condition suffisante.

Soient (D) et (D') deux droites parallèles et A un point entre ces deux droites. Construire un cercle tangent à ces deux droites passant par A

Abandon de contrainte : On sait construire un cercle C tangent à deux droites, la contrainte à abandonner est



donc "qui passe par A".
Condition suffisante : on trace la parallèle à (D) passant par A. Elle coupe C en deux points A' et A".

Il est alors facile de démontrer que par translations de vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, et $\overrightarrow{AA''}$, on obtient deux cercles de même rayon, de centres O_1 et O_2 tangents aux deux droites et passant par A. (un seul cas est représenté ci-dessus)

L'outil translation du LGD permet de vérifier très facilement la justesse du raisonnement
Les connaissances nécessaires ici sont de niveau quatrième.

<u>Condition nécessaire</u> : s'il existait un troisième cercle tangent aux deux droites passant par A, son centre O_3 serait sur (OO') et on aurait O_3**A = O_2A = O_1A, donc les trois centres serait sur un même cercle de centre A, ces points étant aussi sur la même droite, c'est impossible.**
Par conséquent il existe exactement deux cercles répondant à la question.

II - 3 Troisième exemple :

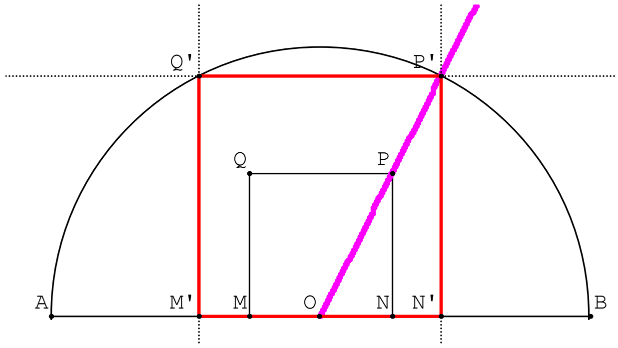
On considère un demi - disque de centre O et on veut inscrire un carré dans ce demi - disque, c'est-à-dire que les quatre sommets du carré sont soit sur le demi-cercle, soit sur le diamètre qui limite le demi - disque

Analyse : Supposons l'existence d'un tel carré. On voit très rapidement que deux sommets doivent être sur le diamètre. En effet, supposons que trois sommets soient sur le demi-cercle. Ces trois sommets sont aussi sur le cercle de centre I centre du carré. Or, deux cercles se coupent en au plus deux points, donc on ne peut avoir trois sommets sur le demi-cercle.
On comprend également rapidement que l'axe de symétrie du demi - disque doit être confondu avec un axe de symétrie du carré, sinon deux des côtés seraient de longueur différente : Soient M' et N' les sommets du carré qui sont sur le diamètre, P' et Q' étant les sommets sur le demi – disque. Supposons que OM' $\neq$ ON',; d'après le théorème de Pythagore, on obtient les égalités :
$M'Q'^2 = OQ'^2 - OM'^2$ et $N'P'^2 = OP'^2 - ON'^2$. OQ'^2 et OP'^2 sont égaux (carrés des rayons du demi – disque) et donc si on a supposé OM' $\neq$ ON', on obtient M'Q' $\neq$ N'P', et on n'obtient donc pas un carré.
Arrêtons ici, un instant, l'analyse et utilisons la méthode d'abandon de contrainte :

Abandon de contrainte : on sait construire un carré MNPQ dont le côté [MN] est sur le diamètre du demi - disque et qui a pour milieu le centre du demi - disque (mais qui n'est pas inscrit dans le demi – disque). On construit donc successivement un point M, son symétrique par rapport à O, N et on termine le carré du même côté du diamètre que le demi – disque. En déplaçant M, on voit que P semble se déplacer sur une demi – droite particulière, ce qu'on peut confirmer en faisant afficher la trace de P. On a alors un moyen de construire le point P' sur le demi – cercle à partir de n'importe quel carré MNPQ vérifiant les conditions ci – dessus.
Une fois la construction faite, la démonstration est facile en première grâce à l'homothétie.

<u>Synthèse</u> : Soit MNPQ un carré tel que M et N soient sur [AB], et symétrique par rapport à O. La droite (OP) coupe le demi – disque en P'. Soit h l'homothétie de centre O qui transforme P en P'.
Soit N' l'image de N par h. (NP) a pour image (N'P') par h donc (N'P') est parallèle à (NP) et donc perpendiculaire à (ON'). De plus, $\frac{ON'}{P'N'} = \frac{ON}{PN} = \frac{1}{2}$. Soit M' le symétrique de N' par rapport à O; D'après ce qui précède, M'N' = N'P'. Soit Q l'intersection du demi – disque avec la perpendiculaire à (AB) passant par M'. En utilisant le théorème de Pythagore, on montre facilement que M'Q' = P'N'. De plus, (M'Q') et (N'P') sont toutes deux perpendiculaires à (AB). Donc (Q'P' est parallèle à (AB). On a donc un quadrilatère qui a 4 angles droits et deux côtés consécutifs égaux, c'est bien un carré.

Peut-il exister d'autres carrés répondant aux conditions ?
S'il en existait un autre, il serait l'image de MNPQ par une autre homothétie, ce qui supposerait l'existence d'un point P" image de P par une homothétie de centre O. Or (OP) ne coupe le demi-cercle qu'en un point, donc un telle homothétie ne peut exister.

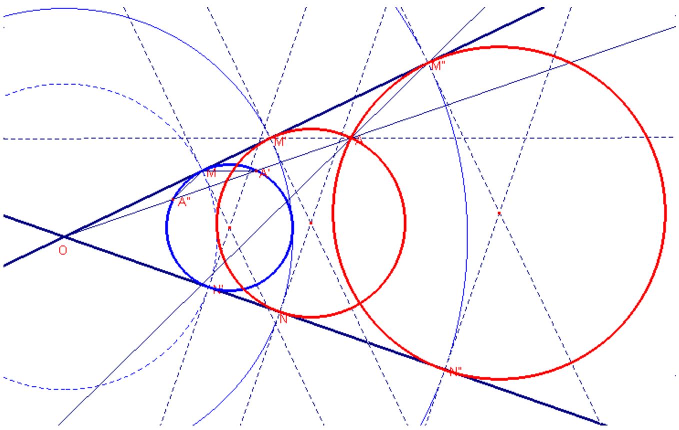


II - 4 Quatrième exemple

Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O, et A un point n'appartenant à aucune de ces droites. Construire un cercle tangent à (D) et (D') et passant par A

Abandon de contrainte :on sait construire un cercle C' tangent à deux droites données, on va donc abandonner la contrainte "passant par A".

Utilisation des LGD : On construit M sur (D) puis N sur (D') tel que ON = OM, puis le cercle C' tangent en M et N à (D) et(D'). En déplaçant M sur (D) on peut faire coïncider C' avec un cercle tangent à (D)et (D') passant par A. On voit la taille de C' se modifier, ce qui fait penser à une homothétie.



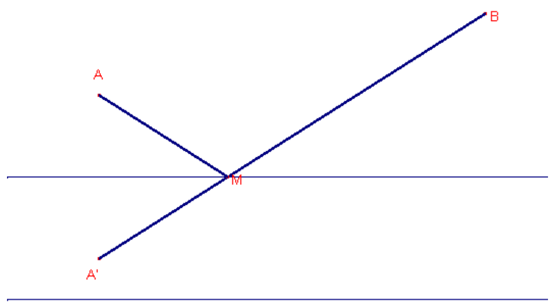
Condition suffisante : La droite (OA) coupe le cercle obtenu en deux points A' et A".
L'homothétie de centre O qui transforme A' en A transforme le cercle C' en un cercle C qui sera aussi tangent à D et (D') (propriétés de l'homothétie) et qui passera par A, donc qui répondra à la question. De même pour l'homothétie de centre O qui transforme A" en A.
Condition nécessaire : Supposons qu'il existe un troisième cercle tangent à (D) et (D') passant par A. Son centre I est sur la bissectrice de l'angle formé en O par (D) et (D'), de même que le centre I' du cercle C' ci-dessus. Soit h l'homothétie qui transforme I en I'. Elle transforme donc A en un point A'" qui appartient à l'intersection de (OA) et de C'. Or, ce ne peut être que A' ou A". Donc il ne peut exister de troisième cercle.
Nous voyons dans tous les exemples ci-dessus l'apport évident des LGD dans la phase de conjecture, mais aussi dans la phase de rédaction car la possibilité d'avoir une (et même une infinité) de figures claires permet de mieux dégager les configurations et les transformations mises en jeu.

II - 5 <u>Trois exemples classiques qui nous semblent relever, bien que d'une autre façon, de l'abandon de contrainte</u>

Problème de la rivière n°1 :

Etant donné deux points A et B situé sur une même berge d'une rivière, quel est le plus court chemin de A à B en passant par un point M de la berge ?

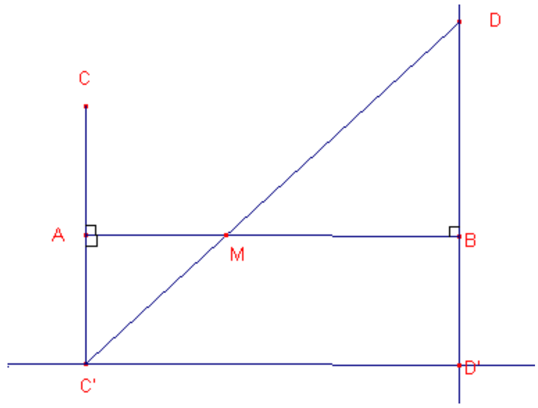
On peut à l'aide d'un LGD placer M quelconque sur la rive, faire afficher AM + MB et trouver la position minimisant cette somme, en déplaçant A ou B on peut ainsi "deviner" la position de M minimisant la somme, qui sera ensuite justifiée.
Nous savons depuis longtemps que le plus court chemin entre deux points est la ligne droite. mais comme nous devons passer par la berge, nous ne pouvons aller en ligne droite.
Abandonnons la contrainte : A est sur la même berge de la rivière que B. Quels autres points A' sont tels que
AM + MB = A'M + MB ?
Il faut que AM = A'M, donc que A et A' soient sur le même cercle de centre M. Mais M n'est pas connu. Le seul point A' constructible à partir de A vérifiant la condition est le symétrique de A par rapport à la berge. Ensuite, A'M + MB est minimal quand A', M et B sont alignés, ce qui donne l'emplacement du point M.



Problème de trajet minimal :

Soit [AB] un segment de longueur a, C un point de la perpendiculaire à (AB) passant par A tel que AC = c, et D un point de la perpendiculaire à (AB) passant par B tel que D et C sont du même côté de (AB) et BD = b
Soit M un point du segment [AB]. Trouver la position de M sur [AB] qui minimise la longueur MC + MD.
On appellera x la longueur AM et on exprimera la longueur minimale en fonction de a, b et c.

Sous une forme différente, il s'agit en fait du même problème que ci-dessus.



Par contre, ce problème, posé au moment où on étudie les dérivées de fonctions composées, conduit à des calculs certes faisables, mais très fastidieux, alors qu'une méthode par abandon de contrainte (C et D du même côté de (AB)) conduit à un exercice de niveau troisième puisque C', M et D doivent être alignés ce qui permet d'utiliser le théorème de Thalès ou encore plus simple le théorème de Pythagore dans le triangle C'D'D, D' étant le point de la droite (BD) situé du même côté de (AB) que C' et tel que BD' = AC'.

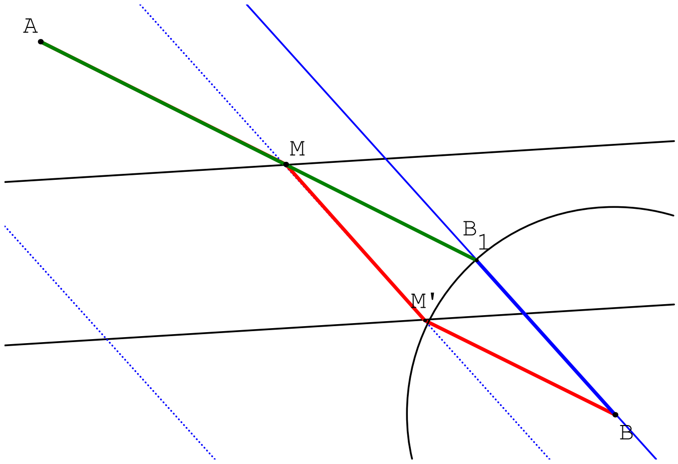
On a alors CM + MD = C'D et $C'D^2 = C'D'^2 + D'D^2 = a^2 + (b + c)^2$ et donc CM + MD = $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$

Cet abandon est sous-jacent dans la méthode analytique, puisque quand on traduit le texte, le fait que C et D sont du même côté de (AB) n'apparaît pas dans la fonction obtenue dont il s'agit de trouver le minimum.

Problème de la rivière n°2 : on doit aller d'un point A situé d'un côté d'une rivière représentée par deux droites parallèles à un point B situé de l'autre côté en traversant la rivière parallèlement à une direction donnée, et de façon à minimiser le trajet de A à B.

Utilisation d'un LGD : en plaçant M sur la berge, en construisant M' sur l'autre berge et en faisant afficher la somme AM + MM' + M'B, on voit que la position de M' qui rend minimale la somme semble correspondre à (AM) parallèle à (M'B), et on devine le début d'un parallélogramme $MM'BB_1$, qui conduit à l'analyse ci-dessous :

On se rend compte que la traversée de la rivière a toujours la même longueur puisque on traverse parallèlement à une direction donnée.;
Abandon de contrainte : il n'a plus de rivière, et nous allons faire ce trajet fixe à partir de B (ou de A) tel qu'il doit être fait. J'arrive en un point B_1, et de ce point bien sûr le plus cours chemin pour aller à A est la ligne droite, ce qui va me donner le point M où je dois atteindre la berge en partant de A, et me donnera le point M' sur l'autre berge (ou d'abord le point M' puis le point M si je raisonne à partir de A).



III - Un exemple détaillé en troisième (partie rédigée par C. Pintrand[1]) : Inscription d'un carré dans un triangle

Fiche professeur :

Niveau : 3ème
Utilisation : vidéo ou postes
Durée : 1 heure

Théorème de Thalès.

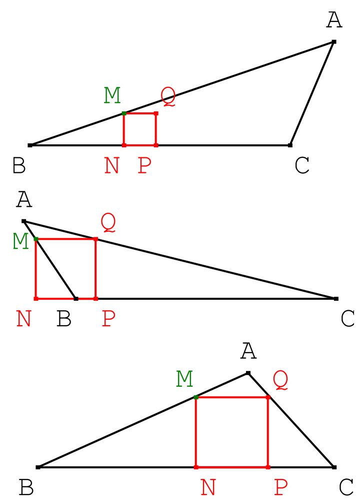
- **Objectif visé :** application du théorème de Thalès

- **Enoncé du problème** :

On donne un triangle ABC quelconque : est-il possible de construire un carré EFGH dont chacun des quatre sommets appartienne à l'un ou l'autre des côtés [AB], [BC] et [AC] ?

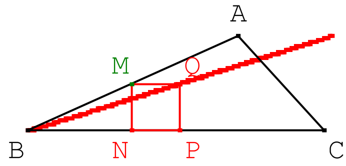
- **Comment le poser avec l'outil informatique ?**
-

Fiche élève 1/2 :
ABC est un triangle quelconque.
On considère un point quelconque M, *libre* sur le côté [AB].
1.
On construit un carré MNPQ avec 3 sommets appartenant aux côtés du triangle puis on déplace le point A pour constater que MNPQ reste carré.
2.
a) On déplace le point A afin de découvrir que l'appartenance des sommets N et P au côté [BC] n'est réalisée que si l'angle $\widehat{B}$ est aigu.
b) On restreint donc les déplacements du point A en conséquence.
3.
a) On déplace le point M sur le segment [AB] pour constater que MNPQ reste carré.
b) On cherche une position pour M et pour A afin que les quatre sommets M, N, P et Q appartiennent aux côtés du triangle ABC.



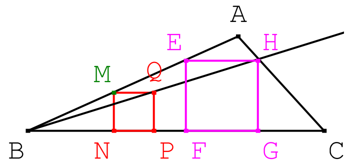
[1] Les fiches rédigées sont le fruit d'un travail dans le groupe d'étude « Logiciels de géométrie au collège » de l'IREM

4.
a) On déplace le point A pour constater qu'il est impossible d'obtenir une solution au problème lorsque l'angle $\widehat{C}$ est obtus.
c) On restreint donc les déplacements du point A en conséquence.



5.
On observe puis on dessine aux instruments le *" trajet "* du point Q lorsque M décrit le segment [AB].

6.
On construit aux instruments la position H du point Q qui semble répondre au problème.



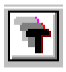
<u>Fiche-élève 2/2</u> : on prouve que le quadrilatère EFGH obtenu est bien un carré en isolant à l'écran les configurations de Thalès adéquates.

- **Quel est l'intérêt de traiter cet exercice en informatique ?**

Les points A, B, C et M peuvent être déplacés à volonté par l'élève ; les mouvements observés à l'écran doivent permettre :
- de conjecturer rapidement, sans avoir à tracer au brouillon une multitude de schémas, que le côté du triangle qui contient deux sommets du carré ne peut être que celui qui est adjacent à deux angles aigus du triangle
- de " matérialiser " une solution au problème de construction posé
- de conjecturer un procédé de construction sur papier, sans coup de pouce artificiellement *" parachuté "*.

Les commandes du fichier permettent ensuite :
- d'isoler tour à tour les différents triangles dans lesquels l'élève devra appliquer le théorème de Thalès pour prouver sa conjecture ; la figure complète est en effet trop complexe pour permettre à un élève de niveau moyen de parvenir à ses fins.
- de constater que la conclusion reste valable quel que soit le triangle ABC dont l'élève peut à loisir modifier la forme.

- **Commentaires sur le fichier cartria2.g2w[2] :**

Ouvrir le fichier cartria2.g2w.
- apparaissent à l'écran un triangle ABC et un point M sur le côté [AB]
- des appuis successifs sur la touche *" espace "* font apparaître/disparaître le carré MNPQ.
- le déplacement des points bleu et rose d'un cadre à l'autre permet de limiter/d'étendre les mouvements du point A
- les points A, B, C et M se déplacent à la souris
- on obtient la trace du point Q en cliquant l'icône  dans la barre d'outils
- des appuis successifs sur la touche *" w "* font apparaître/disparaître la demi-droite [BQ) et le carré EFGH
- l'appui sur la touche " 1 " isole la configuration de Thalès BMEHQ
- l'appui sur la touche " 2 " isole la configuration de Thalès BQHGP.

- **Gestion de la séance :**

Au vidéo projecteur ou en salle informatique où chaque élève sera devant un poste après la première partie.
En première partie, le professeur énonce et inscrit au tableau le problème ; pendant la phase de recherche sur le cahier de brouillon, il répond aux éventuelles questions des élèves afin que chacun s'approprie l'énoncé. Cette phase ne doit pas dépasser 10 minutes.
En seconde partie, le professeur distribue la première fiche-élève qui permet un traitement informatique du problème. Les différentes manipulations et la conjecture à trouver à l'aide du logiciel ne doivent pas excéder 15 à 20 minutes.
En troisième partie, arrive la phase de mise en commun des observations et des conjectures inscrites sur le document-élève. Le professeur construit au tableau la figure dictée par les élèves. Se pose alors la question de la validité de la construction : le quadrilatère obtenu est-il vraiment un carré ? …Le professeur distribue alors la 2ème fiche-élève qui doit aider les élèves à prouver : il s'agit de compléter la démonstration proposée. Ce travail est à finir pour la séquence suivante avec les deux constructions demandées à la fin de la fiche-élève 2/2.
On consacrera un quart d'heure à leur correction. Les deux documents-élève seront collés dans le cahier d'exercices.

[2] fichier télé - chargeable sur le site de l'IREM http://wwwmaths.univ-bpclermont.fr/irem/publications/ dans la rubrique 'Publications -bulletin n° 56.

Fiche élève 1/2

Triangle et carré

Enoncé du problème :

On donne un triangle ABC quelconque : est-il possible de construire un carré EFGH dont chacun des quatre sommets appartienne à l'un ou l'autre des côtés [AB], [BC] et [AC] ?

1. A l'aide du logiciel " géoplanw " ouvrir le fichier ***cartria2.gw*** :
apparaissent à l'écran un triangle ABC et un point M sur le côté [AB] .
Appuyer plusieurs fois sur la barre d'espace du clavier afin de dessiner un carré MNPQ ; combien de sommets de ce carré appartiennent-ils au triangle ABC ? …………………Les nommer : ……………………
Comme il a été constaté après la recherche au brouillon, deux sommets consécutifs du carré appartiennent nécessairement à un même côté du triangle : sans restreindre la généralité, on a choisi d'appeler ces sommets N et P et de nommer [BC] ce côté.

Le sommet A est *libre* dans le demi-plan " supérieur " de frontière (BC) c'est-à-dire qu'on peut le déplacer avec la souris.
Déplacer le point A : le quadrilatère MNPQ reste-t-il carré ? ……….

2. Le but de cette deuxième question est de découvrir quand il est impossible d'avoir les sommets N et P sur le côté [BC]:

a) **Déplacer** le point A et **observer** les positions de A pour lesquelles les sommets N et P ne sont pas tous les deux sur [BC] . Que peut-on alors dire de l'angle $\widehat{B}$?
……………………………………………………………..………………….
Combien de sommets du carré appartiennent-ils alors aux côtés [AB], [BC] et [AC] du triangle :
…………………………………………………
A main levée, **dessiner** ci-contre le triangle ABC et le carré MNPQ lorsque N et P ne sont pas tous les deux sur le segment [BC] .

Conclusion : pour que les sommets N et P appartiennent au côté [BC] , il faut que l'angle $\widehat{B}$ soit …………

b) Avec la souris, **saisir** alors le point bleu " b " (il se trouve dans le cadre *" angles quelconques "* en haut à droite de l'écran) et le **placer** dans le cadre *" angles aigus ou droits "* : **bouger** le point A et constater que, désormais, l'angle $\widehat{B}$ ne pourra plus être obtus.

3. Le point M est *libre* sur le segment [AB], c'est-à-dire qu'on peut le déplacer avec la souris sur le côté [AB] .
a) **Déplacer** le point M :

le quadrilatère MNPQ reste-t-il carré ? ……….
Les dimensions de MNPQ sont-elles modifiées lorsqu'on déplace le point M ? …………
b) **Déplacer** les points M et/ou A : est-ce possible d'obtenir, *apparemment*, les quatre sommets du carré appartenant aux côtés du triangle ABC ? ……………..
A main levée, **dessiner** ci-contre le triangle ABC et le carré avec ses sommets M,N,P et Q appartenant à l'un ou l'autre des côtés [AB], [BC] et [AC].

4. a) Peut-on déplacer **le point A de telle sorte qu'il soit impossible d'obtenir les quatre sommets du carré sur les côtés du triangle et ceci quelle que soit la position du point M sur le segment [AB] ? ……………**

Que peut-on alors dire de l'angle $\widehat{C}$?
……………………………………………………………………………………

b) **Appuyer** sur la barre d'espace du clavier afin de faire disparaître le carré MNPQ.
c) Avec la souris, **saisir** le point mauve " c " (il se trouve dans le cadre *" angles quelconques "* en haut à droite de l'écran) et le **placer** dans le cadre *" angles aigus "* :
déplacer les sommets A, B et C : est-il possible d'obtenir l'angle $\widehat{A}$ aigu ? …….. … Obtus ? …………
Est-il possible d'obtenir l'angle $\widehat{B}$ aigu ? ………. Obtus ? ……….. Droit ? …………
Est-il possible d'obtenir l'angle $\widehat{C}$ aigu ? ………. Obtus ? ……….. Droit ? …………
Combien un triangle peut-il posséder d'angle(s) obtus ? Pourquoi ?

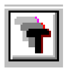
………

………

5. **Appuyer** sur la barre d'espace du clavier afin de reconstruire un carré MNPQ.

Lorsqu'on déplace le point M, **observer** le déplacement du point Q. Que peut-on en dire ?

………

6. Afin de matérialiser le trajet du point Q, **cliquer** sur l'icône  puis **déplacer** le point M tout le long du segment [AB] à l'aide de la souris. Le trajet effectué par le point Q est-il *apparemment* un cercle, un segment, une droite ou une autre courbe ?
………

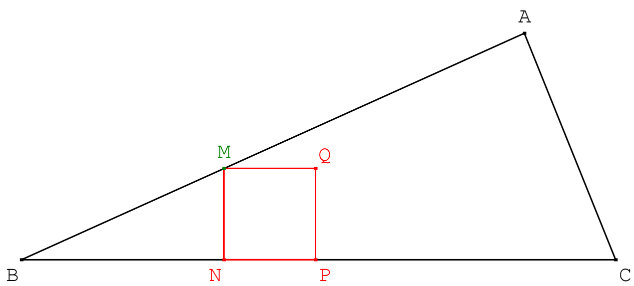
Dessiner ci-dessous aux instruments de géométrie le triangle ABC, le carré MNPQ (dans une position quelconque, c'est-à-dire avec seulement trois sommets sur les côtés du triangle) <u>et le trajet du point Q</u> en rouge.

7. **Cliquer** sur l'icône  et positionner le point M de façon quelconque sur le côté [AB].
<u>Au vu de l'expérience précédente</u> (question 5), comment pourrait-on compléter le schéma ci-dessous pour connaître la position H *" idéale "* du point Q, c'est-à-dire le point H qui se trouve sur le segment [AC] et qui permet d'obtenir *semble-t-il* le carré recherché (celui dont chacun des quatre sommets appartient à l'un ou l'autre des côtés du triangle ABC) ?

………

………

Compléter alors le schéma ci-dessous en construisant aux instruments un second quadrilatère HEFG qui répond *apparemment* au problème posé (H sur [AC], E sur [AB], F et G sur [BC])

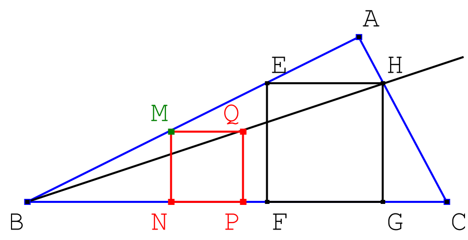


Fiche élève 2/2

Triangle et carré (suite)

Le but de cette étude est de prouver que le quadrilatère construit à la 7ème question de la fiche n°1 est bien un carré.

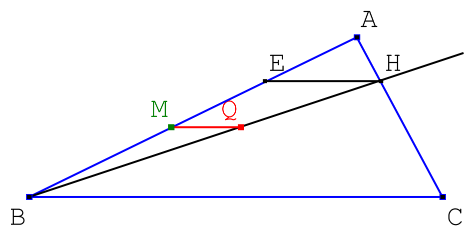
1. **Appuyer** sur la touche ″ *w* ″ du clavier pour faire apparaître successivement la demi-droite [BQ), le point d'intersection H avec le côté [AC], le point E (intersection de la parallèle à (BC) avec le côté [AB]), le point F, le point G et enfin le quadrilatère EFGH.



2. **Expliquer** la construction des points F et G (c'est-à-dire comment on peut les construire sur papier avec les instruments de géométrie) :
……
……
……………………………………………………………………………………………

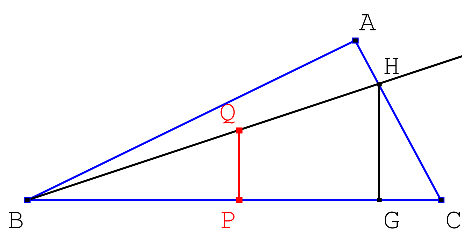
3. **Prouver** que EFGH est un rectangle :
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

4. Le schéma de la 1ère question étant affiché à l'écran, **appuyer** sur la touche ″ 1 ″ du clavier puis **compléter** la démonstration ci-dessous :
comme (EH) et (MQ) sont parallèles à (BC), les droites (EH) et (MQ) sont ………………..
Les points B,M et E sont alignés ainsi que les points ………………..
Les droites (EH) et (MQ) étant parallèles, le théorème ………………. affirme que :
$\frac{BH}{BQ}=\frac{EH}{....}$ (égalité n° 1)



5. **Appuyer** sur la touche ″ 1 ″ du clavier puis sur la touche ″ 2 ″ puis **compléter** la démonstration ci-dessous :
comme (QP) et (HG) sont perpendiculaires à (BC) les droites (QP) et (HG) sont ………………….
Les points ……………….. sont alignés ainsi que les points …………………
Les droites (QP) et (HG) étant parallèles, le théorème ……………….. affirme que :

$\frac{BH}{BQ}=\frac{.....}{QP}$ (égalité n° 2)



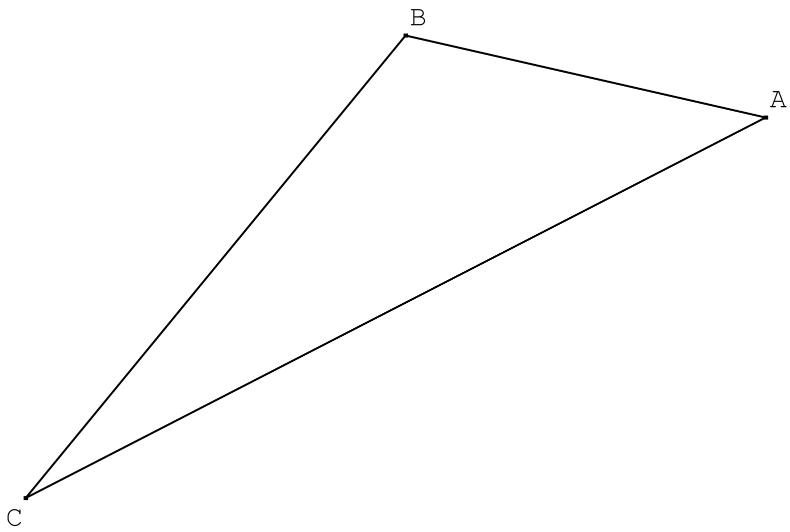
6. **Compléter** :
en comparant les égalités n° 1 et n° 2 : $\frac{EH}{MQ}=\frac{....}{QP}$. Ces deux derniers rapports ayant le même dénominateur (car MNPQ est un carré par construction) on en déduit finalement que : EH = ….

Que peut-on dire d'un <u>rectangle</u> qui possède deux <u>côtés consécutifs</u> de même longueur ? …………………………

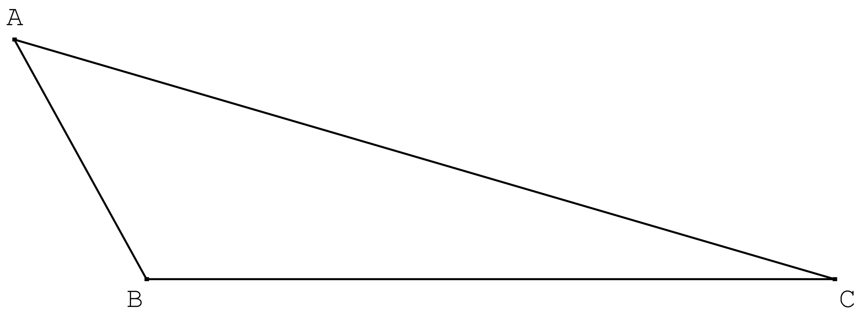
Le rectangle EFGH a donc deux côtés consécutifs de même longueur (qui sont …… et ……) : on peut alors affirmer qu'il s'agit, en fait, d'un …………

7. Dans chacun des deux cas suivants, construire un carré dont chaque sommet appartient à un côté du triangle :

Cas n° 1 :



Cas n° 2 :



Annexe pour le professeur

Pour aller plus loin…

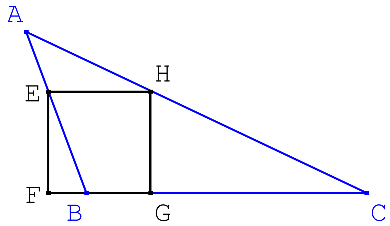
Le problème :

On donne un triangle ABC quelconque ; est-il possible de construire un carré EFGH dont chacun des quatre sommets appartienne à l'un ou l'autre des côtés [AB], [BC] et [AC] ?

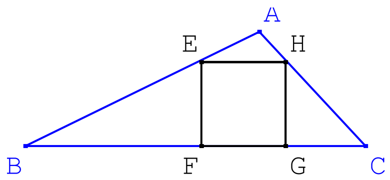
Analyse :

Si un tel carré existe alors :

- deux de ses sommets appartiennent à un même côté Γ du triangle : appelons-les F et G,
- ces deux sommets F et G sont consécutifs (sinon un côté du triangle serait axe de symétrie du carré et, par conséquent, deux côtés du triangle seraient situés de part et d'autre du 3$^{\text{ème}}$ côté ! …)
- F et G étant les projetés orthogonaux des deux autres sommets du carré sur le côté Γ, ce dernier est <u>adjacent à deux angles aigus du triangle</u>, (ou à un angle droit et à un angle aigu)



Cas à exclure : F $\notin$ [BC]

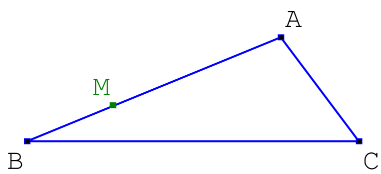


Cas possible : F $\in$ [BC] et G $\in$ [BC]

Construction et synthèse :

1) Choisissons par exemple, sans restreindre la généralité :

- de nommer B et C les sommets de deux angles aigus du triangle ABC,
- d'appeler M un point quelconque du côté [AB] (différent de A et de B)



2) On construit successivement :

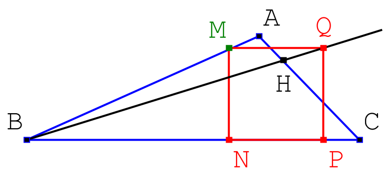
- le point N, intersection du côté [BC] avec la perpendiculaire à (BC) passant par M,
- le point P de la demi-droite [NC) tel que NP = NM,
- le point Q tel que MNPQ soit un carré,
- le point H, intersection de la demi-droite [BQ) avec le côté [AC]
- le point E, intersection de la parallèle à (BC) passant par H avec le côté [AB],
- les points G et F, intersections respectives avec le côté [BC] des perpendiculaires à (BC) passant par H et E.

3) Preuve :

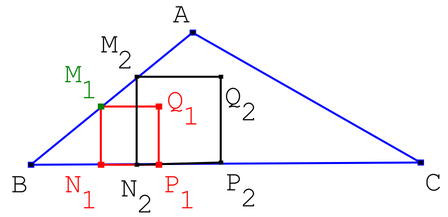
- Existence du point H :

le carré MNPQ est inclus dans le demi-plan de frontière (BC) contenant A <u>et</u> dans le demi-plan de frontière (AB) contenant C (sinon : $\widehat{NMQ} > \widehat{NMA} > 90°$)

Ainsi le point Q appartient au <u>secteur angulaire</u> $[\widehat{ABC}]$: l'existence du point H est garantie.



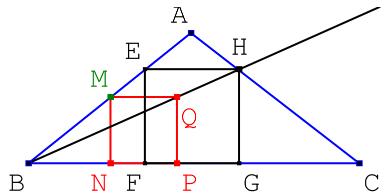
- Unicité du point H :



On donne les deux carrés $M_1N_1P_1Q_1$ et $M_2N_2P_2Q_2$ ci-contre ; considérons l'homothétie h de centre B qui transforme M_1 en M_2.
L'image par h du carré $M_1N_1P_1Q_1$ est le carré de sommet M_2 et dont un côté est inclus dans la demi-droite $[N_1C)$: il s'agit donc du carré $M_2N_2P_2Q_2$; ainsi $h(Q_1) = Q_2$ ce qui entraîne l'alignement des points B, Q_1 et Q_2.
Conclusion : l'unicité du point H est assurée puisque ce dernier ne dépend pas du choix de M sur [AB]

- Le quadrilatère EFGH est un rectangle puisqu'il possède, par construction, quatre angles droits.

- Les points B, E et M sont alignés de même que les points B, H et Q.



Les droites (EH) et (MQ) étant parallèles, le théorème de Thalès affirme que :

$\frac{BH}{BQ} = \frac{EH}{MQ}$ (égalité n°1)

Les points B, G et P sont alignés de même que les points B, H et Q.
Les droites (GH) et (QP) étant parallèles, le théorème de Thalès affirme que : $\frac{BH}{BQ} = \frac{HG}{QP}$ (égalité n°2)

- La comparaison des égalités n°1 et n°2 amène à la nouvelle égalité suivante : $\frac{EH}{MQ} = \frac{HG}{QP}$

Ces deux derniers rapports ayant le même dénominateur (MNPQ est un carré par construction) on en déduit finalement que : EH = HG

Le rectangle EFGH ayant deux côtés consécutifs de même longueur, il s'agit en fait d'un carré (ce qu'il fallait prouver)

4) Conclusion :

- Il est toujours possible de construire un carré dont les quatre sommets appartiennent aux côtés d'un triangle donné.

- Si le triangle possède un angle obtus, on ne peut inscrire qu'un seul carré dans ce triangle :
le côté du triangle qui est adjacent aux deux angles aigus sera le support d'un côté de ce carré.

- Si le triangle est rectangle, on pourra inscrire exactement deux carrés dans ce triangle : l'hypoténuse sera le support d'un côté du premier carré et chacun des côtés de l'angle droit supportera un côté du second carré.

- Si le triangle possède trois angles aigus, on pourra inscrire exactement trois carrés dans le triangle : chaque côté du triangle sera le support d'un côté d'un des trois carrés.