" Introduire le produit scalaire en 1re S"[1]

Francoise Barachet, IREM de Clermont-Ferrand

Sommaire

[1] Les programmes auxquels nous nous référons sont ceux de 1999 pour la classe de troisième, de 2000 pour la classe de seconde et de 2001 pour la classe de première S.

Comment introduire le produit scalaire de façon motivée, de telle sorte qu'il apparaisse comme réponse à une question ? On peut trouver réponse à cette question en examinant ce à quoi sert le produit scalaire en 1[re] S : il est utile pour démontrer que deux droites ou deux directions sont orthogonales, pour déterminer un angle géométrique (par calcul de son cosinus), et enfin pour établir le théorème d'Al-Kashi. Or les élèves savent depuis la seconde, démontrer analytiquement que deux droites sont parallèles : *D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs* $\vec{u}(x, y)$ *et* $\vec{v}(x', y')$ *sont parallèles si et seulement si* $xy' - x'y = 0$. On peut dès lors se demander si l'on peut faire la même chose avec des droites perpendiculaires : c'est ce qui va initier l'introduction du produit scalaire.

1 UN PREMIER MOMENT DE L'ETUDE : UNE PREMIERE QUESTION.

Q1. Peut-on par le calcul montrer que deux droites sont perpendiculaires ?

Cette question est posée aux élèves en classe, répartis en petits groupes.
Ils se sont tous placés spontanément dans un repère orthonormal. On a pu noter trois façons d'aborder le problème :

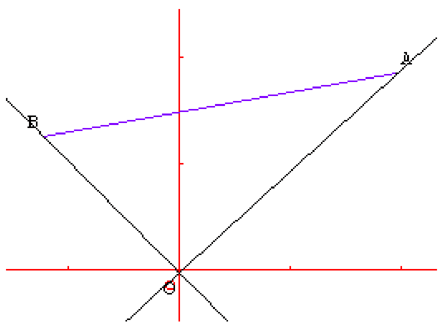
- Certains examinent des cas particuliers qu'ils connaissent bien : le cas des axes et celui des bissectrices.
- D'autres pensent à utiliser la formule *aa'= –1*. Bien que ne figurant plus au programme de seconde, cette formule était néanmoins connue de certains élèves, ce qui nous a quelque peu surpris.
- D'emblée certains abordent le cas général.

Comme nous l'avons dit en évoquant les principes qui nous guident, le professeur est un directeur d'étude et il convient en conséquence qu'il guide l'étude des élèves par un jeu de questions, sans pour autant leur donner la solution ni briser la dynamique de l'étude. Par exemple, on a pu demander aux élèves de revenir sur la condition de parallélisme et de s'interroger sur la signification des éléments qui la composent : *x, x', y, y'*, est-ce que cela correspond à des coordonnées de points, de vecteurs ?
Les élèves ayant choisi de travailler sur des cas particuliers, choisissent les points *A(1,1)* et *B(-1,1)* sur les bissectrices du repère et par similitude avec la condition de parallélisme trouve que : " $1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ ". Comme ils ne savent plus que faire, l'enseignant les engage à examiner ce qui se passerait si on translatait les deux bissectrices, et aussi si l'on prenait d'autres points sur les deux bissectrices ! Le travail engagé à partir de ces questions conduit les élèves à percevoir qu'il faut utiliser des coordonnées de vecteurs et non de points. De même pour ceux travaillant à partir de la relation *aa'=-1*, le professeur les invite à revenir sur la signification des coefficients *a* et *a'* et de faire le lien avec la condition de parallélisme.
Tout ce travail fait que chacun des groupes en arrive à voir que la clé est le théorème de Pythagore et un premier bilan peut conclure ce premier moment d'étude. Notons que les élèves ont été invités aussi à se demander ce qui passait avec un repère non orthonormé et qu'ils ont remarqué que le résultat obtenu n'était valide que si le repère l'était.

Bilan :

1°) Nous avons : $D \perp D' \Leftrightarrow \mathrm{OAB}$ *triangle rectangle en* O

$\Leftrightarrow \mathrm{AB}^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 \Leftrightarrow 2(xx' + yy') = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$



2°) Soit $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$*, un repère orthonormé,* $\vec{u}(x, y)$ *et* $\vec{v}(x', y')$
sont orthogonaux équivaut à $xx' + yy' = 0$

2 DEUXIEME MOMENT DE L'ETUDE : UNE DEUXIEME QUESTION.

Ce deuxième temps, comme les suivants, se passe en classe entière et se fait sous forme de cours dialogué.
On a prouvé précédemment, avec les notations utilisées, que :
$D \perp D'$ *ssi* $xx' + yy' = 0$ *ssi* $AB^2 = OA^2 + OB^2$

Q2 : Que vaut $xx' + yy'$ si *D* et *D'* ne sont pas perpendiculaires ? Est-ce que cela pourrait avoir une signification géométrique ?

Un retour sur le calcul ayant conduit précédemment à faire apparaître $xx' + yy' = 0$ conduit alors à remarquer que : $AB^2 - OA^2 - OB^2 = -2xx' - 2yy'$

Et donc que : $xx' + yy' = \frac{1}{2}(OA^2 + OB^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2)$

Avec ce résultat, ce qui apparaît et c'est un essentiel ici c'est que la quantité $xx' + yy'$ ne dépend pas du repère orthonormé choisi!! C'est un invariant géométrique.
Et en bilan de ce deuxième moment, on peut écrire :
" Soit $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de coordonnées* (x, y) *et* (x', y') *dans un repère R orthonormé et de coordonnées* (X, Y) *et* (X', Y') *dans un reprède R' orthonormé alors :* $xx' + yy'' = XX' + YY'$
C'est un invariant géométrique que nous appelerons produit scalaire de $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *et que nous notons* $\vec{u}.\vec{v}$ *".*

3 TROISIEME MOMENT DE L'ETUDE : UNE TROISIEME QUESTION.

Toujours en classe entière et sous forme de cours dialogué.

Q3. On a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ ou $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB}) = 0$

Qu'en est-il si $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \neq 0$? Peut-on dire quelque chose de "$\cos(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$" ?

Pour répondre à cette question la piste est ici de chercher à utiliser un repère orthonormé particulier, ce que l'on peut faire puisque le produit scalaire est un invariant ne dépendant pas du repère orthonormé choisi.
Divers choix sont possibles, parmi ceux-ci, on peut choisir $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de telle sorte que $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{i}$ soient colinéaires et de même sens.
En posant $\theta = (\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{OB})$ on a alors $\overrightarrow{OB} = OB\ (\cos\theta\ \vec{i} + \sin\theta\ \vec{j})$ et un calcul donne :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \cos\theta$$

A ce stade, on peut faire un bilan intermédiaire sur les usages à venir du produit scalaire.

A quoi peut servir le produit scalaire ?

Le produit scalaire peut servir :

- *Pour démontrer par le calcul, un repère orthonormé étant choisi, une orthogonalité.*
- *Pour déterminer un angle géométrique, avec le calcul de son cosinus, dès lors que l'on sait calculer le produit scalaire dans un repère.*

Ce premier bilan sur l'utilité du produit scalaire étant fait, on peut se demander s'il pourrait être d'un autre usage ?

4 QUATRIEME MOMENT : UNE QUATRIEME QUESTION.

Q4. Le produit scalaire peut-il être d'une autre utilité ?

Pour diriger l'étude de cette question, on peut faire remarquer que lorsque $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA} = OA^2$, le carré d'une longueur ! Si on sait calculer le carré d'une longueur, alors on saura calculer cette longueur.

On peut donc légitimement se demander si le produit scalaire pourrait servir à calculer une longueur. Cette question nous dirige vers Al-Kashi.

Q4 Bis. Soit OAB, un triangle et supposons que l'on connaisse OA, OB et l'angle en O. Peut-on calculer AB ?

Si l'angle est droit, on reconnaît Pythagore. Il s'agit de généraliser celui-ci au cas où l'angle en O n'est pas droit. [On connaît deux côtés d'un triangle et l'angle compris entre ces deux côtés, c'est un cas d'isométrie. La longueur du troisième côté, AB, est alors déterminée, il est légitime de se demander si on peut la calculer].

On a : $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$

Peut-on aller plus loin ? Il nous faut introduire le point O et on peut penser à poser, vectoriellement, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$.

Le produit $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ devient alors : $(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}).(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB})$

Encore une fois, peut-on aller plus loin ? Peut-être, si d'aventure le produit scalaire était distributif par rapport à la somme vectorielle. Qu'en est-il ? On peut se placer dans un repère orthonormé quelconque et par le calcul, montrer qu'il en est bien ainsi et de plus on peut montrer aussi qu'il est commutatif. Au final, on obtient :

$$AB^2=AO^2+OB^2+2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - 2\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA^2+OB^2 - 2\,OA.OB.\cos\widehat{AOB}$$

Ainsi, on a bien le théorème d'Al Kashi.

5 BILAN

On a ainsi, la totalité du cours sur le produit scalaire, motivé par un jeu de questions qui s'enchaînent. De plus, cela permet aussi de pointer aux yeux des élèves les usages à venir dans les exercices du produit scalaire.