Livret de liaison Seconde - Première S, STI2D, STL

I.R.E.M. de Clermont-Ferrand
Groupe Aurillac - Lycée

Juin 2015

Ont collaboré à cet ouvrage :

- Emmanuelle BOYER, Lycée Émile Duclaux, Aurillac.
- Patrick DE GIOVANNI, Lycée Jean Monnet, Aurillac.
- Bruno GRENIER, Lycée Émile Duclaux, Aurillac.
- Fabrice LALLEMAND, Lycée Émile Duclaux, Aurillac.
- Jérôme MATHIEU, Lycée Jean Monnet, Aurillac.
- Alexandre ROCQ, Lycée Émile Duclaux, Aurillac.
- Nathalie SOBELLA, Lycée Jean Monnet, Aurillac.
- Stéphane SOBELLA, Lycée Georges Pompidou - ENILV, Aurillac.

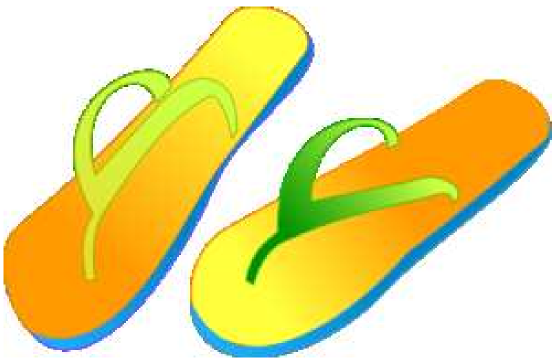
Table des matières

Introduction

Pour pouvoir faire un cursus scientifique avec des mathématiques, il est nécessaire de maîtriser des notions de base, mais aussi de développer une motivation pour la recherche d'exercices dont la solution n'est pas trouvée en 5 minutes.
Ce livret de liaison de la seconde à la première S, STI2D et STL propose des exercices pour s'entraîner et dont la maîtrise technique est nécessaire pour aborder la classe de première en toute sérénité (la technique sera bien sûr revue rapidement en classe avec le professeur).
Il contient aussi des problèmes à chercher, . . . comme un challenge ! La résolution de ces problèmes, un peu plus difficiles, signalés par un ou plusieurs symboles ✈, ne fait appel qu'à des connaissances de la classe de seconde, mais ils pourront aussi être résolus au fur et à mesure de la classe de première.
La maîtrise de l'utilisation de la calculatrice et de logiciels (tableurs, géométrie dynamique, programmation, . . .) est un objectif à atteindre le plus rapidement possible . Quelques exercices sont proposés : ils sont signalés par le symbole 🖰.
Bon courage à tous,
Les maths, c'est tout un monde à explorer . . .

Les professeurs de mathématiques, auteurs du livret.

Il n'est pas prévu de compléter les exercices directement sur le livret (les espaces laissés dans certains exercices sont volontairement insuffisants). Il faut travailler avec un cahier de recherche.



1 Symboles $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$

Prérequis

Définition 1 : Les ensembles A et B sont deux **sous ensembles** de l'ensemble E si, et seulement si, tous les éléments de A et de B sont dans l'ensemble E.
On note : $A \subset E$ et $B \subset E$ et on lit : "*A est inclus dans E*".
Remarque : la notation est différente lorsqu'on s'intéresse à un élément x de cet ensemble : on emploie le symbole $\in$ qui se lit "appartient à".
Traduction : si $x \in A$, alors $x \in E$.

Définition 2 : L'ensemble noté $\overline{A}$ est l'ensemble de tous les éléments de l'ensemble E qui n'appartiennent pas à l'ensemble A, on l'appelle le **complémentaire de A dans l'ensemble E** et on lit : "A barre".
Traduction : soit x un élément de E, si $x \notin A$ alors $x \in \overline{A}$.

Définitions 3 :
$A \cup B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B ou aux deux à la fois. On l'appelle **la réunion des deux ensembles** A et B et on lit : "A union B".
$A \cap B$ est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B (à la fois). On l'appelle **l'intersection des deux ensembles** A et B et on lit : "A inter B".
Traduction : Soit x un élément de E, si $x \in A$ **et** $x \in B$ alors $x \in A \cap B$. Soit x un élément de E, si $x \in A$ **ou** $x \in B$ alors $x \in A \cup B$.
Remarque : si $A \cap B = \varnothing$, alors on dit que les deux ensembles sont disjoints.

Exercice 1

Le tableau ci-dessous donne le nombre de chômeurs (en milliers) selon le sexe et l'âge en 2012 (source : INSEE, enquête Emploi 2012).

	Femmes (F)	**Hommes (H)**	**Ensemble**
15 ans ou plus (C)	1 361	1 451	2 812
15-24 ans (C_1)	297	361	658
25-49 ans (C_2)	812	816	1 628
50-64 ans (C_3)	250	272	522
65 ans ou plus (C_4)	2	2	4

Champ : France métropolitaine, population des ménages, personnes de 15 ans ou plus (âge courant).

1. Combien d'éléments possède l'ensemble F ?
2. Concrètement, dans cet exemple, l'ensemble de tous les éléments étudiés est l'ensemble de tous les ....
   Quel est le nom donné à cet ensemble dans le tableau ? Combien d'éléments possède-t-il ?
   Quel symbole peut-on mettre entre l'ensemble F et l'ensemble C ?
3. $H \cap C_2$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
4. $F \cup C_3$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
5. $\overline{F}$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?
6. $\overline{C_1}$ est l'ensemble des .... Combien d'éléments cet ensemble possède-t-il ?

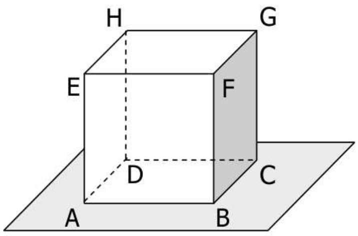
Exercice 2

Recopier et compléter les pointillés :

1. $3 \ldots \mathbb{N}$; $-3,1 \ldots \mathbb{N}$; $\mathbb{N} \ldots \mathbb{R}$; $\sqrt{5} \ldots \mathbb{Q}$.
2. Soit x un nombre compris entre 1 et 2, mais différent de 2, alors $x \ldots [1;2[$ et $[1;2[\ldots \mathbb{R}$.
3. $]1,1;1,2] \ldots [1;2] \iff$ si $1,1 < x < 1,2$ alors $1 < x < 2$.
4. Si $x \in [1;3[$ et $x \in [0;2[$, alors $x \in [1;3[\cap [0;2[$, donc $[1;3[\cap [0;2[= \ldots$.
5. Si $x \in [1;3[$ ou $x \in [0;2[$, alors $x \in [1;3[\cup [0;2[$, donc $[1;3[\cup [0;2[= \ldots$.
6. Les deux intervalles $[1;3]$ et $]4;+\infty[$ sont ....
7. L'ensemble de tous les nombres réels qui ne sont pas strictement supérieurs à 4 est l'intervalle ....
8. Soit x un nombre réel, si $x \notin [1;3[$, alors $x \in \ldots$. Le complémentaire de l'ensemble $[1;3[$ dans $\mathbb{R}$ est donc ....
9. Le complémentaire de l'ensemble des réels x tels que $x > -1$ est ....

Exercice 3

1. Soit (O, I, J) un repère du plan, D_1 la droite d'équation $y = 2x + 1$ et D_2 la droite d'équation $y = -x + 3$
   - **a.** Justifier que le point $A(-1;-1)$ appartient à D_1. On peut écrire : $A \ldots D_1$.
   - **b.** De même $A \in D_2$ car ....
   - **c.** Déterminer $D_1 \cap D_2$.
2. Dans l'espace, on considère le cube ci-dessous. Recopier et compléter les pointillés.



   - **a.** $F \ldots (EGB)$.
   - **b.** $(FG) \ldots (FBC)$.
   - **c.** $(EHB) \cap (ABD) = \ldots.$
   - **d.** $(EHB) \cap (FG) = \ldots.$
   - **e.** $(HD) \cap (ABC) = \ldots.$

2 Calcul littéral

Prérequis

- ☞ Maîtriser les identités remarquables, les priorités de développements.
- ☞ Repérer ou mettre en évidence un facteur commun pour factoriser.
- ☞ Mettre en évidence $a^2 - b^2$ pour factoriser.
- ☞ Réduire des fractions au même dénominateur.

Exercice 4

Développe les expressions suivantes :

Exemple guidé :

$A = 2(3x-1)^2 - (5x+3)(2-3x)$

$A = 2(\dots x^2 - \dots + 1) - (10x - \dots + \dots - \dots)$

$A = 18x^2 - \dots + \dots - 10x + \dots - \dots + \dots$

$A = \dots$

À toi de jouer : $B = (2x-9)(3-2x) + 5(2x+1)^2$ $C = 4(x-6)^2 - 3(5x+3)(5x-3)$

Exercice 5

Factorise les expressions suivantes :

Exemple guidé :

$A = 6x + 3 + 4(2x+1)^2$

$A = \dots(2x+1) + 4(2x+1)^2$

$A = (2x+1)(\dots + 4(\dots))$

$A = (2x+1)(\dots + 8x + \dots)$

$A = (\dots)(\dots)$

À toi de jouer :

$B = 2(5x-1)^2 + 10x - 2$

$C = (x^2-4) - (x+2)^2$

Exemple guidé :

$A = 36x^2 - (5x+1)^2$

$A = (\dots)^2 - (5x+1)^2$

$A = ((6x) + (\dots))((6x) + (\dots))$

$A = (6x\dots)(6x\dots)$

$A = (\dots)(\dots)$

À toi de jouer :

$B = (4x-3)^2 - 25x^2$

$C = 49 - (5x+2)^2$

Exercice 6

Écrire sous la forme d'une seule fraction :

Exemple guidé :

$A = 4 + \dfrac{3}{x+2}$ (cette expression existe si, et seulement si, $x+2 \neq \ldots$ (**valeur interdite pour A**))

$A = \dfrac{4 \times (\ldots + \ldots)}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

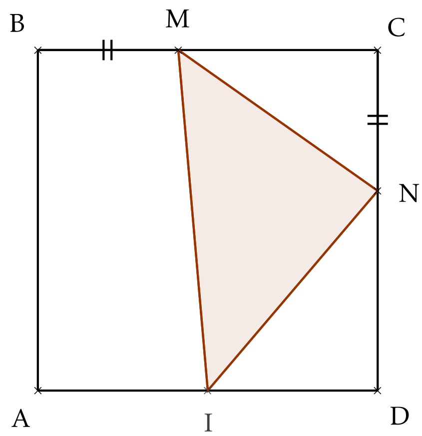
$A = \dfrac{\ldots + \ldots}{x+2} + \dfrac{3}{x+2}$

$A = \dfrac{\ldots + \ldots}{x+2}$

À toi de jouer : $B = \dfrac{2x}{3x-1} - 5 \qquad C = \dfrac{4}{2x+6} - \dfrac{3}{x-5}$.

Exercice 7 ✈

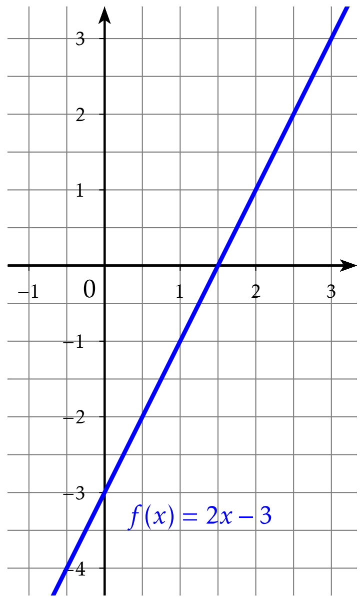
ABCD est un carré de côté 6 cm. I est le milieu de [AD].
M est un point de [BC] et N un point de [CD] tels que BM = CN = x.
Exprimer l'aire du triangle IMN en fonction de x.



3 Fonctions

Prérequis

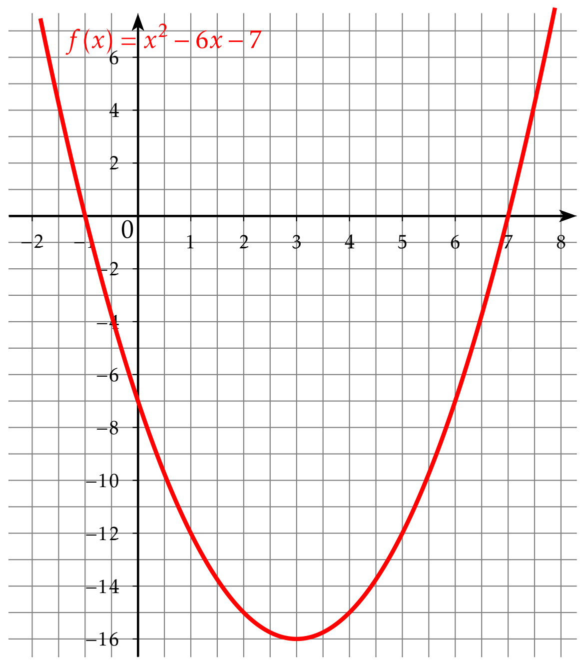
- ☞ Notions de fonction, image, antécédent, fonctions affines, résolution d'équations.
- ☞ Fonctions polynômes de degré 2, tableaux de signes et de variations.



Exercice 8

On considère la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image de 2 par f.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. **a.** Déterminer graphiquement l'antécédent par f de $-0,5$.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.



Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x - 7$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

1. **a.** Déterminer graphiquement l'image par f de 5.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. **a.** Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
   b. Montrer que, pour tout réel x, $f(x) = (x-3)^2 - 16$.
   c. Déterminer les antécédents de 0 par le calcul.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.
4. Donner le tableau de signes de la fonction f.
5. **a.** Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 2$.
   b. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = 2$.

Exercice 10

On considère les deux algorithmes donnés ci-contre.

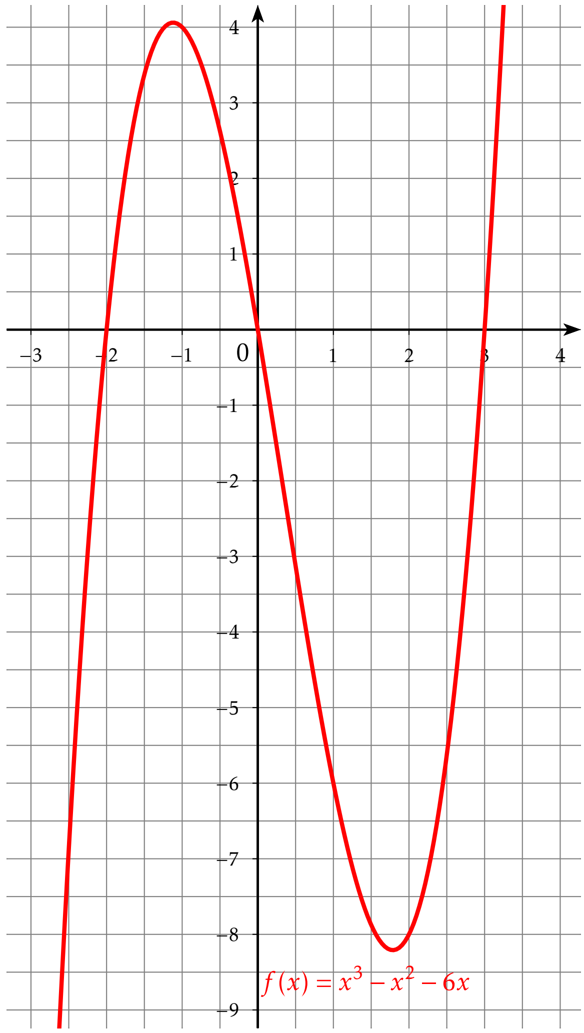
1. Programmer ces deux algorithmes sur votre calculatrice.
   Les tester sur quelques nombres.
2. Quelle conjecture pouvez-vous formuler ? La démontrer.
3. Quels nombres doit-on entrer pour obtenir 48 comme résultat ? (résolution algébrique attendue).

```
Algorithme A
Variables :
    x, a, b, c : réels ;
Début
    Entrer(x) ;
    a ← x² ;
    b ← (−6)×x ;
    c ← a + b + 8 ;
    Afficher(c) ;
Fin.
```

```
Algorithme B
Variables :
    x, a, b, c : réels ;
Début
    Entrer(x) ;
    a ← x − 3 ;
    b ← a² ;
    c ← b − 1 ;
    Afficher(c) ;
Fin.
```

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 6x$.
Sa représentation graphique est donnée ci-contre.

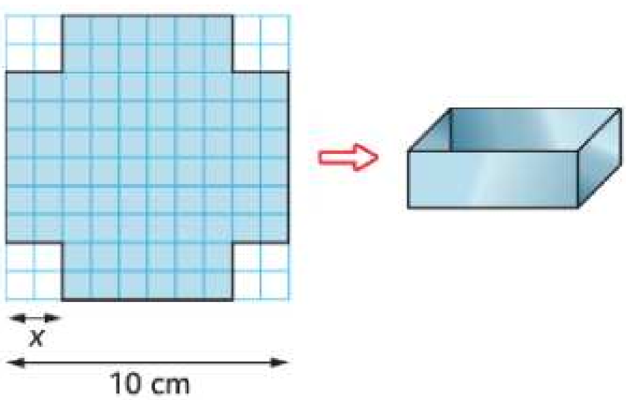


1. **a.** Déterminer graphiquement l'image par f de $-\frac{3}{2}$.
   b. Retrouver ce résultat par le calcul.
2. **a.** Déterminer graphiquement les antécédents de 0 par f.
   b. Développer $(x-3)(x+2)$.
   En déduire une factorisation de la fonction f.
   c. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f par lecture graphique.
4. En utilisant la factorisation trouvée en 2.b., dresser le tableau de signes de la fonction f.
5. **a.** Déterminer graphiquement les antécédents de -6 par f.
   b. Factoriser $x^3 - x^2$ et $-6x + 6$.
   c. Résoudre algébriquement l'équation $f(x) = -6$.
   On utilisera les factorisations trouvées en 5.b.

Exercice 12

On dispose d'un carré de métal de 10 cm de côté.
Pour fabriquer une boîte sans couvercle, on enlève à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords pour obtenir un pavé droit.

1. Donner un intervalle pour la variable x.
2. Exprimer le volume $\mathrm{V}(x)$ de la boîte en fonction de x.
3. Utiliser la calculatrice pour déterminer le volume maximal et la valeur de x correspondante (on arrondira au dixième).



4 Équations

Prérequis

- ☞ Maîtriser le développement et la factorisation d'une expression mathématique.
- ☞ Maîtriser les trois identités remarquables vues au collège que ce soit pour développer une expression ou la factoriser.
- ☞ Maîtriser les fonctions de calculs de la calculatrice. En particulier le calcul fractionnaire.

Méthode de résolution d'une équation

A la fin de votre année de seconde, vous disposez de trois façons de résoudre une équation.

— Si l'équation est linéaire (C'est à dire qu'elle ne comporte aucune puissance de x, ni de fraction comportant des termes en x au dénominateur), il suffit de développer, si besoin, chaque membre de l'équation et d'isoler les différents termes en x d'un même côté de l'égalité.

— Si l'équation comporte des puissances de x (et qu'il n'est pas possible "d'éliminer" celles-ci par un simple développement), il faut tenter de factoriser l'expression afin de se ramener à la résolution d'une équation produit.

— Si l'équation comporte des fractions rationnelles (C'est à dire des fractions comportant des x au dénominateur). Il conviendra tout d'abord de déterminer l'ensemble des valeurs interdites (celles qui donnent un ou des dénominateurs égaux à 0)
Puis, il faudra transformer l'écriture de manière à se ramener à l'égalité de deux fractions. On pourra alors utiliser la règle des produits en croix ou la mise au même dénominateur afin de se ramener à l'un des deux cas précédents.

Trois exemples "concrets"

Cas d'une équation linéaire	Cas d'une équation-produit	Cas d'une équation rationnelle
$\frac{3}{4}(2x-3)+3x=5x-\frac{2}{3}(5-9x)$	$81x^2-16=(9x-4)(2x-3)$	$x+1=\frac{9}{x+1}$
Développer et se ramener à :	Reconnaître une identité remarquable et se ramener à :	Déterminer les éventuelles valeurs interdites Montrer que l'on peut se ramener à :
$-\frac{13}{2}x=-\frac{13}{12}$	$\underline{\mathbf{(9x-4)}}(9x+4)-\underline{\mathbf{(9x-4)}}(2x-3)=0$	$(x+1)^2=9$
Montrer alors que	Écrire la règle du produit nul et montrer que	Montrer alors que
$S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$	$S=\left\{\frac{4}{9};-1\right\}$	$S=\{2;-4\}$

Exercice 13

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(5x-1)(x-9)-(x-9)(2x-1)=0$
2. $\dfrac{3x-1}{x-5}=\dfrac{3x-4}{x}$
3. $\dfrac{16x^2-25}{2x-3}=\dfrac{4x-5}{3}$
4. $2(x-1)(x-3,5)=4x^2-28x+49$
5. $\dfrac{x^2-3x}{(x-3)^2}=4$

Exercice 14 ✈

On cherche une méthode pour résoudre l'équation suivante $x^2+2x-8=0$. L'idée est de se ramener à la résolution d'une équation produit.

1. **a.** En utilisant une identité remarquable, complétez l'égalité ci dessus :

$$x^2+2x=(x+\dots)^2-\dots$$

   b. En déduire que l'équation $x^2+2x-8=0$ équivaut à $(x+1)^2-9=0$.

   c. En remarquant la présence d'une identité remarquable, déduire alors les solutions de l'équation $x^2+2x-8=0$.

2. En s'inspirant de la méthode précédente, résoudre l'équation $x^2+12x+11=0$.

5 Inéquations et tableaux de signes

Prérequis
Règle des signes pour un produit ou un quotient, signe d'une fonction affine, valeurs interdites pour un quotient, intervalles et réunion d'intervalles.

Signe d'un produit

Exemple guidé

On veut étudier dans $\mathbb{R}$ le signe du produit $P(x) = (-2x-6)(x-5)$.

Racine de $-2x-6$:	Racine de $x-5$
$-2x-6=0 \Leftrightarrow x = \ldots$	$x-5=0 \Leftrightarrow x = \ldots$

Compléter le tableau avec les signes qui conviennent :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$-2x-6$			0				
$x-5$					0		
$P(x)$			0		0		

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes : $P(x) > 0$ et $P(x) \leqslant 0$.

À toi de jouer ...

Exercice 15

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = (-3x+12)(7-2x)$.
2. En déduire les solutions des inéquations suivantes : $P(x) \geqslant 0$ et $P(x) < 0$.

Exercice 16

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $(3x+2)^2 - (3x+2)(5x+1) \leqslant 0$
2. $(2-x)^2 > 36$.

Conseil : se ramener à une inéquation produit avec un second membre nul, réaliser un tableau de signes et conclure.

Exercice 17 ✈

On considère deux nombres réels x et y dont la somme est 20.
On souhaite que leur produit P soit supérieur ou égal à 91.

1. Exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que résoudre l'inéquation $P \geqslant 91$ revient à résoudre l'inéquation $(7-x)(13-x) \geqslant 0$.
3. Conclure.

Signe d'un quotient

Exemple guidé

On veut étudier dans $\mathbb{R}$ le signe du quotient $Q(x) = \dfrac{3x+9}{x-2}$.
Condition d'existence du quotient ou recherche de la valeur interdite :
$Q(x)$ existe $\Leftrightarrow x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \ldots$

Racine de $3x+9$:	Racine de $x-2$
$3x+9=0 \Leftrightarrow x = \ldots$	$x-2=0 \Leftrightarrow x = \ldots$

Compléter le tableau avec les signes qui conviennent :

x	$-\infty$		$\cdots$		$\cdots$		$+\infty$
$3x+9$			0				
$x-2$					0		
$Q(x)$			0		$\Vert$		

Le quotient n'est pas défini !

En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ des inéquations suivantes : $Q(x) < 0$ et $Q(x) \geqslant 0$.

À toi de jouer ...

Exercice 18

1. Étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de $Q(x) = \dfrac{-2x+3}{x+4}$.
2. En déduire les solutions des inéquations suivantes : $Q(x) \geqslant 0$ et $Q(x) \leqslant 0$.

Exercice 19

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $5 + \dfrac{2}{x+3} \leqslant 0$.
2. $\dfrac{3}{2x-1} \geqslant \dfrac{2}{-3x+15}$

Conseil : Obtenir une inéquation équivalente avec un quotient unique dans le premier membre et un second membre nul, réaliser un tableau de signes et conclure.

Exercice 20 ✈

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\dfrac{x^2-16}{9-4x^2} \geqslant 0$
2. $\dfrac{2x+3}{x+1} \leqslant \dfrac{x+1}{2x+3}$

6 Géométrie

Prérequis

☞ Toutes les connaissances de géométrie plane du collège.

En géométrie (mais pas seulement), il est souvent très important de prendre l'initiative de réaliser un schéma. Ensuite, avec tous vos outils (théorème de Pythagore, trigonométrie, formules de calculs d'aires, etc.), à vous de voir ce que vous êtes capable de calculer ou de démontrer à partir des données de l'énoncé, et qui pourrait conduire à la réponse au problème posé. Tâchez d'acquérir ce réflexe, de faire un schéma pour illustrer un problème.
Pour les deux exercices suivants, vous êtes avertis. Vous disposez, en cas de difficultés, de trois indices à la fin de ce livret, pour chacun des deux exercices, le but étant, bien sûr, d'en utiliser le moins possible.

Exercice 21 ✈ ✈

Un tétraèdre régulier (solide constitué de quatre triangles équilatéraux identiques) est posé sur une table. Chacune des 9 arêtes mesure 10 cm. Quelle est la hauteur de cette pyramide ?

Exercice 22 ✈ ✈

Deux boules de pétanque identiques sont en contact, posées sur un sol plat. Leur diamètre est égal à 8 cm. Quel est le diamètre maximal d'un cochonnet qui pourrait passer entre les deux boules ?

7 Équations de droites et systèmes

Prérequis

- ☞ Équations de droites dans le plan.
- ☞ Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues.

Exercice 23

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant les réponses.

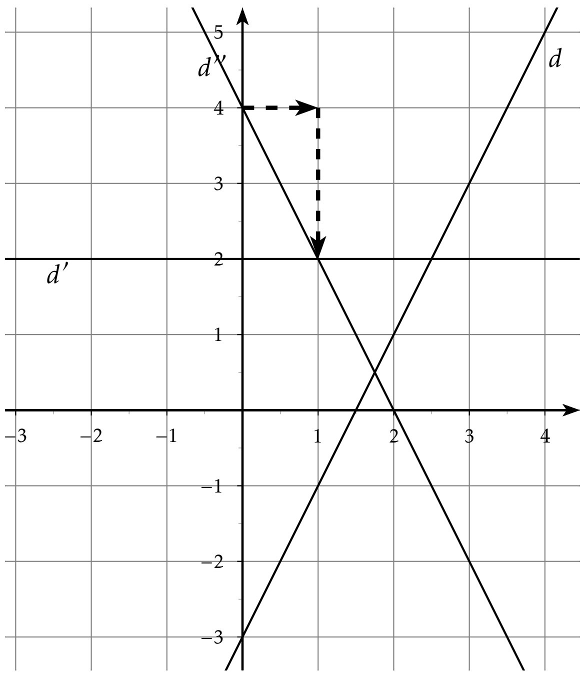
On se place dans un repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Soit Δ la droite d'équation $y = 5x + 3$.

1. Le point $C(-2;7)$ appartient à la droite Δ.
2. La droite Δ' d'équation $y = 3x - 2$ et la droite Δ sont parallèles.
3. Le point $D(-2,5;-9,5)$ appartient aux deux droites Δ et Δ'.

Les questions 4. à 10. se réfèrent au graphique ci-contre.

4. L'équation de la droite d est $y = -3x + 2$.
5. La droite d' a pour équation $y = 2$.
6. Le coefficient directeur de la droite d est 2.
7. Le coefficient directeur de la droite d' est 1.
8. La droite d' est la représentation graphique d'une fonction linéaire.
9. Les flèches en pointillés permettent de lire graphiquement le coefficient directeur de la droite d''.
10. Le coefficient directeur de la droite d'' est égal à $m = -\frac{1}{2}$.



Exercice 24

1. Dans un repère du plan, soient $A(4;1)$ et $B(-2;4)$ deux points.
   Déterminer par le calcul une équation de la droite (AB).
2. Sur un ordinateur, ouvrir un fichier GeoGebra (téléchargeable gratuitement, si ce n'est déjà fait !).
   - ➢ Placer les points A et B, puis tracer la droite (AB).
   - ➢ Lire l'équation de la droite (AB) dans la fenêtre algèbre pour contrôler le résultat trouvé à la question 1.

Exercice 25 ✈

À ses deux élèves qui lui demandent son âge, le professeur de mathématiques répond :

Cette année, mon âge est 9 fois celui de ma fille, mais dans 12 ans, il sera 3 fois celui de ma fille.

Déterminer l'âge du ~~capitaine~~ professeur.

8 Vecteurs

Prérequis
Avant d'effectuer ces exercices, il est nécessaire de connaître la définition et les propriétés du parallélogramme, et le cours sur les vecteurs.

Exercice 26

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

1. REVI est un parallélogramme, alors :
a) $\overrightarrow{RE} = \overrightarrow{VI}$ b) $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{VI}$ c) $\overrightarrow{RV} = \overrightarrow{EI}$ d) $\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{VE}$

2. SION est un parallélogramme, alors :
a) $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{IO}$ b) $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{NI}$ c) $\overrightarrow{SN} = \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{ON}$ d) $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IS} + \overrightarrow{IO}$

3. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{u}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{CA}$ b) $\overrightarrow{DA}$ c) $\overrightarrow{BE}$ d) $\overrightarrow{FE}$

4. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$

5. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$

6. Dans la figure 1, ci-contre, le vecteur $\overrightarrow{u} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{v}$ est égal à :
a) $\overrightarrow{EA}$ b) $\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{FE}$ d) $\overrightarrow{DB}$

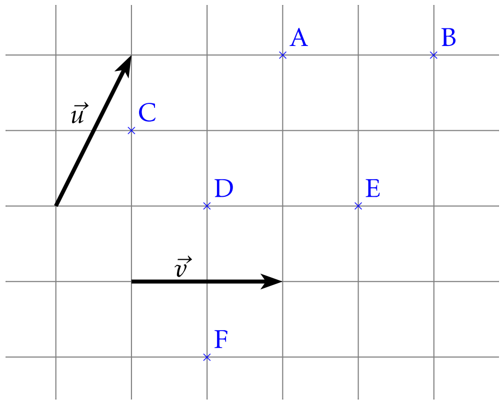


Figure 1

7. Dans la figure 2 ci-dessous, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont :
a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires

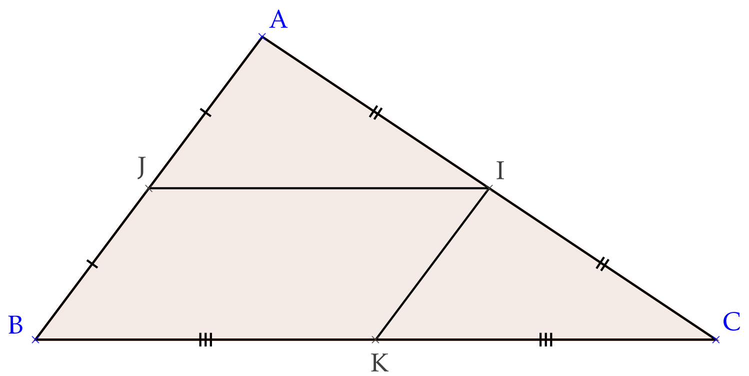


Figure 2

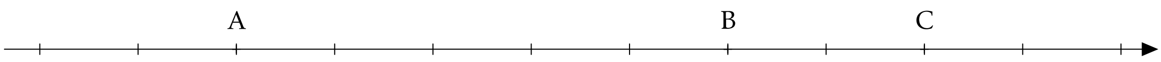
8. Dans la figure 2 ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KB}$ sont :
a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires

9. Dans la figure 2 ci-dessus, les vecteurs $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{JA}$ sont :
a) colinéaires b) égaux c) opposés d) non colinéaires

10. Dans la figure 2 ci-dessus, quelles égalités sont vraies ?
a) $\overrightarrow{JI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{IK}$ c) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{BK}$ d) $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{BJ}$

Exercice 27

A, B et C sont les points de la droite graduée ci dessous.



1. Placer le point D tel que $\overrightarrow{AD} = -0,5\,\overrightarrow{BC}$.
2. Compléter les trois égalités suivantes avec des nombres réels :
   - ☞ $\overrightarrow{AB} = \ldots\,\overrightarrow{AC}$
   - ☞ $\overrightarrow{BC} = \ldots\,\overrightarrow{BA}$
   - ☞ $\overrightarrow{CA} = \ldots\,\overrightarrow{BC}$

Exercice 28

ABC est un triangle.

1. Construire le point D tel que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, puis le point J tel que A soit le milieu du segment [BJ].
2. **a.** Pourquoi a-t-on $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AJ}$?

   b. En déduire la nature du quadrilatère DCJA.

Exercice 29

Dans un repère, on donne les points A(−1; 3), B(7; −1), C(5; 0), D(4; −2) et E(0; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Démontrer que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Exercice 30

À partir des égalités données dans la colonne de gauche, identifier chacun des vecteurs représentés sur la figure ci-dessous. Donner ensuite, par lecture graphique, sans justifier, les coordonnées de ces vecteurs.

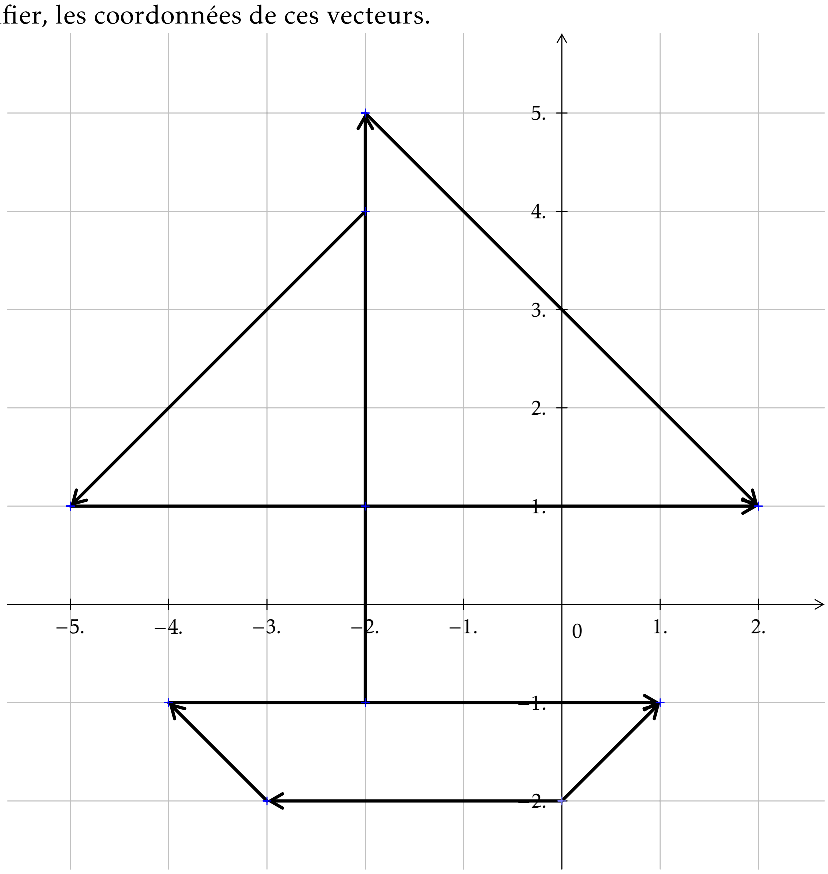
$\vec{u}_7 = -3\vec{u}_6$

$\vec{u}_5 = -\dfrac{1}{4}\vec{u}_2$

$\vec{u}_3 = \dfrac{7}{5}\vec{u}_8$

$\vec{u}_1 = 3\vec{u}_5 + 3\vec{u}_6$

$\vec{u}_4 = -3\vec{u}_6 + \dfrac{1}{2}\vec{u}_1$



9 Géométrie : Problème pour chercher ...

Exercice 31 ✈ ✈

Problème de géométrie

Le but de ce problème est de démontrer de plusieurs manières un même résultat : les points de concours des droites remarquables du triangle c'est à dire l'orthocentre pour les hauteurs, le centre du cercle circonscrit pour les médiatrices des cotés et le centre de gravité pour les médianes sont alignés sur une même droite, appelée droite d'Euler.
Les trois parties de ce problème sont indépendantes. Les résultats d'une partie ne doivent pas être utilisés dans une autre partie.
Soit ABC un triangle et soient A' ,B', C' les les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB].

Partie A : Géométrie plane

1. Construire une figure sur laquelle vous ferez apparaître le centre O du cercle circonscrit $\mathcal{C}$, le centre de gravité G et l'orthocentre H du triangle ABC
2. Soit D le point diamétralement opposé à A sur le cercle $\mathcal{C}$.
   a. De quelle nature sont les triangles ACD et ABD ? Justifier.
   b. Démontrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles tout comme (CH) et (BD). En déduire que A' est le milieu de [HD].
3. **a.** Que représentent les droites (HO) et (AA') pour le triangle AHD ?
   b. En déduire que les points O, H et G sont alignés.

Partie B : Géométrie vectorielle

On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Caractérisation vectorielle de l'orthocentre

On considère le point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

1. Justifier l'égalité suivante : $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA'}$
2. Déduire de la relation (1) que $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OA'}$
3. Démontrer alors que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.
4. De la même façon, démontrer que les droites (BH) et (AC) sont perpendiculaires.
5. Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.

Caractérisation vectorielle du centre de gravité

On considère le point G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

1. Montrer, en utilisant la relation précédente, que le point G vérifie $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA'} = \overrightarrow{0}$.
2. En déduire $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{0}$.
3. À partir de la formule précédente, exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$. En déduire que G est l'image de A par une translation dont on précisera le vecteur. Construire G.
4. On admet que l'on peut montrer de même $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$. En déduire que G appartient à (AA'), (BB') et (CC'). Que représente G pour le triangle ABC ?

Droite d'Euler

On note G le centre de gravité du triangle ABC

1. Démontrer l'égalité $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GA'}$
2. En déduire que : $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$
3. En déduire que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$
4. En déduire l'alignement de O, G et H lorsque le triangle ABC n'est pas équilatéral.
5. Que peut-on dire des points O, G et H quand ABC est équilatéral ?

Partie C : Géométrie analytique

Dans cette partie, on ne fera pas une étude générale mais on étudiera un cas particulier. Ceci étant dit, on pourra appliquer cette méthode à tous les cas rencontrés *mutatis mutandis*. On se place dans un repère orthonormé $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan. On considère les points A(-1 ;-2), B(-3 ;2) et C(2 ;3).

Centre de gravité

1. Déterminer une équation de la droite (AA')
2. Déterminer de même une équation de (BB').
3. En déduire les coordonnées du centre de gravité G de ABC.

Centre du cercle circonscrit

Soit M un point du plan de coordonnées $(x; y)$

1. **a.** Exprimer MA^2 en fonction de x et y.
   b. Exprimer MB^2 en fonction de x et de y.
   c. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que MA = MB ?
   d. À l'aide de l'égalité $MA^2 = MB^2$, déterminer une équation de la médiatrice du segment [AB].
2. En procédant de même, déterminer une équation de la médiatrice du segment [AC].
3. Déterminer les coordonnées du centre O du cercle circonscrit au trangle ABC.

Orthocentre

1. Pourquoi médiatrice d'un côté et hauteur relative au sommet opposé sont-elles parallèles ?
2. En déduire l'équation de deux des hauteurs du triangle.
3. En déduire les coordonnées de l'orthocentre H de ABC.

Droite d'Euler

1. Montrer que G, H et O sont alignés de deux manières différentes.
2. Qui est cet Euler dont on parle ?

Prérequis

- ☞ Notion de série statistique, effectifs, effectifs cumulés croissants
- ☞ Paramètres de position : moyenne, quartiles, interprétation des résultats
- ☞ Distribution des fréquences
- ☞ Notion d'intervalle de fluctuation (échantillonnage) et d'intervalle de confiance (estimation)

Exercice 32

À l'issue de la saison régulière du championnat - Pro D2 2013/2014 de rugby, on donne le classement final : (*source : L'Équipe*)

1. Quelles sont les deux équipes médianes du classement ? Justifier.
2. Déterminer les quartiles Q_1 , Q_2 (médiane) et Q_3 des points marqués par les équipes de Pro D2.
3. Lyon accède au Top 14 avec un score 80% supérieur à celui obtenu en 2013. Quel était-il alors ?
4. Le nombre de points du Stade Aurillacois est en baisse de 21,33% par rapport à celui de la saison précédente. Quel était-il alors ?
5. L'an dernier, Aurillac était l'équipe la mieux classée de l'intervalle $[Q_2;Q_3]$. Quel était son classement ?

Rang	Equipe	Pts
1	Lyon OU	117
2	Agen	98
3	La Rochelle	98
4	Pau	93
5	Narbonne	88
6	Tarbes	80
7	Mont-de-Marsan	68
8	Bourgoin	67
9	Colomiers	66
10	Béziers	60
11	Aurillac	59
12	Albi	54
13	Dax	53
14	Carcassonne	50
15	Auch	44
16	Bourg-en-Bresse	41

Exercice 33

On donne maintenant le nombre d'essais inscrits par Aurillac au cours de la saison 2013-2014 :

Nombre d'essais	0	1	2	3	4	5
Nombre de matchs	6	10	8	4	1	1

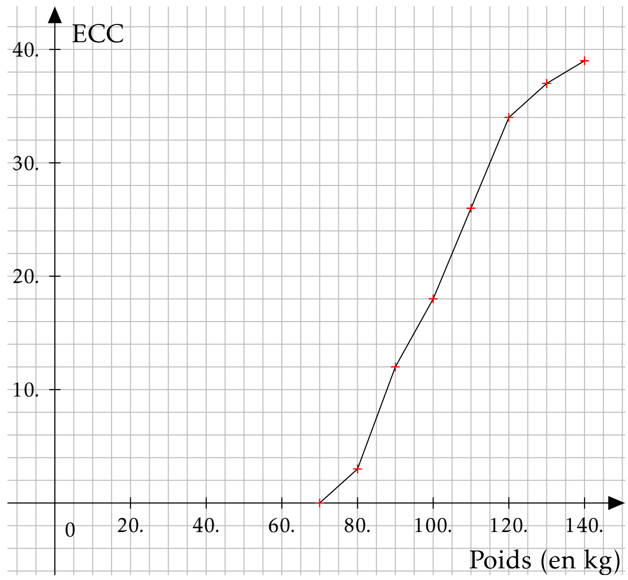
1. Déterminer le nombre moyen d'essais par match.
2. Déterminer la fréquence en % de chaque catégorie. Arrondir à l'unité.
3. Déterminer la médiane de la série statistique, en donner une interprétation concrète.
4. Déterminer le premier et le troisième quartile de la série.
5. Géraud crée une feuille dans un tableur pour automatiser certains calculs :

	A	B	C	D	E	F	G
1	**Nombre d'essais**	0	1	2	3	4	5
2	**Effectif**	6	8	10	4	1	1
3	**Fréquence (%)**						
4	**Effectifs cumulés croissants**	6					

1. Quelle formule doit-il entrer en B3 ?
2. Quelle formule doit-il entrer en C4 ?

Exercice 34

On a relevé les poids (en kg) des joueurs du Stade Aurillacois. Le graphique ci-dessous représente le polygone des effectifs cumulés croissants de la série statistique obtenue.



1. Quel est l'effectif total de la série ?
2. Déterminer graphiquement les quartiles de la série.
3. Compléter le tableau suivant :

Masse (kg)	Effectif
[70;80[	
[80;90[	
[90;100[	
[100;110[	
[110;120[	
[120;130[	
[130;140[	

4. Estimer le poids moyen de l'effectif du Stade Aurillacois.

Exercice 35

1. Une entreprise fabrique des ballons de rugby. On considère que 8% des ballons produits présentent un défaut dans les coutures.
   Une grande enseigne de sport commande $n = 200$ ballons issus de cette production, que l'on peut considérer comme un échantillon aléatoire.
   a. Déterminer un intervalle de fluctuation, au niveau de confiance 95%, de la proportion de ballons défectueux dans cet échantillon. (*arrondir à 0,001 près*)
   b. La grande surface a vendu tous ses ballons. 50 clients sont revenus mécontents car les coutures ont cédé ! Peut-on dire que l'échantillon n'était pas conforme à la production ?
2. Dans une fédération départementale de rugby, on dénombre 1 000 licenciés (que l'on considère comme un échantillon), dont 4,5% de femmes. Donner une estimation par intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportion de femmes parmi les licenciés de rugby en France.

11 Probabilités

Prérequis

- ☞ Notion d'expérience aléatoire et de modélisation (notamment à l'aide d'arbres)
- ☞ Calcul de probabilités
- ☞ Loi de probabilité
- ☞ Langage des événements
- ☞ Réunion, intersection d'événements
- ☞ Événement contraire

Exercice 36

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple. Pour chaque question, seule une réponse parmi celles proposées est la bonne.

1. À Noël, Robin s'est fait offrir la trilogie des films "Batman" (trois films, sortis en 2005, 2008 et 2012). Il insère au hasard l'un des DVD dans son lecteur. Quelle est la probabilité que ce soit le film le plus récent ?

   □ $\frac{1}{6}$ □ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{2}$ □ $\frac{2}{3}$

2. Robin place les trois DVD, côte à côte, mais au hasard, sur une étagère. Quelle est la probabilité que les films soient rangés dans l'ordre chronologique ?

   □ $\frac{1}{6}$ □ $\frac{1}{3}$ □ $\frac{1}{2}$ □ $\frac{2}{3}$

3. On tire au hasard deux cartes dans un jeu de 32. A est l'événement "obtenir au moins un roi". L'événement $\overline{\mathrm{A}}$ est :

   □"obtenir exactement un roi" □"n'obtenir aucun roi" □"obtenir au moins une dame" □"obtenir deux rois"

4. A et B sont deux événements issus d'une même expérience aléatoire. Sachant que $p(\mathrm{B}) = 0,3$; $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0,1$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0,5$, on peut dire que la probabilité de l'événement A est :

   □0,1 □0,2 □0,3 □0,4

5. On lance une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir "Pile" est :

   □0,25 □0,5 □0,75 □1

6. On lance 2 fois de suite une pièce équilibrée. La probabilité d'obtenir deux fois "Pile" est :

   □0,25 □0,5 □0,75 □2

7. On lance 8 fois de suite une pièce équilibrée. La Probabilité d'obtenir huit fois "Pile" est :

   □ $\frac{1}{8}$ □ $\frac{1}{4}$ □environ 0,001 □environ 0,004

Problème de probabilités ✈

Julie a mis dans sa valise deux jupes (une noire, une bleue), trois chemisiers (un bleu, un jaune, un noir) et deux gilets (un bleu et un marron). On suppose que tous les tirages au sort se font de manière équiprobable.

1. Julie choisit un vêtement au hasard.

a. On s'intéresse à la nature du vêtement. Donner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

b. On s'intéresse à la couleur du vêtement. Doner la loi de probabilité de cette expérience aléatoire.

2. Julie choisit un vêtement au hasard.

a. Déterminer la probabilité des événements :

☞ A : "Le vêtement est une jupe"

☞ B : "Le vêtement est bleu"

☞ $A \cap B$ puis $A \cup B$ *(vous traduirez chaque événement à l'aide d'une phrase)*

☞ $\overline{A}$ puis $\overline{A} \cap B$ *(vous traduirez chaque événement à l'aide d'une phrase)*

b. Que peut-on dire des événements $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

3. Julie décide de choisir au hasard sa jupe puis son chemisier en lançant un dé équilibré à 6 faces.

a. Proposer une règle du jeu qui permette de choisir une jupe de façon équiprobable.

b. Proposer une règle du jeu qui permette de choisir un chemisier de façon équiprobable.

4. Julie choisit au hasard une jupe, puis un chemisier, puis un gilet.

a. Modéliser à l'aide d'un arbre les différentes façons dont elle peut s'habiller.

b. Déterminer la probabilité des événements suivants :

☞ A : "Le chemisier est de même couleur que la jupe"

☞ B : "Les trois vêtements sont de couleurs différentes"

☞ C : "Julie est toute de bleu vêtue"

c. Donner un exemple de deux événements incompatibles.

12 Algorithmique

Prérequis

- ☞ Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie).
- ☞ Boucles et instructions conditionnelles.

Exercice 37

1. Voici quatre algorithmes, très semblables, rédigés par quatre élèves. Néanmoins, si on les programme avec un logiciel adapté, on obtiendra des résultats à l'écran tout à fait différents. Associer chacun de ces quatre algorithmes avec leur résultat obtenu à l'écran après programmation.

Algorithmes			**Résultats obtenus à l'écran**
Algorithme de Chloé P = 1 Pour i allant de 1 à 5 P = P x i Fin Pour Afficher P	•	•	0

Algorithme de Laura
Pour i allant de 1 à 5
    P = 1
    P = P x i
Fin Pour
Afficher P
	•	•	120

Algorithme de Thibault P = 0 Pour i allant de 1 à 5 P = P x i Fin Pour Afficher P	•	•	1 1 2 6 24

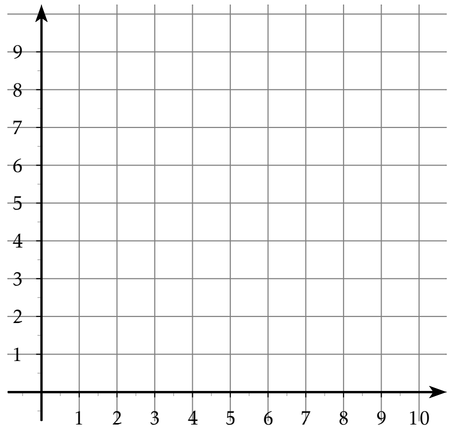
Algorithme de Thomas
P = 1
Pour i allant de 1 à 5
    Afficher P
    P = P x i
Fin Pour
	•	•	5

2. En fait, on avait demandé à ces quatre élèves de rédiger un algorithme permettant de calculer le produit $1\times2\times3\times4\times5$, que l'on peut noter aussi 5! (lire "factorielle 5"). Quel est le seul élève qui a rédigé un algorithme correct ?
3. Rédiger un algorithme qui permette de calculer la somme des entiers de 1 à 10 000.

Problème : Algorithmique, géométrie repérée, ... ✈ ✈

Partie A

1. Placer sur le graphique ci-contre les points $A_1(1;0)$ et $B_1(0;9)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A_1(1;0)$ et $B_1(0;9)$.
3. Exécuter, "à la main", sur le graphique ci-contre, l'algorithme suivant :




```
Variable : k
k = 1
Tant que k < 10
        Placer le point A_k(k;0)
        Placer le point B_k(0;10 − k)
        Tracer le segment [A_k;B_k]
        k = k + 1
```

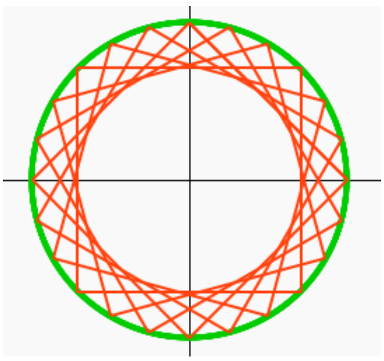
4. Plus généralement, notons $\mathcal{D}_k$ la droite passant par les points $A_k(k;0)$ et $B_k(0;10-k)$.
   Montrer que l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_k$ est : $y = \left(-\frac{10}{k}+1\right)x + 10 - k$.
5. Ecrire l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_2$, puis déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
6. Plus généralement, montrer que les coordonnées du point d'intersection I_k des droites $\mathcal{D}_k$ et $\mathcal{D}_{k+1}$ sont

$$\left(\frac{k(k+1)}{10}; \frac{k(k+1)}{10} + 9 - 2k\right).$$

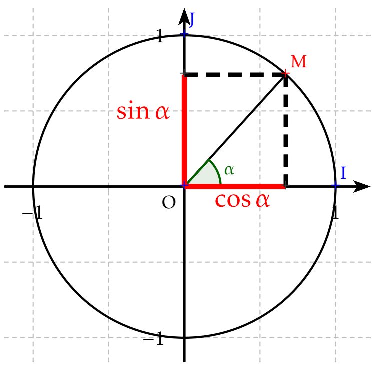
7. Programmer l'algorithme avec Algobox.
8. Compléter votre algorithme pour qu'apparaissent les points d'intersection de I_1 à I_9 (choisir une autre couleur que celle des segments).
9. Changer la ligne "$k = k+1$" en "$k = k+0.1$". Observer le résultat.

Partie B

1. Ecrire un algorithme pour réaliser la figure suivante.



Rappel *: Sur le cercle trigonométrique, si M est un point du cercle et si l'on note α l'angle $\widehat{IOM}$, les coordonnées du point M sont* $(\cos\alpha;\sin\alpha)$.

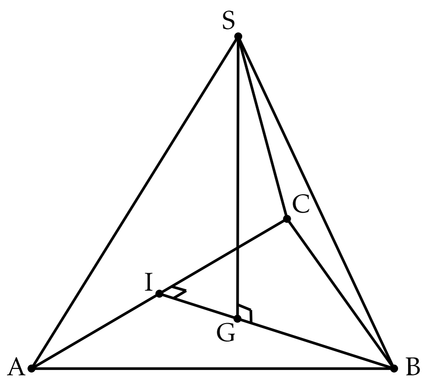


2. La figure à l'intérieur est un tétraicosagone régulier (24 côtés). Si l'on traçait une infinité de segments, on obtiendrait un cercle. Quelle serait la valeur exacte de son rayon si l'on considère que le rayon du cercle extérieur vaut 1 ?

13 Indications

Exercice 21

Indice 1 : Voici un schéma tout à fait propice à la résolution d'un tel problème.



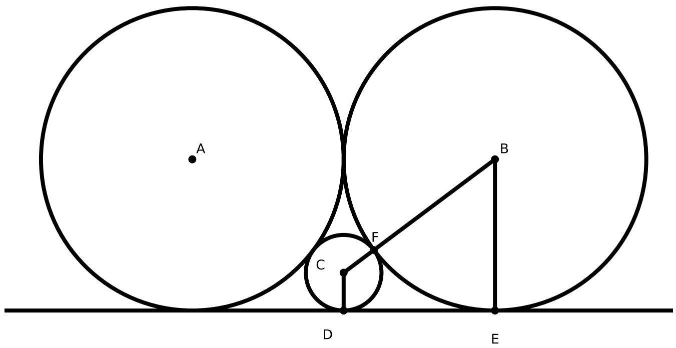
Le but de l'exercice est en fait de calculer la hauteur SG.

Indice 2 : Ce serait possible si l'on connaissait la longueur BG. On pourrait alors utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle BGS.

Indice 3 : Pour la longueur BG, il faut se rappeler que, dans une pyramide régulière, le pied de la hauteur est aussi le centre de gravité de la base. Or, dans un triangle, le centre de gravité est situé sur la médiane, au tiers en partant de la base. Il faudrait donc calculer la longueur IB.

En dire plus serait une insulte à votre intelligence …

Exercice 22



Indice 1 : La photo de l'énoncé n'aide en rien à la résolution de l'exercice. Ce schéma, par contre, est un bon début. On cherche à calculer la longueur CF, ou CD. Donnons lui un nom : r.

Indice 2 : La droite perpendiculaire à (BE) passant par C coupe le segment [BE] en H.
Écrire, sur le schéma, les longueurs de tous les segments en fonction (ou pas) de r.

Indice 3 : Utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle BHC, rectangle en H.