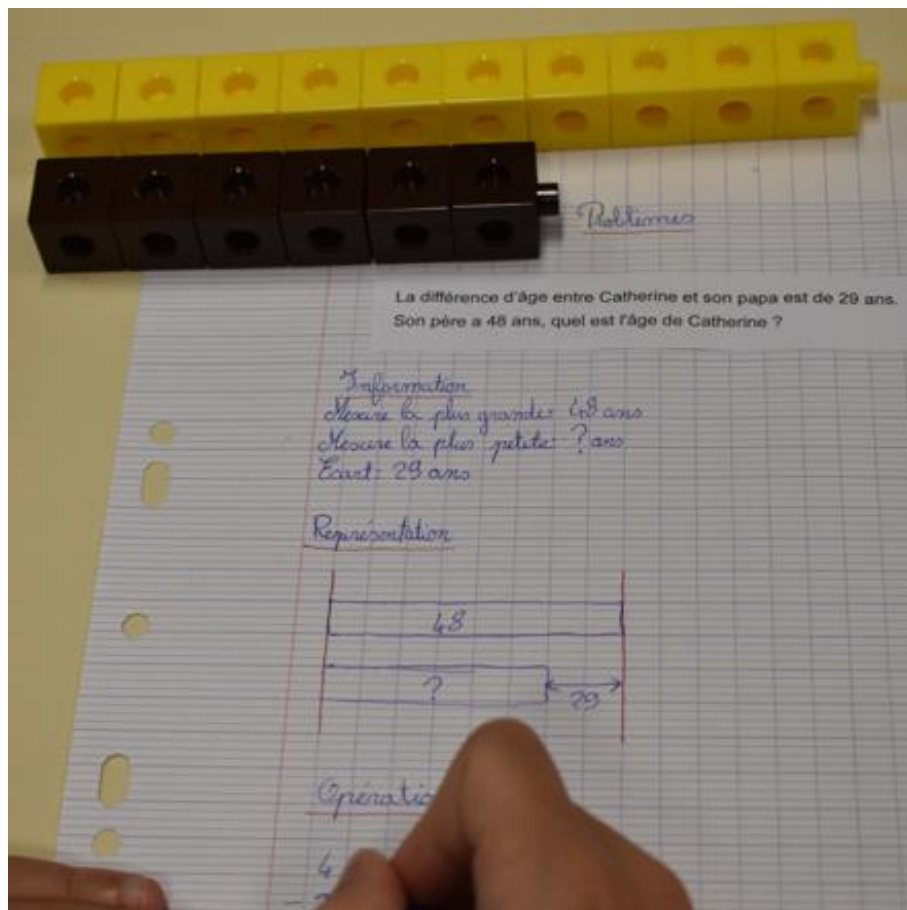


La représentation en barres comme aide à la résolution de problèmes aux cycles 2 et 3



LES AUTEURS

Jean-Claude AULAGNER

Professeur des écoles, École primaire publique Vercingétorix, Aubière

Josette METAIS

Professeur des écoles, École primaire publique Vercingétorix, Aubière

Annie NOIRFALISE

Maitre de conférence honoraire, IREM de Clermont Ferrand

LES PARTICIPANTS AU GROUPE DE TRAVAIL

Adeline BRUSTEL

Professeur de mathématiques, collège d'Aubière

Bruno FALZON

Professeur des écoles, École primaire publique Vercingétorix, Aubière

L'ASSITANTE À L'ÉDITION

Françoise TOLEDO

Secrétaire de l'I.R.E.M. et de la Maison pour la science en Auvergne

PRÉFACE

La plupart des enseignants découvrent l'existence de la "méthode de Singapour" lorsque, en 2018, Cédric Villani et Charles Torossian publient le rapport intitulé "21 mesures pour l'enseignement des mathématiques", commandé par le gouvernement.

Un groupe de recherche se crée alors à l'IREM de Clermont-Ferrand avec l'objectif de découvrir et d'expérimenter autour de la technique de résolution des problèmes d'arithmétique élémentaire à l'aide de représentations en barres que recouvre cette appellation. Ce groupe est composé de deux professeurs des écoles et d'une enseignante de mathématiques en collège, accompagnés par une didacticienne des mathématiques. Précisément, l'objet de leurs recherches pédagogiques consiste à introduire les représentations en barres dans leurs pratiques en vue d'améliorer les performances de leurs élèves de cycle 3 pour résoudre des problèmes d'arithmétique. Les auteurs s'appuient sur une analyse didactique des ouvrages de la collection intitulée "Maths, Méthode de Singapour", du CP au CM2, proposés par l'éditeur La Librairie des Ecoles.

Le résultat de leurs cinq années de travail, de réflexions, d'expérimentations et de rédaction est l'imposant document que vous tenez entre les mains. Il se compose de deux parties complémentaires : la première et la plus conséquente contient des propositions de séances pour la classe et la seconde (Annexe 2 : Grandeur, mesure et résolution de problèmes et Annexe 3 : Enjeu des représentations en barres, réflexion didactique autour des ouvrages de la collection Maths, Méthode de Singapour de la librairie des écoles) comporte des apports théoriques en didactique des mathématiques. Un soin tout particulier est apporté à la précision et à la clarté des notions et du vocabulaire employé, ce qui permet à la fois une prise de recul par rapport aux propositions des manuels et une explicitation des objectifs des séances proposées et de leurs modalités.

Les activités pour la classe comprennent tant des documents à l'usage des élèves (exercices d'évaluations diagnostiques, exercices de mise en œuvre des représentations, représentations référentes,...) que des documents à l'usage des enseignants (fiches de préparations et de réajustements, fiches de réflexions sur la mise en œuvre de la représentation en barres pour des situations problèmes précises,...). Il s'agit d'un travail minutieux, proposant un guide détaillé de mise en œuvre avec de nombreux exercices concrets, portant tant sur des problèmes de type additif que sur des problèmes de type multiplicatif.

L'ensemble des analyses et des expérimentations relatées dans ce document montre que l'outil "représentations en barres" n'est pas magique. Sa place dans le travail de l'élève est celle d'un mode de représentation intermédiaire entre l'énoncé d'un problème qui se rattache au monde réel et sa modélisation numérique (des nombres et une ou des opérations entre ces nombres), à partir de laquelle les calculs correspondants permettront de répondre à la question posée. Nul doute que cet ouvrage apportera des outils précieux, tant théoriques que pratiques, aux enseignants désireux de s'inspirer de la "méthode de Singapour", ou tout simplement curieux de la connaître et de replacer ses apports dans l'éventail des méthodes permettant d'enseigner la résolution des problèmes d'arithmétique élémentaire.

Je ne saurais mieux conclure qu'en citant deux extraits de cet ouvrage (page 154) :

"Les représentations [en barres] ne sont pas auto-justifiées. Un travail est nécessaire pour qu'elles acquièrent du sens et deviennent efficaces dans les travaux de modélisation arithmétique demandés aux élèves. Il ne suffit pas de montrer une représentation en barres aux élèves pour qu'ils l'associent spontanément aux grandeurs en jeu dans le problème à résoudre, aux manipulations des grandeurs évoquées, et in fine à telle ou telle opération arithmétique. Ces gestes se construisent."

"Les [représentations en barres] doivent être le signe de manipulations sur les grandeurs [...]. Leur utilisation doit permettre de faire avancer le choix d'une ou plusieurs opérations [...] conduisant à une arithmétisation du problème. Il est donc nécessaire de construire des liens entre [ces représentations] et chacune des quatre opérations afin qu'elles deviennent des instruments de l'activité de modélisation arithmétique."

Malika More, ancienne directrice de l'IREM de Clermont-Ferrand

REMERCIEMENTS

Nous adressons nos remerciements aux personnes qui nous ont aidés dans la réalisation de ce guide pédagogique.

Nous remercions M. Léandri, inspecteur de circonscription pour son soutien et sa confiance notamment lors de la candidature à un projet CARDIE (Cellule Académique Recherche et Développement Innovation Expérimentation) en 2017.

Nous remercions également M. Le Curieux, inspecteur de circonscription, qui nous renouvelé la confiance de notre administration à la suite de M. Léandri.

Nous remercions la maison d'édition « La Librairie des Ecoles » pour son envoi gracieux de manuels et de guides pédagogiques.

Nous souhaitons particulièrement remercier l'IREM de Clermont-Ferrand (Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques) qui a hébergé notre groupe de recherche pendant 5 ans et qui nous permis de recevoir Monica Neagoy, didacticienne en mathématiques, directrice de collection « Maths, méthode de Singapour » pour une conférence.

Nos remerciements vont également à Malika More pour son soutien actif lorsqu'elle était directrice de l'IREM de Clermont-Ferrand.

Un grand merci à Mme Toledo pour son aide précieuse à la relecture et à la correction de ce travail de recherche.

Résumé

Issues de pratiques d'enseignement à Singapour, avec en toile de fond les performances très intéressantes des élèves Singapouriens à des tests internationaux, PISA, TIMSS, les représentations en barres ont suscité depuis quelques années un certain intérêt en France auprès des enseignants, mais aussi de la presse spécialisée et des décideurs (rapport de Villani et Torossian).

Remis au goût du jour récemment, ce sont cependant des outils qui étaient couramment utilisés au début du XX^{ème} dans les cours d'arithmétique.

Les auteurs de ce document, enseignants dans des classes de cycle 3, (primaire et collège), accompagnés par une didacticienne, pensant qu'il y avait là possibilités d'améliorer les performances de leurs élèves pour résoudre des problèmes d'arithmétique, ont souhaité introduire les représentations en barres dans leurs pratiques.

Ce document partage le résultat de leurs recherches pédagogiques dans leur travail d'enseignants de terrain.

Ce travail a été conduit dans un premier temps avec le soutien du Rectorat de Clermont Ferrand, dans le cadre d'un projet CARDIE, (Cellule Académique Recherche Développement Innovation et Expérimentation), et sur toute la durée du travail avec le soutien de l'IREM, (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

La conception des séances a conduit les participants à approfondir leur formation sur des thèmes tels que : introduction des quatre opérations, grandeurs et mesures, modélisation ...

On trouve en annexe du document des apports sur ces sujets¹.

I - LES REPRESENTATIONS EN BARRES

1. De quoi s'agit-il ?

En matière de résolution de problèmes arithmétiques, l'élève est face à un récit qui évoque des manipulations du monde matériel, (réunion, recherches du complément ou partage... de longueurs, de collections, de masses, etc., plus généralement manipulations de grandeurs décrites en gestes spécifiques au type de grandeurs concernées, une question lui est posée sur certains éléments de cette situation à laquelle il doit répondre à partir des mesures des grandeurs qui lui sont données. Pour cela, il sait que certaines des quatre opérations lui seront utiles, il doit choisir lesquelles, (tâche de type T1), puis effectuer les calculs correspondants (tâche de type T2).

Peut-on imaginer **outiller l'élève de techniques pour accomplir ces genres de tâches ?**

Il semble que les tâches de type T1 soient les plus problématiques.

Il s'agit d'un travail de *modélisation arithmétique* du problème posé.

La méthode dite de « Singapour » propose des *modélisations intermédiaires* comme aide à la résolution dont la principale, et la plus aboutie, est la modélisation en barres.

Il s'agit de rectangles allongés représentant les différentes grandeurs en jeu dans la situation problème. Elles illustrent les réunions, les recherches du complément, les partages... évoqués dans le problème, ceci quelle que soit la nature des grandeurs en jeu.

Par exemple pour le problème :

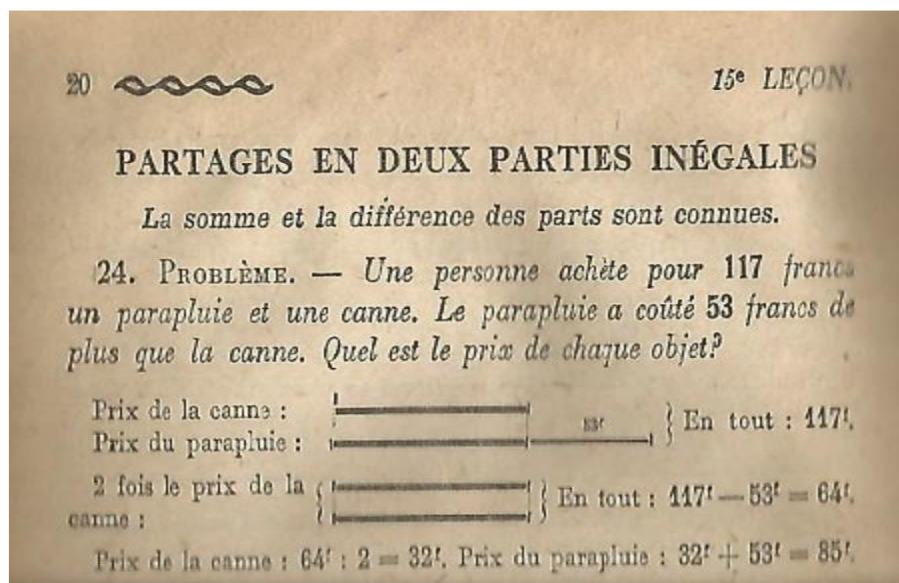
Dans une classe, il y a 15 filles et 5 garçons. Combien y-a-t-il d'élèves dans cette classe ?

¹ Voir annexe 2, « Grandeurs, mesure et opération », dans ce document.

La représentation peut être :



Le recours à ce type de modélisations n'est pas nouveau, elle était systématiquement utilisée dans les ouvrages d'arithmétique du début du siècle dernier. On trouvera ci-dessous un extrait de l'ouvrage : M. Delfaud et A. Millet, Arithmétique, cours moyen et supérieur, Certificat d'études, 1928, Hachette²



Les conditions de l'enseignement de l'arithmétique dans les écoles du début du siècle dernier ou dans les écoles de Singapour sont bien différentes de celles que nous connaissons actuellement. Toutefois l'hypothèse faite par les enseignants dont la pratique est décrite dans ce document est que, moyennant un certain travail, le recours à ces modélisations intermédiaires peut permettre de construire des techniques pertinentes et efficaces pour les tâches de type T_1 , dans le cadre de l'enseignement français des années 2020.

² On pourra aussi consulter l'ouvrage : M. Royer et P. Court, Arithmétique, cours élémentaire, 1926, librairie Armand Colin. Ce type de modélisation était utilisé comme support pour introduire l'algèbre jusque dans les années 60, comme dans l'ouvrage : H. Schaeffer et J. Lebaile, Mathématiques, classe de cinquième, 1954, librairie Delagrave. Dans ces ouvrages on ne trouve pas de rectangles allongés mais des segments de droite, plus facilement reproductibles.

L'analyse didactique³ d'une collection d'ouvrages français⁴ utilisant ces représentations nous a permis d'avoir des éléments réflexifs sur l'enseignement de l'arithmétique suivant une méthode dite de « Singapour » et de déterminer des précautions à prendre pour organiser la pratique dans les classes.

2. Quelle(s) fonction(s) peuvent avoir les représentations en barres dans la résolution des problèmes d'arithmétique ?

On trouvera en annexe, en référence aux travaux de M. Bosch et Y. Chevallard⁵, une analyse détaillée des fonctions des représentations intermédiaires.

Ici, nous présentons les principaux éléments retenus pour organiser la pratique dans les classes.

Pour mémoire, il s'agit d'outiller les élèves pour accomplir des tâches de type T1 :

« L'élève est face à un récit qui évoque des manipulations du monde matériel, (partage ou réunion de longueurs, de collections, de masses, etc., plus généralement manipulations de grandeurs décrites en gestes spécifiques au type de grandeurs concernées : par exemple mis bout à bout pour les longueurs, regroupement pour les collections...) Une question lui est posée sur certains éléments de cette situation à laquelle il doit répondre à partir des mesures des grandeurs qui lui sont données.

Pour cela, il sait que certaines des quatre opérations lui seront utiles, il doit choisir lesquelles. »

En résumé nous dirons que :

■ les représentations intermédiaires doivent avoir une **fonction sémiotique, c'est-à-dire qu'elles doivent avoir la capacité de représenter certains éléments de la situation proposée**, et en cela elles correspondent à un travail d'abstraction : seuls les éléments pertinents pour la résolution du problème sont retenus. Elles ne doivent retenir que la mesure des grandeurs utiles et doivent être le signe des manipulations sur ces grandeurs : « par exemple partage ou réunion de longueurs, de collections, de masses, etc. »

A ce titre tout un travail préalable a été fait dans les classes pour accompagner ce travail d'abstraction :

- installation du vocabulaire parties/tout ;
- utilisation pratique de cubes multidirectionnel ;
- utilisation d'une gestuelle accompagnant les opérations sur les grandeurs ;
- mise en place de discours d'aide à la sélection des données pertinentes.

On trouvera la trace dans les différents chapitres qui suivent de ces éléments.

■ les représentations intermédiaires doivent avoir une **fonction instrumentale** : leur utilisation doit permettre de faire avancer le choix d'une ou plusieurs opérations, (+, -, ×, ÷), conduisant à une arithmétisation du problème. Il est donc nécessaire de construire des liens entre ces représentations et chacune des quatre opérations. Les représentations intermédiaires auxquelles nous nous intéressons ne

³ Dans le présent document nous utilisons des éléments de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) comme aide à l'analyse des situations didactiques évoquées. Rappelons, comme le fait Y. Chevallard dans la séance 5 de l' « Humble séminaire 2019-2020 », « Les modèles élaborés par la TAD ne sont nullement *normatifs*. Ils ne disent pas ce qui *devrait* être, mais ce qui *pourrait* être ». Notre objectif est essentiellement de pointer certains gestes didactiques afin de s'interroger sur leur remplacement par d'autres gestes.

Pour une présentation d'éléments de la TAD on pourra se référer à l'article : Yves Chevallard, « Analyse des pratiques enseignantes », dans *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol 19/2, Grenoble, La Pensée Sauvage, éditeur, 1999.

⁴ Les ouvrages de la collection intitulée « Maths, Méthode de Singapour », du CP au CM2, proposés par La Librairie des Ecoles, éditeur.

Une autre collection se réfère à la méthode de Singapour : « Les Maths avec Léonie », éditions Bordas. Lors de l'écriture de ce texte, seuls les ouvrages s'adressant au CP et au CE1 sont disponibles. Nous ne les avons pas analysés en détail.

⁵ MARIANNA BOSCH et YVES CHEVALLARD, « La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique », dans *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/1, Grenoble, La Pensée Sauvage, éditeur, 1999. p. 77-124.

sont pas auto-justifiées, il ne suffit pas de montrer une représentation en barres aux élèves pour qu'ils l'associent spontanément à telle ou telle opération, cela se construit.

A ce titre, y compris en cours moyen :

- les enseignants ont fait un retour sur la fonctionnalité des quatre opérations : l'addition, la soustraction, la multiplication ou la division « à quoi ça sert »,
- ces questions ont été traitées en utilisant le vocabulaire, le matériel, les gestes et les discours évoqués précédemment.
- pour chacune des opérations, un lien a été institutionnalisé entre des types de situations et des représentations en barres.

II - ORGANISATION DU DOCUMENT

Le **premier chapitre**, est centré sur l'installation du lexique parties/tout, en liaison avec un retour sur le sens des quatre opérations, et avec les représentations en barres.

Le **second chapitre** est consacré au traitement du champ additif qui regroupe addition et soustraction. Cette terminologie est utilisée en référence à la typologie de G. Vergnaud⁶.

Le **troisième chapitre** regroupe les problèmes du champ multiplicatif, qui regroupe multiplication et division, là aussi en référence à la typologie de G. Vergnaud⁷, y compris les problèmes de proportionnalité et de pourcentages.

Ce guide s'adresse plutôt à des classes de cours moyen qui n'ont jamais utilisé la résolution de problème avec la méthode en barres mais a été pensé pour être facilement adapté à des élèves de cours préparatoire ou cours élémentaire.

Il peut aussi s'adresser aux classes de sixième, celles-ci étant intégrées dans le cycle 3.

Dans ce guide, les problèmes sont en gras. Ce que dit le professeur des écoles est en italique.

⁶ Vergnaud (G.), *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Berne, Peter Lang, 1981.

On pourra aussi se référer au fichier pédagogique, Cycle 3 du « *Moniteur de Mathématiques : résolution de problèmes* », rédigé par Brégeon (J.L.), Hugué (F.), Péault (H.), Dossat (L.), Myx (A.) sous la direction de Vergnaud (G.), éditeur Nathan, Paris, 1997, collection : le Moniteur de Mathématiques.

⁷ Op. cit.

LEXIQUE TOUT – PARTIES ET SENS DES QUATRE OPERATIONS

Résumé :

Ce chapitre est centré sur l'installation du lexique Parties/Tout et sur la formalisation du sens des quatre opérations avec les représentations en barres.

Une attention particulière a été portée à la précision du lexique utilisé par exemple dans la distinction entre grandeur et mesure. Il est possible d'approfondir ces notions dans l'annexe Grandeur et mesure.

I - LEXIQUE TOUT ET PARTIES

Il s'agit ici d'installer le vocabulaire Tout et Parties :

- dans le monde réel avec les cubes emboîtables qui en seront les éléments figuratifs.
- dans le monde des mathématiques avec les nombres et les signes opératoires.

On propose des situations qui n'impliquent **que** des cubes afin de ne pas induire d'autres difficultés liées à la compréhension du problème ou à d'autres connaissances sur les grandeurs par exemple.

La forme du cube permet de passer aisément à la représentation en barres.

Cette installation se fait avec des cubes emboîtables.

Le PE installe le vocabulaire Tout et Parties.

Cette installation est pertinente pour des élèves du CP au CM2 qui ne sont pas familiers avec ces notions.

La démarche est volontairement très progressive voire répétitive.

A chacun de l'adapter suivant le niveau des élèves et leurs connaissances.

La compréhension du mot « Tout » a posé question : est-il vraiment compris par les élèves ? Pas si sûr !

1. Réunion de deux Parties pour trouver le Tout

Objectif institutionnel visé : Pour trouver le Tout, je réunis les Parties.

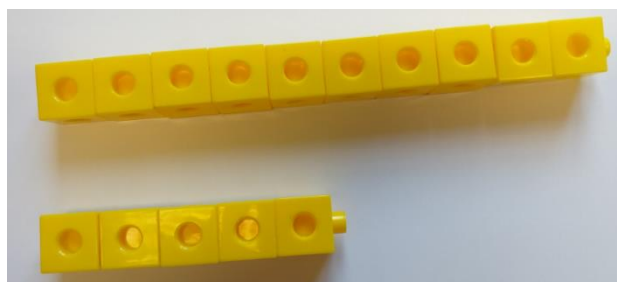
Le PE montre en utilisant des cubes.

Voici des cubes emboîtés pour former une barre.



Je peux casser cette barre en 2.

J'obtiens 2 Parties.



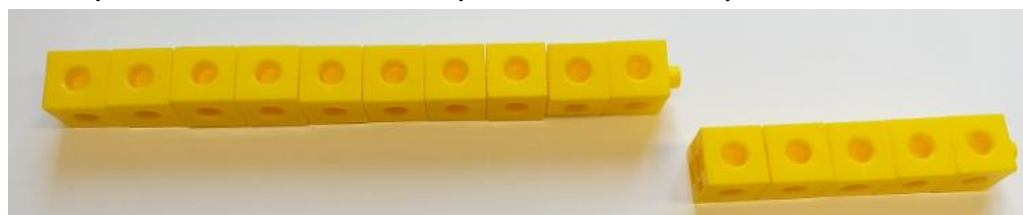
Le PE montre tour à tour une Partie, puis l'autre.
Quand je prends cette Partie, je n'ai pas tous les cubes.



Quand je prends cette Partie, je n'ai pas tous les cubes.



Quand je remets les Parties ensemble, je réunis les Parties et j'ai tous les cubes.



On a tous les cubes.



On a Tout.

C'est le Tout.

Dans le monde réel, on a $PARTIE 1 + PARTIE 2 = TOUT$. Ce sont des ensembles de cubes.

Dans le monde des mathématiques, on a $10 + 5 = 15$ ou $15 = 10 + 5$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles. 10 est la mesure de cette barre. Le PE montre la barre.

5 est la mesure de cette barre. Le PE montre l'autre barre.

Quand j'additionne ces deux mesures, j'obtiens 15 qui est la mesure du Tout.

Le PE montre la barre avec tous les cubes.

Le PE écrit au tableau l'opération qui correspond à ce qu'il a montré avec les cubes.

Suivant le niveau de la classe, l'enseignant peut faire reconstituer un Tout à partir d'autres collections.

Exemples de collections : jetons, billes, sable...

Il pourra ensuite demander aux élèves de modéliser ces collections à l'aide de cubes.

Ce qui est très intéressant c'est que chaque cube représentera alors une bille, un jeton, une mesure de sable...

Les cubes serviront alors de représentation fonctionnelle pour la résolution d'un bon nombre de problèmes.

Remarque : Le sable est intéressant en termes de mesure moins facile à appréhender.

Pourquoi pas l'eau ? Pourquoi pas l'air ? etc. ...

2. Dissociation du Tout pour trouver l'une des deux Parties

Objectif institutionnel visé : pour trouver une Partie, j'enlève l'autre Partie du Tout.
De nouveau, le PE montre en utilisant des cubes.

Voici un Tout.



Ce Tout est composé de deux Parties.

Voici une Partie.



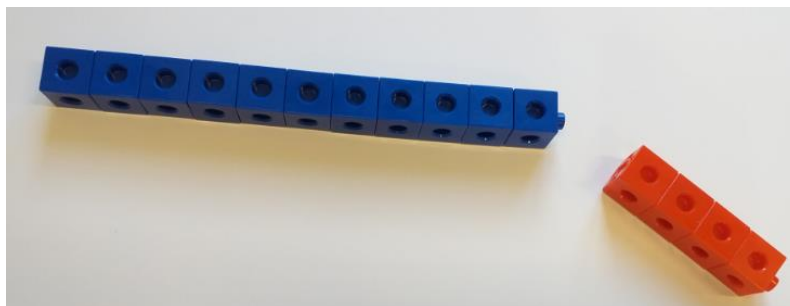
Voici l'autre Partie.



Je reprends le Tout.



Si j'enlève une Partie au Tout, je peux trouver l'autre Partie.



Si j'enlève cette Partie....

Le PE peut la cacher derrière son dos ou dans une boîte !



voici la Partie qui reste.



Quand j'enlève une partie du Tout, je trouve bien la Partie qui reste.

Dans le monde réel, on a TOUT - PARTIE 1 = PARTIE 2 ou TOUT - PARTIE 2 = PARTIE 1.

Ce sont des ensembles de cubes.

Dans le monde mathématique, on a $15 - 4 = 11$ ou $15 - 11 = 4$.

Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles. 15 est la mesure de cette barre, c'est la mesure du Tout.

Le PE montre la barre. 4 est la mesure de la Partie que j'enlève.

Le PE montre la barre qu'il enlève.

Je fais une soustraction $15 - 4$ et j'obtiens 11 qui est la mesure de la Partie qui reste.

Le PE montre la Partie restante.

Le PE écrit au tableau l'opération qui correspond à ce qu'il a montré avec les cubes.

Les élèves sont invités à construire des situations de problème pour réinvestir les notions de Tout et Parties.

Il faut bien insister sur les mots clés : mesure - tout - partie - enlever - reste ...

II - JUSTIFICATION DES QUATRE OPERATIONS

Préambule : grandeurs et mesures.

Il s'agit de montrer que l'on passe de grandeurs du monde réel à leur mesure dans le monde mathématique, où les quatre opérations sont des outils qui permettent de répondre à des questions que l'on se pose.

En préambule, le PE invite les élèves à faire l'inventaire des grandeurs possibles : longueurs, masses, capacités, durée, monnaie, quantité d'objets d'une collection...

Il pose la question : que peut-on mesurer ?

Ces grandeurs appartiennent au monde réel.

Quand on les mesure, on passe dans le monde mathématique.

Par exemple, dans le monde réel, la route entre deux villes existe. Elle a une longueur.

Quand on mesure la longueur de cette route, on passe dans le monde mathématique.

Cette longueur mesure par exemple 15 km.

Les mathématiques sont des outils qui permettent de résoudre des problèmes dans le monde réel.

Par exemple :

- si on a parcouru la route entre deux villes, puis la route entre la deuxième ville et une troisième ville, combien de km a-t-on parcouru en Tout ?

Ici, c'est l'addition, un outil mathématique, qui permet de répondre à cette question, sans avoir à parcourir cette distance.

- si on a parcouru une partie de cette distance, combien de km reste-t-il à parcourir ?

Ici, c'est la soustraction, autre outil mathématique, qui permet de répondre à cette question, sans avoir à parcourir cette distance.

1. L'addition

1.1 Emergence des représentations des élèves

Dans une classe au-delà du CP, afin que le PE ait une idée de ce que savent les élèves sur l'addition, il leur demande de répondre par écrit aux questionnements suivants.

L'addition, à quoi ça sert ?

Explique dans quels cas tu auras besoin de faire une addition.

Donne un exemple.

Le PE ramasse le travail et le lit pour se donner une idée de ce que pensent les élèves.

1.2 Représentation d'un problème avec de petites mesures schématiquement représentables.

Manipulation avec des aimants.

Le choix est fait de représenter le problème avec une collection d'aimants ce qui permet de les fixer au tableau et rend la représentation de l'opération plus visible.

Le PE dispose des aimants au tableau.



L'idée est de montrer que l'addition est associée à la réunion de plusieurs Parties.
Elle permet d'obtenir la mesure du Tout à partir de la mesure de chaque Partie.

Combien a-t-on d'aimants en Tout ?

On a une Partie avec 5 aimants, une Partie avec 3 aimants et une Partie avec 4 aimants.

5 est la mesure de cet ensemble d'aimants c'est-à-dire le nombre d'élément de cet ensemble d'aimants.

3 est la mesure de cet ensemble d'aimants et 4 est la mesure de cet ensemble d'aimants.

Le PE écrit combien il y a d'aimants sous chaque groupe au fur et à mesure qu'il décrit ce qui est représenté.



Avec la main, les aimants sont réunis pour former un Tout.



Le geste de la main permet de visualiser le sens de l'addition en montrant la réunion de plusieurs parties.

Le PE aligne de nouveau les aimants pour préparer à l'utilisation des cubes et à la future représentation avec des barres.

On avait plusieurs Parties.

Quand on a réuni ces Parties, on a obtenu un Tout.

PARTIE 1 + PARTIE 2 + PARTIE 3 = TOUT. Ce sont des ensembles d'aimants.

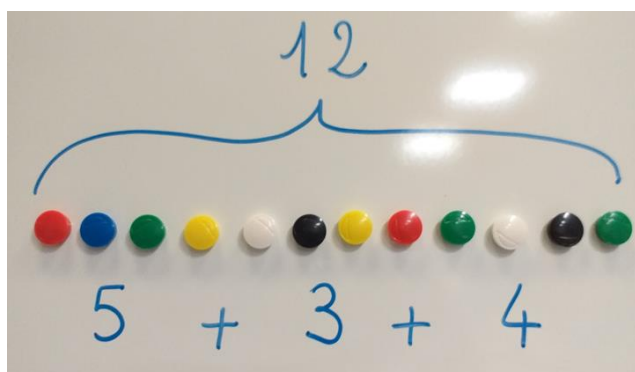


Dans le monde mathématique, on écrit une addition. Ici $5 + 3 + 4 = 12$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

5, 3 et 4 sont des mesures d'ensemble d'aimants. Quand j'additionne ces 3 mesures, j'obtiens 12 qui est la mesure de l'ensemble de Tous les aimants.

Le PE montre au fur et à mesure avec sa main les différents ensembles d'aimants au tableau.

Le PE écrit l'addition au tableau.



L'accolade permet de visualiser le Tout et prépare à la future représentation en barres.

Dans le monde réel, on a PARTIE 1 + PARTIE 2 + PARTIE 3 = TOUT. Ce sont des ensembles d'aimants.

Dans le monde mathématique, on a $5 + 3 + 4 = 12$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

Manipulation avec des cubes.

Le problème est repris avec des cubes emboîtables. Les élèves sont par groupes de 2.

L'idée est de bien matérialiser le Tout avec des cubes pour une future représentation en barres.

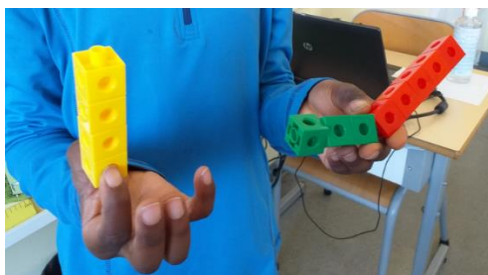
On distribue 10 cubes rouges, 10 cubes jaunes et 10 cubes verts à chaque groupe.



Le PE demande aux élèves de montrer l'opération $5 + 3 + 4 = 12$ avec les cubes.

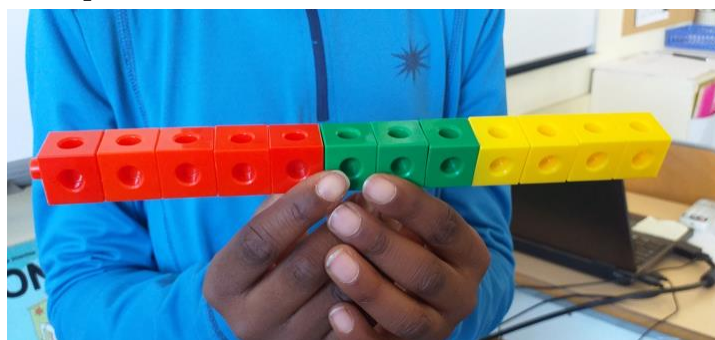
Pour la mise en commun, le PE fait passer un groupe au tableau.

Un élève montre 3 barres : une barre de 5 cubes d'une couleur, une barre de 3 cubes d'une autre couleur et une barre de 4 cubes d'une troisième couleur.



On a 3 Parties.

L'élève rassemble les 3 Parties pour former un Tout.



On réunit les 3 Parties pour former le Tout.

$PARTIE\ 1 + PARTIE\ 2 + PARTIE\ 3 = TOUT$

L'élève montre la barre avec 12 cubes.

Au tableau, le PE écrit l'opération : $5 + 3 + 4 = 12$

Dans le monde réel, on a $PARTIE\ 1 + PARTIE\ 2 + PARTIE\ 3 = TOUT$. Ce sont des ensembles de cubes.

Dans le monde mathématique, on a $5 + 3 + 4 = 12$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

5 est la mesure de cet ensemble de cubes, 3 est la mesure de cet ensemble de cubes, 4 est la mesure de cet ensemble de cubes.

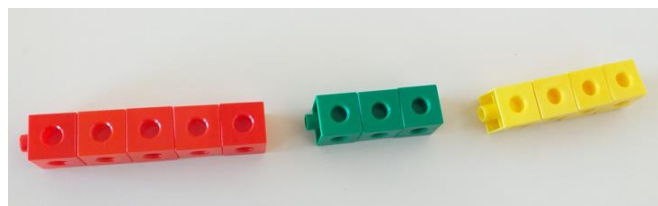
Quand j'additionne ces 3 mesures, j'obtiens 12 qui est la mesure de l'ensemble de tous les cubes.

Le PE montre au fur et à mesure les différents ensembles de cubes.

Représentation en barres

On va représenter ces cubes au tableau avec des barres.

Le PE redissocie les 3 Parties.



5

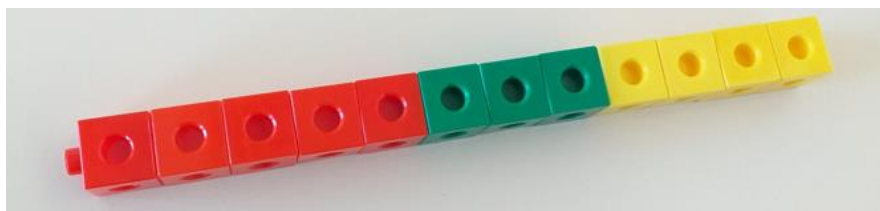
3

4

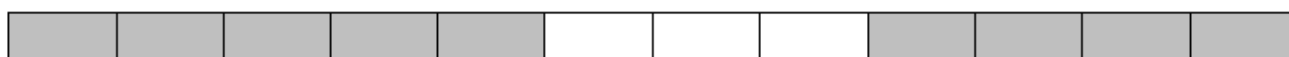
Il les représente au tableau et il indique la mesure de chaque barre.



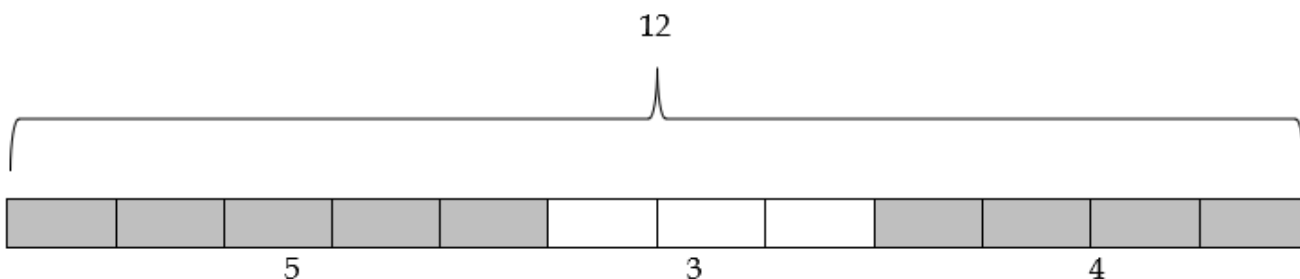
Il montre bien les 3 Parties et il insiste sur le fait que tous les cubes sont représentés.
Le PE réunit de nouveau les différentes Parties en un seul Tout, une seule barre.



Il efface la représentation précédente. Il représente une seule barre avec tous les cubes.



Il les représente au tableau et il indique la mesure de chaque barre.
Avec une accolade, il représente le Tout. Il indique la mesure de chaque Partie sous chaque barre.



Il écrit l'opération : $5 + 3 + 4 = 12$

Il insiste sur la différence entre le monde réel et le monde mathématique.

Dans le monde réel, on a PARTIE 1 + PARTIE 2 + PARTIE 3 = TOUT. Ce sont des ensembles.

Il montre avec les cubes.

Dans le monde mathématique, on a $5 + 3 + 4 = 12$. Ce sont des mesures.

Il montre l'opération écrite au tableau.

$$5 + 3 + 4 = 12$$

Remarques

Suivant le niveau des élèves, pour renforcer la compréhension, le PE peut réinvestir ces manipulations avec d'autres mesures. Il n'hésite pas à donner des cubes à ses élèves pour manipuler.

Il peut être intéressant d'utiliser deux tableaux muraux : un pour le monde réel, un pour le monde mathématique ou deux zones bien distinctes d'un même tableau afin que les élèves différencient bien le monde réel et le monde mathématique.

Pour les élèves de CM, le PE explique aux élèves qu'il n'est pas nécessaire de représenter toutes les cases pour les préparer à l'utilisation de cette représentation pour les grands nombres : ce qui est important pour connaître la mesure du Tout, c'est de connaître la mesure de chaque Partie.

Petit à petit, il efface les cases et les remplace par l'écriture de leur nombre à l'intérieur de chaque Partie. Il obtient alors la représentation suivante.



$$5 + 3 + 4 = 12$$

Pour les élèves plus jeunes, cette nouvelle représentation pourra être abordée plus tard, quand les nombres deviendront trop grands pour tous les représenter.

1.3 Représentation d'un problème avec de grandes mesures (pour les élèves de CM)

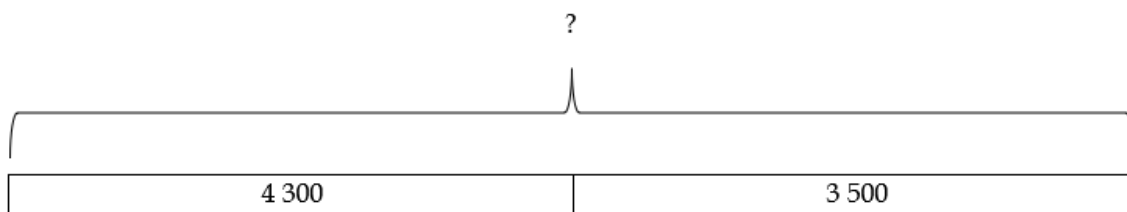
L'idée est de pouvoir représenter des collections plus importantes ce qui permettra de justifier l'utilisation de l'addition. Il ne sera en effet plus possible de dénombrer la collection. Il faudra alors utiliser l'opération.

Maintenant, nous avons une Partie qui mesure 4300 et une autre Partie qui mesure 3500.

Dans le monde réel, je ne peux pas vous les montrer avec des cubes. Les nombres sont trop grands.

Mais dans le monde mathématique, nous pouvons calculer combien mesure le Tout.

Avec ses élèves, il réalise la représentation suivante.



Quand je réunis plusieurs Parties, j'obtiens un Tout.

Je fais une addition.

$$4\ 300 + 3\ 500 = 7\ 800$$

Cette représentation montre l'addition.

Quand fait-on une addition ?

On fait une addition quand les nombres deviennent trop grands pour manipuler les objets à la main, pour tous les représenter et les compter.

L'addition permet d'être plus rapide et plus efficace.

Imaginez s'il avait fallu dénombrer !

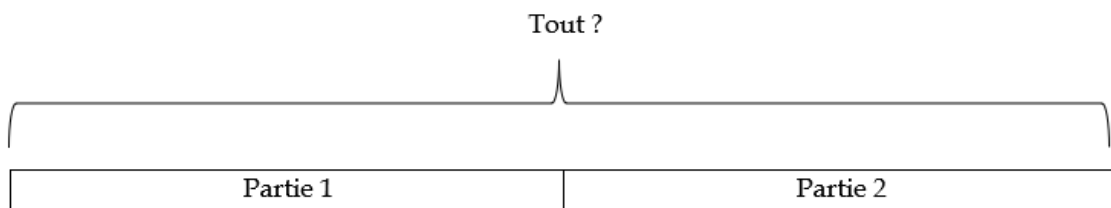
1.4 Institutionnalisation

L'addition est une opération qui permet d'obtenir la mesure d'un Tout quand on connaît la mesure de toutes les Parties qui forment le Tout.

Dans le monde réel, on réunit toutes les Parties pour former le Tout.

Dans le monde des mathématiques, on fait la somme des mesures des Parties pour obtenir la mesure du tout.

Le point d'interrogation représente la recherche de la mesure du Tout.



$$\text{Tout} = \text{Partie 1} + \text{Partie 2}$$

La résolution de problèmes du champ additif est traitée de manière approfondie dans la partie « CHAMP ADDITIF ».

2. La soustraction

2.1 Emergence des représentations des élèves

Dans une classe au-delà du CP, afin que le PE ait une idée de ce que savent les élèves sur la soustraction, il leur demande de répondre par écrit aux questionnements suivants.

La soustraction, à quoi ça sert ?

Explique dans quel cas tu auras besoin de faire une soustraction.

Donne un exemple.

Le PE ramasse le travail et le lit pour se donner une idée de ce que pensent les élèves.

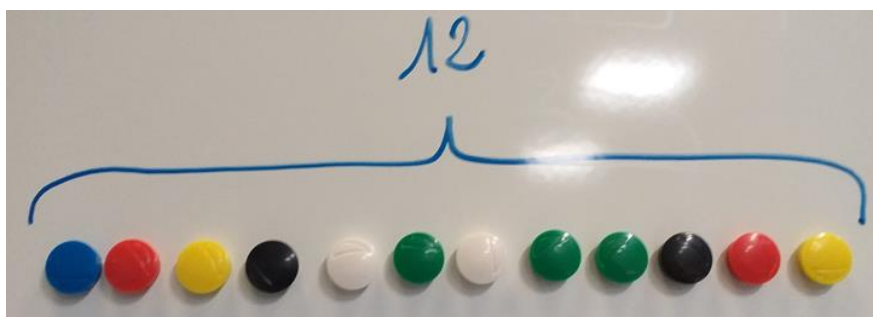
2.2 Représentation d'un problème avec de petites mesures schématiquement représentables

Manipulation avec des aimants

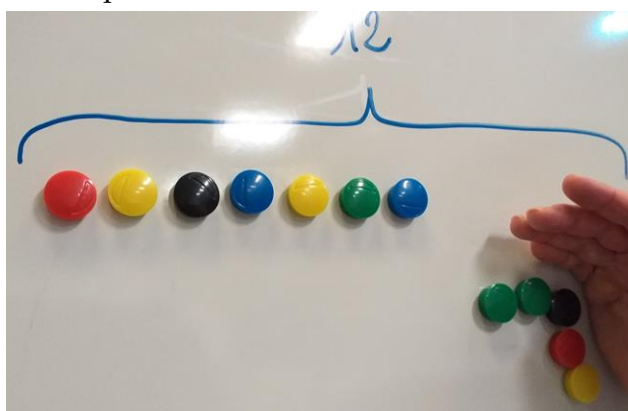
De même que pour l'addition, le PE utilise des aimants. Il les dispose au tableau en ligne.

L'idée est de montrer que la soustraction permet de trouver la Partie qui reste quand on enlève une Partie connue à un Tout avec un geste de la main.

On a un Tout dont la mesure est 12.

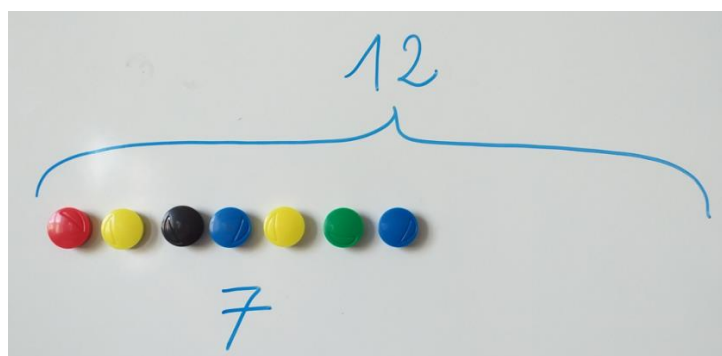


Avec la main, le PE en déplace une partie, dont la mesure est 5 aimants.



Le geste de la main permet de visualiser le sens de la soustraction : on enlève une Partie à un Tout.

Il reste l'autre partie dont la mesure est 7.



On avait un Tout, on a enlevé une Partie, il reste l'autre Partie.

On a fait une soustraction.

On peut l'écrire TOUT - PARTIE 1 = PARTIE 2. Ce sont des ensembles d'aimants.

Dans le monde mathématique, on l'écrit $12 - 5 = 7$.

Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

12 est la mesure de l'ensemble de tous les aimants. C'est le Tout. 5 est la mesure de cet ensemble d'aimants que j'enlève à 12. Je fais une soustraction $12 - 5$ et j'obtiens 7 qui est la mesure de l'ensemble des aimants qui restent.

Le PE montre au fur et à mesure avec sa main les différents ensembles d'aimants au tableau.

Manipulation avec des cubes

Le problème est repris avec des cubes emboîtables. Les élèves sont par groupes de 2.

L'idée est de bien matérialiser la Partie connue qui est enlevée du Tout.

Ce qui permet de bien visualiser la Partie inconnue dont on cherche la mesure.

On distribue 10 cubes rouges et 10 cubes verts à chaque groupe.



Le PE demande aux élèves de montrer l'opération $12 - 5$ avec les cubes.

Pour la mise en commun, le PE fait passer un groupe au tableau.

Un élève montre une barre avec 12 cubes dont 7 d'une couleur et 5 d'une autre couleur.



On a un Tout, 12 cubes.

L'élève enlève 5 cubes.

On enlève 5 cubes qui représentent la Partie qu'on a enlevée, la Partie 1.



Il cache la partie qu'il a enlevée dans son dos et montre la partie qui reste.

Il me reste une barre de 7 cubes, la Partie qui reste, la Partie 2.



L'élève montre la barre avec 7 cubes.

Au tableau, le PE écrit l'opération. $12 - 5 = 7$.

Dans le monde réel, TOUT - PARTIE 1 = PARTIE 2. Ce sont des ensembles de cubes.

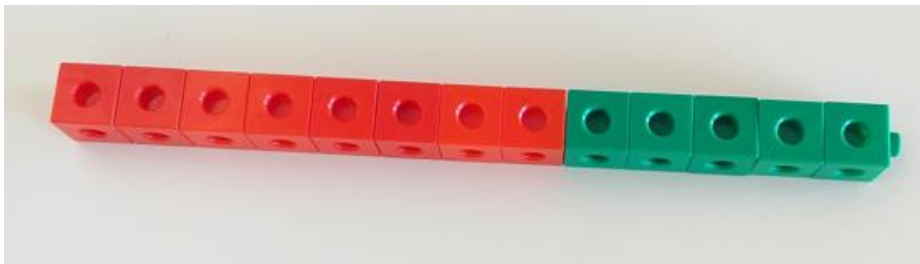
Dans le monde mathématique, on a $12 - 5 = 7$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

12 est la mesure de l'ensemble de tous les cubes. C'est le Tout. 5 est la mesure l'ensemble de cubes que j'enlève à 12. Je fais une soustraction $12 - 5$ et j'obtiens 7 qui est la mesure de l'ensemble des cubes qui restent.

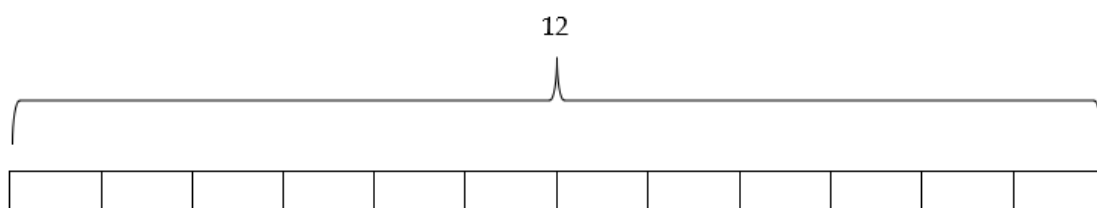
Le PE montre au fur et à mesure avec sa main les différents ensembles de cubes.

Représentation en barres

On va représenter ces cubes au tableau avec des barres.

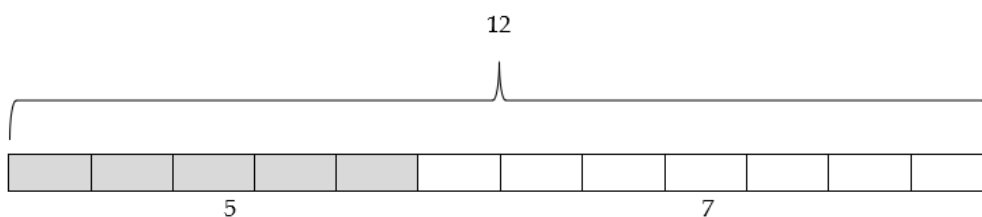


Nous allons d'abord représenter tous les cubes et indiquer la mesure du Tout, 12, avec une accolade.



Pour montrer qu'on enlève 5 cubes, on les colorie.

Le PE indique la mesure de chaque Partie sous chaque barre.



$$12 - 5 = 7$$

Il insiste sur la différence entre le monde réel et le monde mathématique.

Dans le monde réel, on a TOUT - PARTIE 1 = PARTIE 2. Ce sont des ensembles de cubes.

Il montre avec les cubes.

Dans le monde mathématique, on a $12 - 5 = 7$. Ce sont les mesures (ou le nombre d'éléments) de ces ensembles.

Il montre l'opération écrite au tableau.

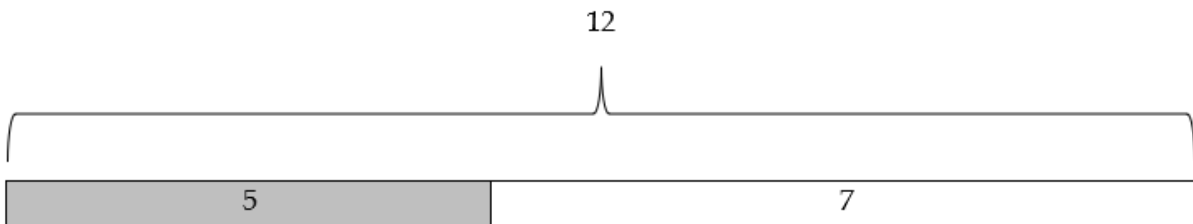
Remarques :

Suivant le niveau des élèves, pour renforcer la compréhension, le PE peut réinvestir ces manipulations avec d'autres mesures.

Il peut aussi donner des cubes à ses élèves pour manipuler.

Pour les élèves de CM, le PE explique aux élèves que, comme pour l'addition, il n'est pas nécessaire de représenter toutes les cases. Ceci permet de les préparer à l'utilisation de cette représentation avec des grands nombres.

Petit à petit, il efface les cases et les remplace par l'écriture de leur mesure à l'intérieur de chaque Partie. Il obtient alors la représentation suivante.



$$12 - 5 = 7$$

Pour les élèves plus jeunes, cette nouvelle représentation pourra être abordée plus tard, quand les nombres deviendront trop grands pour tous les représenter.

2.3 Représentation d'un problème avec de grandes mesures (pour les élèves de CM)

Comme pour l'addition, on représente des collections plus importantes ce qui permet de justifier l'utilisation de la soustraction. Il ne sera en effet plus possible de dénombrer la collection.

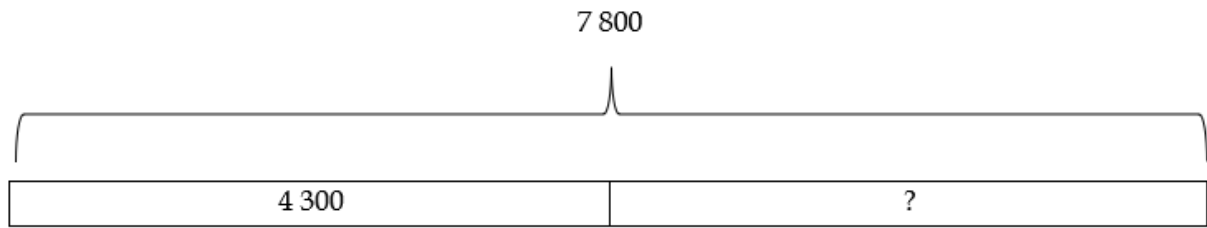
Il faudra alors utiliser une l'opération.

Maintenant, nous avons un Tout qui mesure 7 800. On enlève une Partie qui mesure 4300.

Dans le monde réel, je ne peux pas vous les montrer avec des cubes. Les nombres sont trop grands.

Mais dans le monde mathématique, nous pouvons calculer combien mesure l'autre Partie.

Avec ses élèves, le PE réalise la représentation suivante.



Quand j'enlève une Partie à un Tout, j'obtiens une autre Partie.

Je fais une soustraction.

$$7\ 800 - 4\ 300 = 3\ 500$$

Cette représentation montre la soustraction.

Quand fait-on une soustraction ?

On fait une soustraction quand les nombres deviennent trop grands pour manipuler les objets à la main et les compter.

La soustraction permet d'être plus rapide et plus efficace.

Imaginez s'il avait fallu dénombrer !

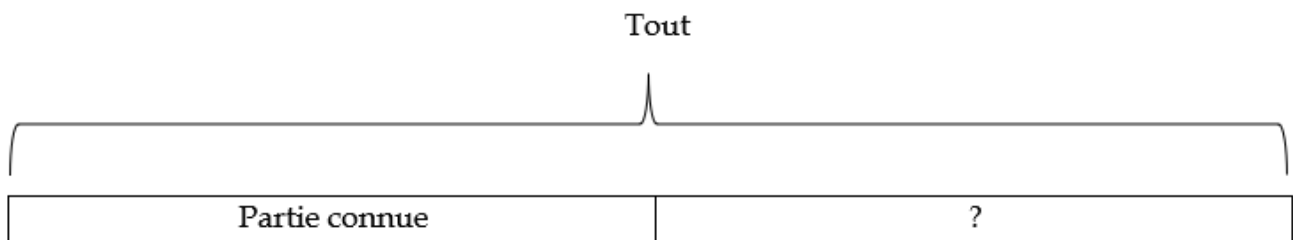
2.4 Institutionnalisation

La soustraction est une opération qui permet de connaître la mesure de la Partie inconnue.

Pour cela, dans le monde réel, on enlève la mesure de la Partie connue de la mesure connue du Tout.

Dans le monde des mathématiques, on soustrait la mesure de la Partie connue de la mesure du Tout pour trouver la Partie inconnue.

Le point d'interrogation représente la recherche de la mesure de la Partie inconnue.



TOUT - PARTIE CONNUE = PARTIE INCONNUE

La résolution de problèmes du champ additif est traitée de manière approfondie dans la partie « CHAMP ADDITIF ».

3. La multiplication

Dans un premier temps, on peut utiliser le mot groupe plutôt que le mot Partie qui est plus facile d'accès pour les élèves.

Selon la situation, le mot groupe peut remplacer les mots : paquet, sachet, rangée, bouquet, boîte...

Le vocabulaire Partie sera utilisé progressivement et nécessitera un entraînement avec un travail d'abstraction.

3.1 *Emergence des représentations des élèves*

Dans une classe au-delà du CP, afin que le PE ait une idée de ce que savent les élèves sur la multiplication, il leur demande de répondre par écrit aux questionnements suivants.

La multiplication, à quoi ça sert ?

Explique dans quel cas tu auras besoin de faire une multiplication.

Donne un exemple.

Le PE ramasse le travail et le lit pour se donner une idée de ce que pensent les élèves.

3.2 *Justification de la multiplication*

Même si les élèves ont déjà rencontré la multiplication, il n'est pas inutile de revenir sur des situations concrètes que cette opération permet de modéliser.

L'objectif visé est de montrer que la multiplication permet de trouver la mesure d'un Tout obtenu par réunion de grandeurs identiques sans passer par des additions successives afin de gagner du temps.

Il s'agit de travailler le sens de la multiplication et de comprendre dans quel cas elle peut être utilisée.

Manipulation avec des aimants

De même que pour l'addition et la soustraction, le PE utilise des aimants.

L'idée est de montrer que la multiplication permet de trouver le Tout quand on rassemble plusieurs Parties égales avec un geste de la main.

Il dispose 12 aimants au tableau en 4 Parties identiques.

On a 4 Parties identiques. Dans chaque Partie, il y a 3 aimants.



Avec la main, le PE rassemble les 4 Parties pour former un Tout.



Le geste de la main permet de visualiser le sens de la multiplication : on trouve le Tout en rassemblant des Parts égales.

On avait 4 Parts égales, on les a rassemblées pour former le Tout...

On a fait une multiplication.

Dans le monde mathématique, on l'écrit $4 \times 3 = 12$.

Manipulation avec des cubes

Le problème est repris avec des cubes emboîtables.

Pour faire comprendre cet objectif aux élèves, on va utiliser des cubes multidirectionnels.

Les élèves sont par équipe de 2. On distribue 3 cubes de chaque couleur à toutes les équipes. Suivant le matériel disponible, on peut aller jusqu'à 30 cubes.

Le PE demande aux élèves de faire un calcul pour trouver combien il y a de cubes sur la table et de l'écrire sur une feuille.

Pour la mise en commun, le PE fait passer au tableau 2 ou 3 équipes qui ont utilisé des techniques différentes.

Certains comptent les cubes 3 par 3 et font une addition.



D'autres ont écrit une addition en notant les couleurs de chaque groupe.

3	cubes noir
+	3 cubes marron
+	3 cubes violet
+	3 cubes orange
+	3 cubes vert clair
+	3 cubes vert foncé
+	3 cubes rouge
+	3 cubes bleu
+	3 cubes blanc
+	3 cubes jaune
<hr/>	
30	

Enfin, la plupart des équipes ont écrit directement la multiplication $10 \times 3 = 30$ ou $3 \times 10 = 30$.
Le PE montre qu'on multiplie le nombre de groupes par la mesure de chaque groupe.

Dans le monde réel, on a 10 groupes de 3 cubes.

Il écrit au tableau :

10 groupes de 3 cubes

Dans le monde des mathématiques, on a $10 \times 3 = 30$

Il écrit au tableau :

$10 \times 3 = 30$

Remarque : suivant le niveau des élèves, plus ou moins d'équipes passeront par l'addition.

Et déjà, à ce niveau, certains disent qu'on va plus vite en faisant une multiplication.

En CM, pour renforcer cette idée et ainsi montrer l'utilité de la multiplication, on demande aux élèves de calculer le nombre de cubes distribués à l'ensemble de la classe.

On laisse chaque équipe calculer le résultat et on note le temps mis pour y arriver. Cela permettra de montrer l'efficacité de chaque calcul en espérant que certains élèves utiliseront l'addition réitérée.

Remarque : en CM, les élèves pensent immédiatement à la multiplication et le plus compliqué est de trouver le nombre de groupes dans la classe.

Pour bien montrer que les grandeurs qu'on réunit doivent être de même mesure, on peut présenter une situation où la multiplication seule ne sera pas possible.

Pour cela, on donne un nombre de cube à chaque groupe qui soit un nombre premier, 31 cubes par exemple et on leur demande de calculer le nombre total de cubes en utilisant la multiplication. Les élèves s'aperçoivent que ce n'est pas possible d'utiliser la multiplication car tous les groupes n'ont plus la même mesure.

3.3 La commutativité

L'objectif visé est d'attirer l'attention des élèves sur le fait que dans le monde réel quatre fois trois n'est pas la même chose que trois fois quatre alors qu'en mathématique, le résultat de 4×3 est égal au résultat de 3×4 , c'est à dire 12.

Dans le monde réel, 4 groupes de 3 c'est différent de 3 groupes de 4.

Par exemple, 4 bouquets de 3 fleurs ce n'est pas pareil que 3 bouquets de 4 fleurs, mais c'est la même opération qui permet de connaître le nombre total de fleurs.

Pour faire comprendre cette idée aux élèves, on va utiliser des cubes multidirectionnels.

Les élèves travaillent par deux. On leur distribue 24 cubes. Ils doivent utiliser les cubes pour représenter le plus de multiplications possibles.

Par exemple, ils peuvent constituer 2 groupes de 12 cubes et sur leur feuille, ils écrivent :

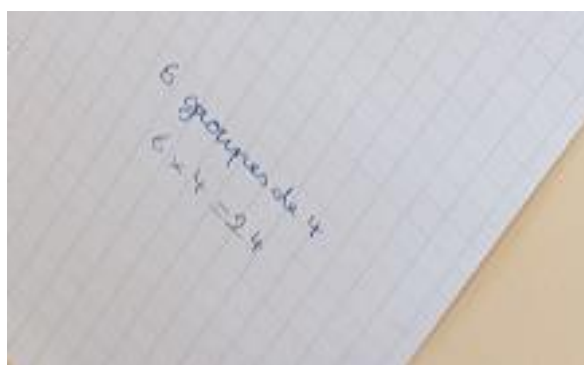
2 groupes de 12 cubes

$2 \times 12 = 24$.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Ils essaient de trouver Toutes les possibilités. Ils peuvent s'aider des résultats de la table de multiplication pour trouver.



Un bilan permettra de bien visualiser que 2 groupes de 12 cubes est très différent de 12 groupes de 2 cubes, mais le Tout obtenu dans les deux cas a la même mesure. La multiplication est commutative.

Toutes les possibilités seront ainsi comparées.

Suivant le niveau de la classe, il est possible d'utiliser plus ou moins de cubes.

3.4 Institutionnalisation

Le PE écrit une définition de la multiplication avec ses élèves en utilisant les mots Tout et Partie.

La multiplication est une opération qui permet d'obtenir la mesure d'un Tout obtenu par réunion de plusieurs Parties (ou groupes) de même mesure. Si on connaît le nombre de Parties (ou groupe) et la mesure de chacune de ces Parties, la multiplication de la mesure du nombre de Partie par la mesure d'une Partie permet de connaître la mesure du Tout.

Donc, si la mesure de chaque Partie est la même :

Nombre de Parties x Mesure d'une Partie = Mesure du Tout.

4. La division

Même si les élèves ont déjà rencontré la division, il n'est pas inutile de revenir sur des situations concrètes que cette opération permet de modéliser.

4.1 Emergence des représentations des élèves

Dans une classe au-delà du CP, afin que le PE ait une idée de ce que savent les élèves sur la division, il leur demande de répondre par écrit aux questionnements suivants.

La division, à quoi ça sert ?

Explique dans quel cas tu auras besoin de faire une division.

Donne un exemple.

Le PE ramasse le travail et le lit pour se donner une idée de ce que pensent les élèves.

4.2 Justification de la division

L'objectif visé est de montrer que dans une situation de partage d'un Tout, quand on connaît la mesure du Tout et le nombre de parts ou la valeur de chaque part que l'on veut obtenir, on peut trouver la mesure de chaque part ou le nombre de parts sans passer par un partage effectif.

S'il existe une seule manière de diviser un nombre par un autre en mathématique, dans le monde réel, cette opération permet de répondre à deux questionnements différents : trouver la mesure de chaque part dans la division partition ou trouver le nombre de parts dans la division quotient.

4.3 Recherche de la mesure d'une PARTIE : division partition

L'objectif visé est de montrer que quand on connaît la mesure du Tout et le nombre de Parties égales, la division permet de connaître la mesure de chaque Partie.

Dans la division partition, on connaît la mesure du Tout et le nombre de Parts (ou groupes).

Chaque Part (ou groupe) aura la même mesure.

Pour faire comprendre cette idée aux élèves, on va utiliser des aimants puis des cubes multidirectionnels.

Manipulation avec des aimants

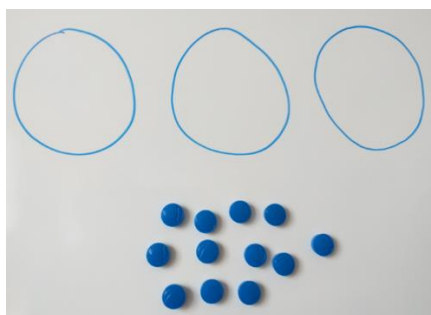
De même que pour la multiplication, le PE utilise des aimants.

L'idée est de montrer que pour trouver la mesure d'un groupe (ou Partie), il faut répartir équitablement le Tout entre chaque groupe (ou Partie).

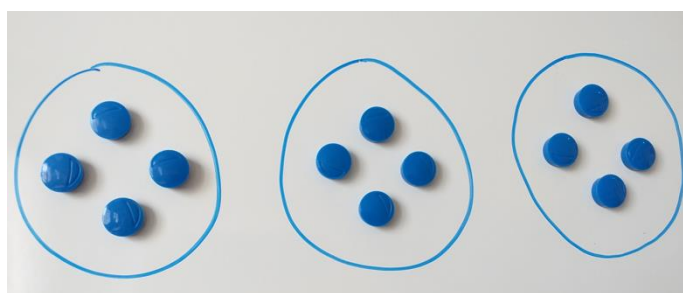
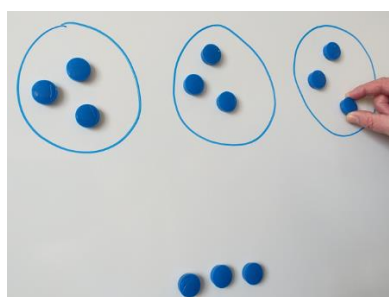
On a 12 aimants qu'on veut répartir équitablement entre 3 groupes.

Vérifier si le mot équitablement est compris.

Le PE dispose 12 aimants au tableau en vrac au tableau et il trace 3 groupes.



Le PE répartit au fur et à mesure les aimants dans chaque groupe jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'aimants.



On avait 12 aimants. On les a répartis équitablement entre 3 groupes. Dans chaque groupe, il y a 4 aimants. Autrement dit, on avait un Tout (12 aimants).

On a fait 3 Parts égales. Combien mesure chaque Part ? Chaque Part mesure 4 aimants.

On a réparti les 12 aimants en 3 parts égales.

On a partagé les 12 aimants en 3 parts égales.

On a divisé les 12 aimants en 3 parts égales.

On a fait une division.

Dans le monde mathématique, on l'écrit $12 : 3 = 4$.

On divise 12 par 3. On obtient 4.

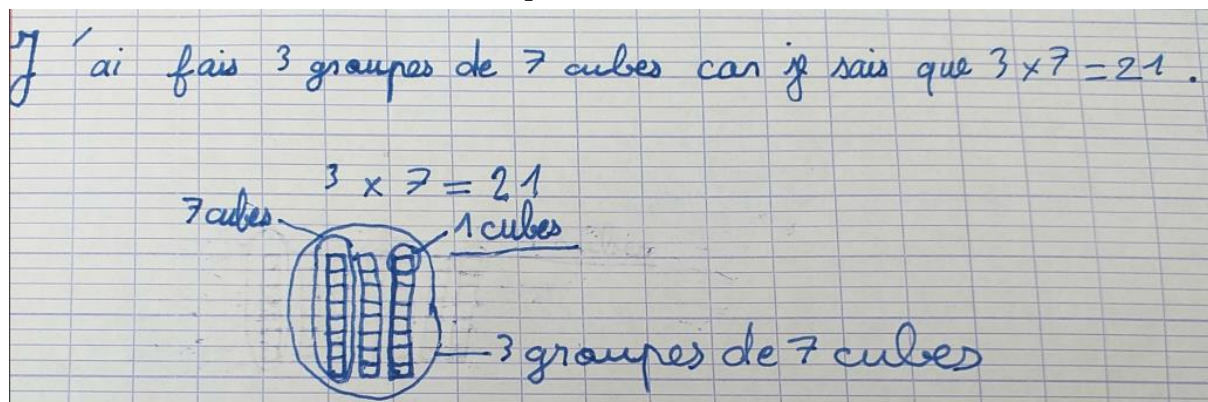
Manipulation avec des cubes

Les élèves sont par équipes de 2.

On distribue 21 cubes à chaque équipe.

Vous allez répartir équitablement les cubes entre trois groupes et vous allez expliquer par écrit comment vous avez fait.

Certains ont réparti les cubes un par un. D'autres ont réparti les cubes 5 par 5 puis un par un. D'autres enfin ont réinvesti le travail sur la multiplication.



Les élèves obtiennent des tas de 7 cubes.

Le PE montre qu'on obtient le même résultat en utilisant la division.

On divise la mesure du Tout par le nombre de groupes.

Pour montrer l'utilité de la division, on réinvestit cette idée en demandant à un élève de répartir un grand nombre de cubes (par exemple 125) entre cinq élèves.

Si par exemple l'élève distribue les cubes un par un, le PE amène un autre élève à distribuer les cubes de manière plus rapide par exemple, deux par deux, trois par trois, cinq par cinq, dix par dix voire 25 par 25 !

Petit à petit, on se rapproche du résultat recherché.

Le PE montre ensuite que par la technique opératoire de la division, on peut obtenir le résultat en divisant la mesure du Tout par le nombre de groupes.

$$125 : 5 = 25$$

4.4 Première institutionnalisation : division partition

Le PE écrit une première définition de la division avec ses élèves en utilisant les mots Tout et Partie.

Avec ses élèves, il fait l'inventaire de ce qu'on connaît et de ce qu'on cherche et il le note au tableau.

On connaît :

le Tout

le nombre de Parties égales.

On cherche :

la mesure de chaque Partie.

On obtient alors la définition suivante :

Quand on partage le Tout en un nombre de Parties identiques, la division permet d'obtenir la mesure de chaque Partie, en divisant la mesure du Tout par le nombre de parties.

Donc, si la mesure de chaque Partie est identique :

Mesure du Tout \div le nombre de Parties = la mesure d'une Partie

4.5 Recherche du nombre de PARTIES : division quotition

L'objectif visé est de montrer que, quand on connaît la mesure d'un Tout et la mesure de chaque partie quand on partage ce Tout en parties égales, la division permet de connaître le nombre de Parties. C'est la division quotition.

Dans la division quotition, on connaît la mesure du Tout et la mesure d'une Part (ou groupe).
On cherche le nombre de Parts. Chaque Part aura la même mesure.
Il est important de bien insister sur le mot chaque.

Pour faire comprendre cette idée aux élèves, on va utiliser des aimants puis des cubes multidirectionnels.

Manipulation avec des aimants.

L'idée est de montrer que quand on connaît la mesure du Tout et le nombre d'éléments dans chaque groupe, on peut trouver le nombre de groupes (ou Parties).

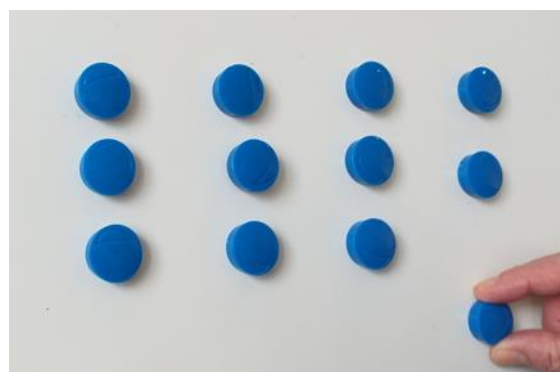
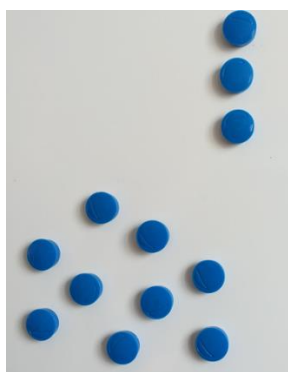
On a 12 aimants.

Il dispose 12 aimants au tableau en vrac au tableau.



On veut faire des groupes de 3 aimants.

Le PE fait des groupes de 3 aimants au fur et à mesure jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'aimants.



On avait 12 aimants. On a fait des groupes de 3 aimants. On a obtenu 4 groupes.

Autrement dit, on avait un Tout (12 aimants). On devait faire des groupes de 3 éléments. On a obtenu 4 Parties.

On a fait une division.

Dans le monde mathématique, on l'écrit $12 : 3 = 4$.

Manipulation avec des cubes.

Les élèves sont par équipes de deux. On distribue 20 cubes à chaque équipe.

Vous allez répartir équitablement les cubes en faisant des groupes de 5 cubes et vous devez trouver combien de groupes vous avez fait.

Les élèves comptent les cubes 5 par 5.

Les élèves obtiennent 4 groupes.



Le PE montre qu'on obtient le même résultat en utilisant la division.

On divise la mesure du Tout par la mesure de chaque groupe.

Pour montrer l'utilité de la division, on réinvestit cette idée avec un nombre de cubes plus grand, par exemple 200 cubes. On demande à un élève de distribuer ces cubes par barre de 10. On cherche le nombre d'élèves qui auront dix cubes.

Le PE montre ensuite que par la technique opératoire de la division, on peut obtenir le résultat en divisant la mesure du Tout par la mesure d'un groupe.

$$200 : 10 = 20$$

4.6 Deuxième institutionnalisation : division quotient

Le PE écrit une première définition de la division avec ses élèves en utilisant les mots Tout et Partie.

Il fait l'inventaire de ce qu'on connaît et de ce qu'on cherche et il le note au tableau.

On connaît :

le Tout

la mesure de chaque Partie égale.

On cherche :

le nombre de Parties.

On obtient alors la définition suivante :

La division est une opération.

On connaît le Tout et la mesure de chaque Partie égale. On obtient le nombre de Parties.

Quand on partage le Tout en Parties de même mesure, la division est une opération qui permet d'obtenir le nombre de Parties en divisant la mesure du Tout par la mesure d'une Partie.

Donc, si la mesure de chaque Partie est identique :

Mesure du Tout : la mesure d'une Partie = le nombre de Parties

CHAMP ADDITIF

Dans ce chapitre, seront traités les problèmes additifs en suivant la typologie de Gérard Vergnaud⁸ : les problèmes de composition d'états, les problèmes de comparaison d'états et les problèmes de transformation d'état.

Les problèmes de composition de transformations d'états seront traités comme des problèmes à plusieurs étapes.

Après avoir expliqué les raisons pour lesquelles nous nous sommes appuyés sur la typologie de Gérard Vergnaud, nous étudierons chaque type de problème.

Le choix a été fait d'organiser le travail avec les élèves en s'appuyant sur une typologie des problèmes additifs issue des travaux de Gérard Vergnaud pour plusieurs raisons :

- la classification de G. Vergnaud a été très largement diffusée et a donné lieu à de nombreux écrits. Actuellement on trouve décrites, dans les publications à ce sujet, quatre catégories de problèmes additifs : problèmes de composition d'états, problèmes de transformation d'état, problèmes de comparaison d'états et problèmes de composition de transformations d'états. Cette dernière catégorie sera traitée en tant que problèmes à plusieurs étapes. Les élèves doivent pouvoir résoudre des problèmes de ces différents types en fin de cycle 3.
- les études faites à l'aide de cette classification ont permis de montrer que les difficultés rencontrées par les élèves dépendent très largement de la reconnaissance du type de problème proposé.
- les représentations en barres nous semblent pouvoir rendre compte de la structure des différents types de problèmes décrits dans cette classification ; elles peuvent être à ce titre une modélisation efficace pour aider à la résolution des problèmes. De plus elles peuvent facilement être mise en lien avec l'addition ou la soustraction qui permet de calculer le résultat cherché.

Dans chaque paragraphe qui suit, en préambule, le type de problème travaillé est présenté ainsi que les représentations schématiques classiquement données dans les travaux s'inspirant de G. Vergnaud. Nous précisons l'intérêt dans l'enseignement des représentations en barres par rapport aux représentations de G. Vergnaud.

I - PROBLEMES DITS DE « COMPOSITION D'ETAT ».

1. Préambule : de quoi s'agit-il ?

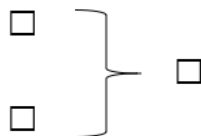
Deux grandeurs sont réunies pour former une troisième grandeur.

⁸ Vergnaud (G.), *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Berne, Peter Lang, 1981.

On pourra aussi se référer au fichier pédagogique, Cycle 3 du « *Moniteur de Mathématiques : résolution de problèmes* », rédigé par Brégeon (JL.), Hugué (F.), Péault (H.), Dossat (L.), Myx (A.) sous la direction de Vergnaud (G.), éditeur Nathan, Paris, 1997, collection : le Moniteur de Mathématiques.

On trouvera dans ce fichier la version la plus élaborée de la classification, les représentations schématiques proposées par G. Vergnaud et des exemples de problèmes correspondant à chaque situation.

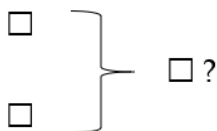
Voici la représentation schématique des problèmes de composition d'états donnée par G. Vergnaud⁹ :



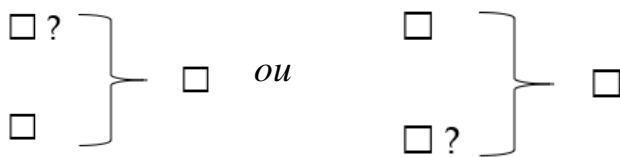
C'est une situation statique, les deux grandeurs se présentent simultanément, elles ont le même statut. Ce sont tous des problèmes où on a deux Parties qui constituent un Tout. Il n'y a pas de temporalité. Il n'y a pas de transformation d'état.

Ils peuvent nécessiter pour être résolus l'utilisation d'une addition ou d'une soustraction :

- on connaît la mesure des deux Parties, on cherche la mesure du Tout, la résolution nécessite une addition,



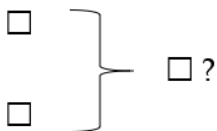
- on connaît la mesure d'une des deux Parties et du Tout, on cherche la mesure de l'autre Partie, la résolution nécessite une soustraction.



Nous développons ci-dessous l'étude de chacune de ces situations.

2. Problèmes nécessitant une addition

Rappel : On connaît la mesure des deux Parties et on cherche la mesure du Tout.



⁹ Vergnaud G (1976) *Structures additives et complexité psychogénétique*. Revue française de pédagogie, vol 36, pp 28-43, disponible en ligne.

2.1 Recherche du Tout : Premier problème

Dans une classe, il y a 15 filles et 5 garçons.

Combien y-a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Prélèvement des informations utiles pour trouver la réponse

Il s'agit ici d'aider les élèves à repérer ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

A chaque fois, on a des mesures connues avec lesquelles on va calculer une mesure inconnue.

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il liste les informations avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Dans la classe, il y a 15 filles et 5 garçons. Que connaît-on ?

On connaît le nombre de filles, 15.

On connaît le nombre de garçons, 5.

Au fur et à mesure, le PE inscrit au tableau.

Nombre de filles : 15 filles

Nombre de garçons : 5 garçons

Combien y-a-t-il d'élèves dans cette classe ? Que cherche-t-on ?

On cherche le nombre d'élèves.

Le PE inscrit au tableau.

Nombre d'élèves : ? élèves

Ainsi sur le tableau, le PE a écrit les informations utiles à la résolution du problème.

Nombre de filles : 15 filles

Nombre de garçons : 5 garçons

Nombre d'élèves : ? élèves

Il fait bien remarquer que l'on a donc deux mesures connues qui vont permettre de calculer la mesure inconnue.

Matérialisation du problème avec des cubes.

Les élèves sont amenés à travailler par groupe de deux.

Chaque groupe reçoit 20 cubes emboîtables d'une couleur et 20 d'une autre couleur.

Vous essayez de représenter le problème avec ces cubes.

La représentation doit aider à trouver la solution.

Quelqu'un qui ne connaît pas le problème doit pouvoir le comprendre.

Explicitation des choix

Les élèves prennent 15 cubes d'une couleur et 5 cubes d'une autre couleur et ils les assemblent.

On choisit un ou deux groupes pour passer au tableau et expliquer ce qui a été fait.

Le PE résume ce qui a été dit.

Les 15 cubes jaunes représentent les filles et les 5 cubes verts représentent les garçons. La barre avec tous les cubes représente les élèves. 15 filles et 5 garçons, ça fait 20 élèves.

Représentation

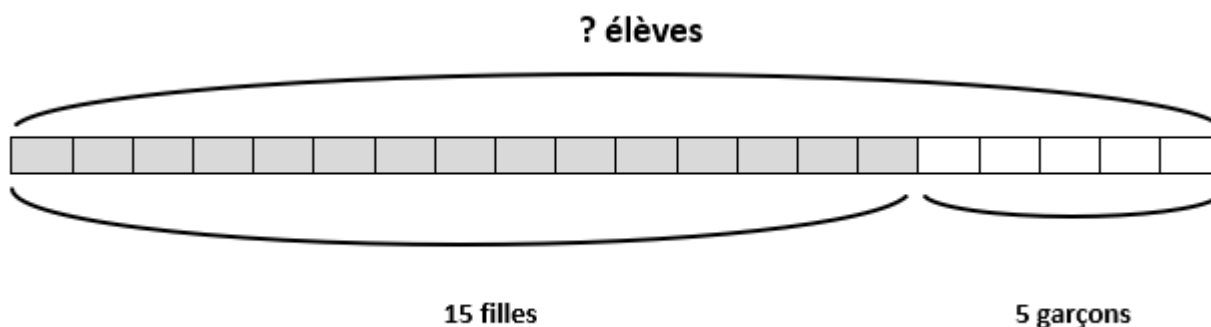
Chaque groupe reçoit une feuille blanche.

Vous allez représenter les cubes sur une feuille. Quelqu'un qui ne connaît pas le problème doit pouvoir le comprendre.

Vous utiliserez un crayon à papier.

On choisit l'utilisation du crayon à papier afin d'éviter le problème des cubes qui ne sont pas de la même couleur pour les différents groupes.

On choisit un ou deux groupes pour passer au tableau afin d'obtenir la représentation ci-dessous.



Le PE résume ce qui a été représenté.

On voit une PARTIE qui est composée de 15 filles, chaque carré gris représente une fille, une PARTIE qui est composée de 5 garçons, chaque carré blanc représente un garçon et un TOUT qui est composé de 20 élèves. C'est l'ensemble des cubes.

L'étape suivante a pour but de rappeler aux élèves qu'ils ne sont pas obligés de dessiner tous les cubes. Nous l'avons déjà abordé dans le paragraphe sur la justification des 4 opérations pour montrer que les opérations sont des outils indispensables quand les nombres sont trop grands.

Dessiner tous les cubes, c'est chronophage et impossible quand les nombres sont trop grands.

Toutefois, cette étape ne doit pas être réalisée trop tôt afin que les élèves gardent bien en tête ce que représente une barre. Il ne faut pas hésiter à revenir régulièrement à la représentation de chaque cube notamment lorsqu'on abordera la représentation de la multiplication et de la division.

Que peut-on faire pour ne pas dessiner tous les cubes à chaque fois ?

On voit qu'il y a davantage de cubes gris que de cubes blancs.

On peut représenter ces deux mesures à l'aide de barres de longueurs différentes, en effaçant l'intérieur.

Il s'agit de la représentation avec un modèle en barres. La barre la plus longue correspond au nombre le plus grand.

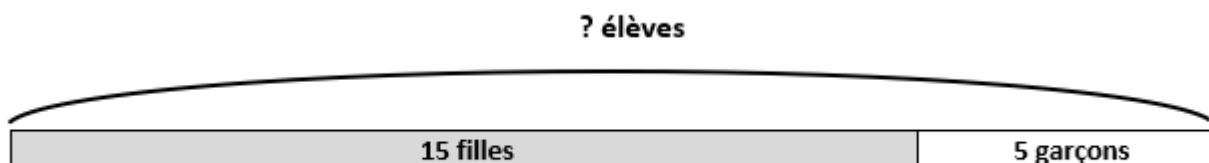
Le PE garde la trace de cette représentation au tableau avec le prélèvement d'informations utiles pour trouver la réponse.

Nombre de filles : 15 filles

Nombre de garçons : 5 garçons

Nombre d'élèves : ? élèves

On place la mesure des barres dans les barres.



On voit qu'une PARTIE est composée de 15 filles.

Une deuxième PARTIE est composée de 5 garçons.

Le TOUT, c'est le nombre d'élèves qu'on cherche.

On peut ici ou plus loin discuter de la différence de longueur des barres, mais ce qui est important c'est qu'il y ait deux Parties qui se réunissent en un Tout et que la représentation garde en mémoire les mesures connues.

Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des informations et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre d'élèves ?

Pour trouver le nombre d'élèves, on additionne les 15 filles avec les 5 garçons.

On fait une addition : $15 + 5 = 20$.

On écrit la phrase réponse : Dans cette classe, il y a 20 élèves.

2.2 Recherche du Tout : Deuxième problème

Dans le jardin, Paul a ramassé 8 tomates, 9 courgettes et 7 poivrons.

Combien a-t-il récolté de légumes ?

Cet exemple de problème permet de montrer aux élèves que le nombre de Parties peut être supérieur à 2.

Prélèvement des informations

De la même manière que pour le premier problème, il s'agit d'aider les élèves à repérer ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il liste les informations avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Dans le jardin, Paul a ramassé 8 tomates, 9 courgettes et 7 poivrons. Que connaît-on ?

On connaît le nombre de tomates, 8.

On connaît le nombre de courgettes, 9.

On connaît le nombre de poivrons, 7.

Au fur et à mesure, PE inscrit au tableau.

Nombre de tomates : 8 tomates

Nombre de courgettes : 9 courgettes

Nombre de poivrons : 7 poivrons

Combien a-t-il récolté de légumes ? Que cherche-t-on ?

On cherche le nombre de légumes.

Le PE inscrit au tableau.

Nombre de légumes : ? légumes

Ainsi sur le tableau, le PE a écrit les informations utiles à la résolution du problème.

Nombre de tomates : 8 tomates

Nombre de courgettes : 9 courgettes

Nombre de poivrons : 7 poivrons

Nombre de légumes : ? légumes

Il fait bien remarquer que l'on a donc trois mesures connues qui vont permettre de calculer la mesure inconnue.

Matérialisation du problème

Les élèves travaillent par groupe de deux et utilisent les mêmes cubes que précédemment auxquels on ajoute des cubes d'une troisième couleur.

Vous représentez le problème avec ces cubes pour trouver la solution.

Explicitation des choix

Les élèves prennent 8 cubes d'une couleur, 9 cubes d'une autre couleur et 7 cubes d'une troisième couleur. On choisit un ou deux groupes pour passer au tableau et expliquer ce qui a été fait.

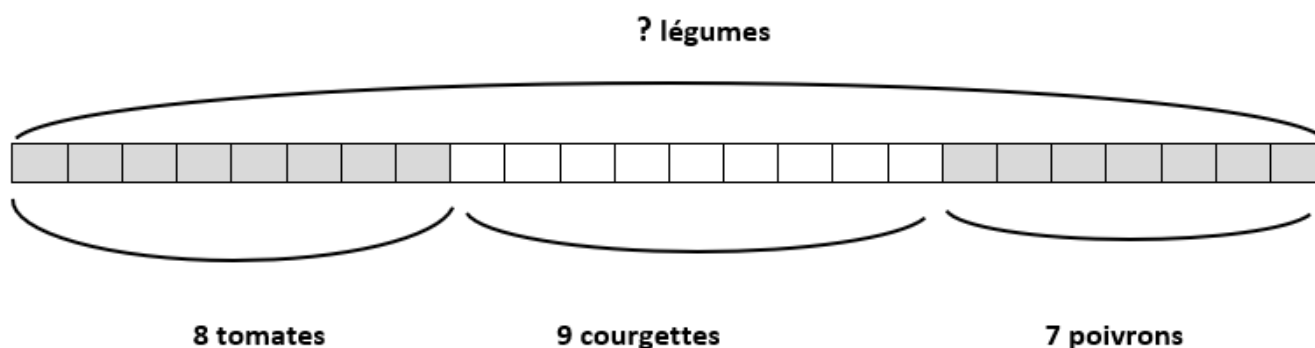
Le PE résume ce qui a été dit.

Les 8 cubes représentent les tomates, les 9 cubes représentent les courgettes et les 7 cubes représentent les poivrons. La barre avec tous les cubes représente les légumes. 8 tomates et 9 courgettes et 7 poivrons, ça fait 24 légumes.

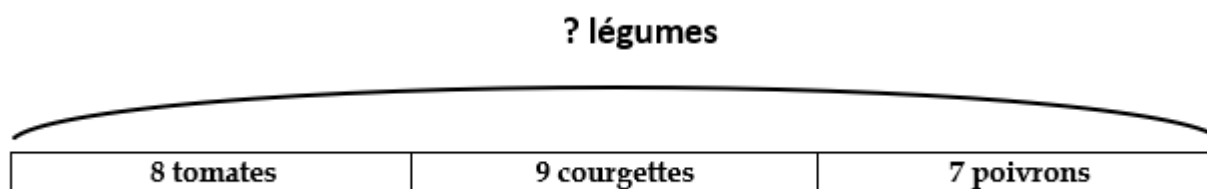
Représentation

Vous allez représenter ce problème avec des barres sur la même feuille.

On arrive à cette représentation.



Puis à celle-ci. On place la mesure des barres dans les barres.



On peut discuter de l'intérêt ou non que les barres soient proportionnelles au nombre de légumes.

Ce qui est important pour résoudre le problème c'est qu'il y ait trois Parties qui se réunissent en un Tout et que la représentation garde en mémoire les mesures connues et la place de la mesure inconnue.

On voit qu'une Partie de la récolte est composée de 8 tomates.

Une deuxième Partie de la récolte est composée de 9 courgettes.

Une troisième Partie de la récolte est composée de 7 poivrons.

Le Tout, c'est le nombre de légumes qu'on cherche.

Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel sont écrits le prélèvement des informations et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre de légumes ?

Pour trouver le nombre de légumes, on additionne les 8 tomates, les 9 courgettes et les 7 poivrons.

On fait une addition : $8 + 9 + 7 = 24$.

On écrit la phrase réponse : Pau l a récolté 24 légumes.

2.3 Institutionnalisation

Les représentations des deux problèmes sont mises côte à côte au tableau avec le prélèvement des informations.

On place la mesure des barres dans les barres.

Nombre de filles : 15 filles

Nombre de garçons : 5 garçons

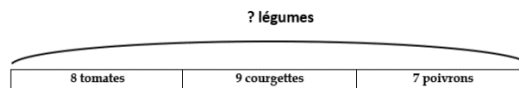
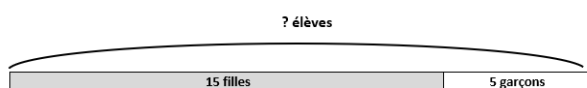
Nombre d'élèves : ? élèves

Nombre de tomates : 8 tomates

Nombre de courgettes : 9 courgettes

Nombre de poivrons : 7 poivrons

Nombre de légumes : ? légumes



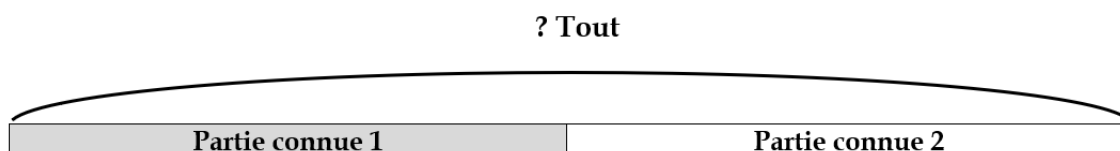
Le PE conduit les élèves à généraliser la représentation.

On obtient une première représentation avec le prélèvement des informations et le schéma.

Partie connue 1

Partie connue 2

Tout ?



On fera remarquer aux élèves qu'il peut y avoir 3 parties connues voire plus.

Pour trouver la mesure du Tout, on additionne la mesure des Parties : Partie 1 + Partie 2 = Tout.

Remarque : Pour les problèmes de composition d'état, il est important de faire remarquer aux élèves que la barre qui représente chacune des Parties représente également le Tout. C'est la même barre. En utilisant les cubes, on peut montrer une Partie, une deuxième Partie et lorsqu'on les rassemble, ils forment un Tout et ce sont bien les mêmes cubes qui forment les Parties puis qui forment le Tout.

Il est également intéressant de remarquer que les Parties et le Tout sont dans la même unité de mesure.

2.4 Entraînement

Quelques propositions de problèmes additifs.

1 - Jean a 25 billes bleues et 15 billes rouges.

Combien a-t-il de billes ?

2 - Dans un panier, il y a 8 pommes, 7 poires et 4 salades.

Combien y-a-t-il de fruits dans le panier ?

3 - La maîtresse a reçu les cahiers qu'elle avait commandés.

Elle a 100 cahiers rouges dans le premier carton, 25 cahiers bleus dans le deuxième et 125 cahiers jaunes dans le troisième.

Combien de cahiers a-t-elle reçu ?

4 - Pierre a fait une randonnée.

Il a marché 7 km le matin, et 3 km et demi l'après-midi.

Quelle distance a-t-il parcouru ?

5 - De Paris à Orléans il y a 120 km.

D'Orléans à Bourges il y a 110 km.

De Bourges à Montluçon il y a 92 km.

Quelle distance sépare Paris de Montluçon ?

6 - Un spectacle est organisé à l'école.

Il réunit 55 élèves de CP, 30 élèves de CE1 et 40 élèves de CE2.

Combien d'élèves ont assisté au spectacle ?

7 - 3352 adultes et 1647 enfants assistent à un spectacle de reconstitution historique.

Le nombre autorisé de spectateurs est de 5 000 au maximum.

La règle est-elle respectée ?

8 - Le jour de son anniversaire, Marion reçoit de l'argent.

Elle reçoit 30 € de ses parents et 25 € de sa grand-mère.

Combien a-t-elle reçu ?

9 - Pour son anniversaire, Marion reçoit de l'argent. Elle reçoit 30 € de ses parents, 25 € de sa grand-mère et 50 centimes de son petit frère.

Combien a-t-elle reçu ?

10 - Matilde possède 127 € d'argent de poche.

Pour son anniversaire, Matilde reçoit 2 € de son frère, 35 € de sa grand-mère et 25 € de son oncle.

Combien Matilde a-t-elle d'argent de poche maintenant ?

11 - Pour sa salade de fruit, une cliente a acheté 2 kg 250 g de poires, 1 kg 500 g de kiwis et 250 g de raisins.
Quelle est la masse totale des fruits achetés ?

12 - Laure a fait une balade.
Elle a marché pendant 1 h 35 mn puis fait une pause.
Elle a marché ensuite 2 h 45 mn.
Combien de temps a-t-elle marché ?

13 - Pour aller au collège un élève part de chez lui en voiture avec son père, puis il doit marcher.
Le trajet en voiture dure 37 mn.
Il marche pendant 26 mn.
Combien de temps met-il pour aller au collège ?

14 - Pour un cocktail sans alcool, on ajoute 160 cl de jus d'orange, 10 cl de jus de citron et 80 cl de jus de poire.
Quelle est la quantité de boisson obtenue ?

15 - Pour un cours sur les capacités, le maître remplit un récipient avec $\frac{1}{2}$ litre d'eau.

Puis, il rajoute $\frac{1}{4}$ de litre d'eau.

Quelle quantité d'eau obtient-il ?

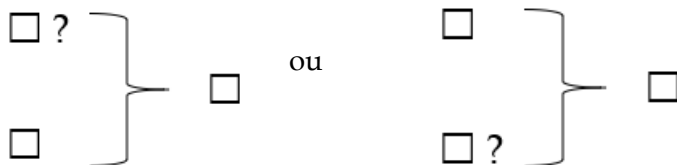
Remarque pour l'enseignant : Il serait intéressant laisser les élèves construire leur propre représentation ou de suggérer une représentation avec une barre verticale.

16 - Pour sa maquette de bateau, Jeanne a besoin de baguette en bois.
Pour la coque il lui en faut 1,75 m et pour les mâts 0,50 m.
Quelle longueur de baguette en bois lui faudra-t-il ?

17 - Pour Noël, un client a acheté 1m 70 de ruban rouge, 63 cm de ruban vert et 37 cm de ruban doré.
Quelle est la longueur totale des rubans achetés ?

3. Problèmes nécessitant une soustraction

Rappel : On connaît la mesure d'une Partie et la mesure du Tout. On recherche la mesure de l'autre partie.



3.1 Problème

Une salle de cinéma a 100 places. 85 places sont occupées. Combien reste-t-il de places libres ?

Prélèvement des informations

Il s'agit ici d'aider les élèves à repérer ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il liste les informations utiles avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Une salle de cinéma a 100 places. Que connaît-on ?

On connaît le nombre de places, 100 places.

85 places sont occupées. Que connaît-on ?

On connaît le nombre de places occupées. On sait que parmi ces 100 places, 85 sont occupées.

Combien reste-t-il de places libres ? Que cherche-t-on ?

On cherche le nombre de places libres.

Au fur et à mesure, le PE écrit au tableau.

Nombre de places : 100 places

Nombre de places occupées : 85 places occupées

Nombre de places libres : ? places libres

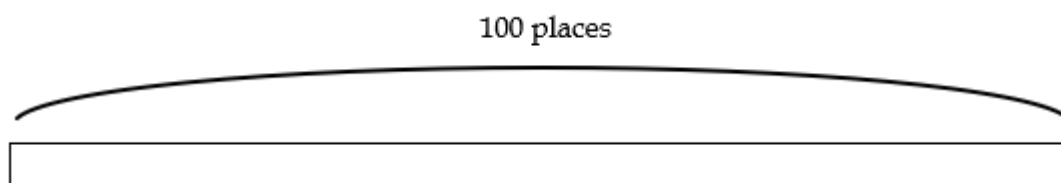
Il fait bien remarquer que l'on a donc deux mesures connues qui vont permettre de calculer la mesure inconnue : le nombre de places libres.

Représentation

Nous allons maintenant représenter ce problème.

Comme pour la prise de données d'informations utiles, la représentation est construite au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé.

Une salle de cinéma a 100 places. Nous allons représenter ces 100 places avec une barre.



85 places sont occupées. Nous allons indiquer le nombre de places occupées. Qui veut venir indiquer les places occupées ?

Le PE amène les élèves à comprendre que parmi les 100 places, 85 sont occupées.

Que reste-t-il ? « Les places libres. »

Quelle barre sera la plus grande ? Celle des places libres ou celle des places occupées ?

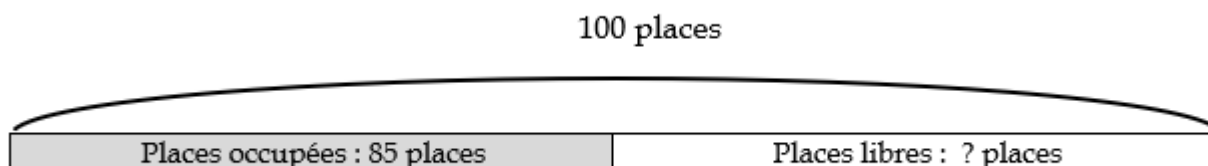
Plusieurs réponses sont possibles. Certains élèves auront déjà calculé la réponse et diront que 15 est plus petit que 85.

D'autres pourront dire que le milieu de 100 c'est 50.

85 est plus grand que 50.

Donc la barre la plus grande sera celle des 85 places occupées.

On obtient alors le schéma suivant.



Le PE résume ce qui a été représenté.

On voit un Tout qui est composé de 100 places.

Une Partie connue est composée de 85 places occupées.

Une Partie inconnue est composée des places libres.

Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des informations et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre de places libres ?

On peut faire une addition à trou $85 + \dots = 100$

On peut faire une soustraction $100 - 85 = \dots$

L'élève peut également dire : « De 85 pour aller à 90 j'ai ajouté 5 puis pour aller à 100, j'ai ajouté 10. En tout je trouve $5 + 10 = 15$ »

3.2 Institutionnalisation

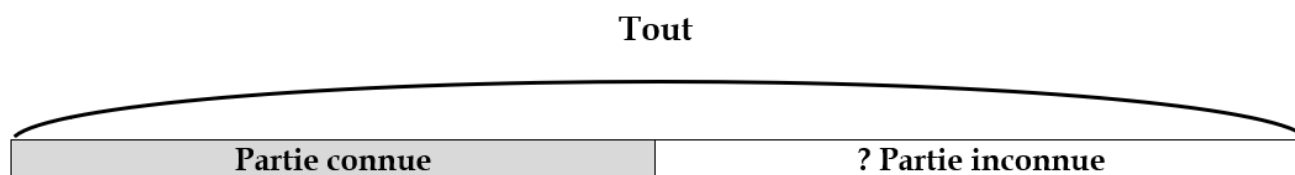
Le PE conduit les élèves à généraliser la représentation.

On obtient une deuxième représentation avec le prélèvement des informations et le schéma.

Tout

Partie connue

Partie inconnue ?



Pour trouver la mesure de la Partie inconnue, on soustrait la mesure de la Partie connue de la mesure du Tout : $\text{Tout} - \text{Partie connue} = \text{Partie inconnue}$.

Rappel : Pour les problèmes de composition d'état, il est important de faire remarquer aux élèves que la barre qui représente chacune des Parties représente également le Tout. C'est la même barre. En utilisant les cubes, on peut montrer une Partie, une deuxième Partie et lorsqu'on les rassemble, ils forment un Tout et ce sont bien les mêmes cubes qui forment les Parties puis qui forment le Tout.

Il est également intéressant de remarquer que les Parties et le Tout sont dans la même unité de mesure.

3.3 Entraînement

Quelques propositions de problèmes soustractifs.

1 - Bill a 150 billes.

50 billes sont rouges et les autres sont bleues.

Combien de billes sont bleues ?

2 - Lulu a 1 m de ruban.

La moitié de ce ruban est dorée, l'autre moitié est argentée.

Quelle est la longueur de ruban doré ?

3 - Claudine compose un litre de cocktail de jus de fruit.

Elle met 75 cl de jus d'orange et le reste en jus de poire.

Quelle quantité de jus de poire lui faut-il ?

4 - Manon a 50 € d'argent de poche donnés par ses parents et ses grands-parents.

Les parents ont donné 35 €.

Combien ont donné les grands-parents ?

5 - Mehdi a prévu de courir pendant 1 h 30 mn.

Il a déjà couru 45 mn.

Combien de temps lui reste-t-il à courir ?

6 - Georgette fait de la compote et de la confiture.

Elle a 5 kg de fruits.

Elle en utilise 1kg 250 pour la compote.

Quelle masse de fruits va-t-elle utiliser pour la confiture ?

7 - Pour un cours sur les capacités, le maître remplit une bouteille de 1 litre avec 45 centilitres de liquide bleu.

Quelle quantité de liquide manque-t-il pour remplir la bouteille ?

Remarque : Il est possible que certains élèves résolvent le problème avec une addition à trous plutôt qu'une soustraction.

8 - Ben a dépensé 45 €.

Il a acheté un pantalon à 15 € et une veste.

Quel est le prix de la veste ?

9 - Une camionnette chargée de colis pèse 1 tonne.

Sans ces colis, elle pèse 900 kg.

Combien pèsent les colis ?

10 - Une salle de spectacle a une capacité de 400 places.

Les $\frac{3}{4}$ sont occupées.

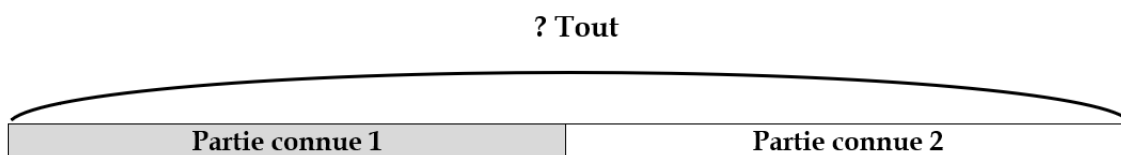
Combien reste-t-il de places vides ?

Remarque : Il est possible que certains élèves résolvent le problème avec une addition à trous plutôt qu'une soustraction.

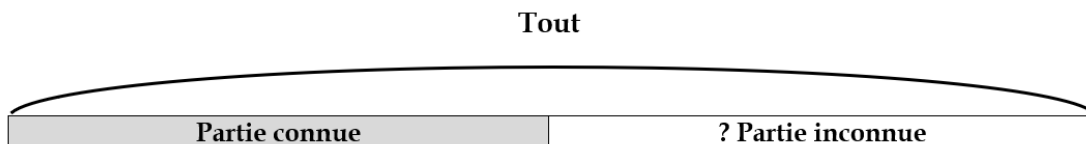
4. Institutionnalisation pour les problèmes additifs et soustractifs

On compare ensuite la première représentation et la deuxième représentation pour une généralisation.

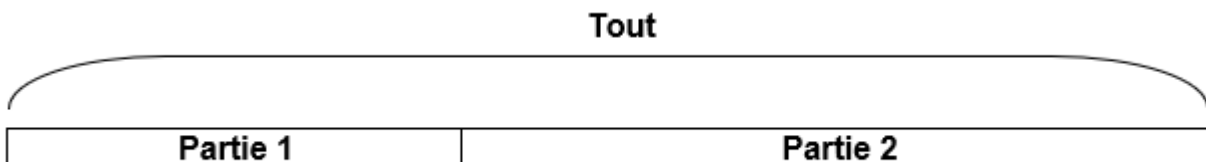
Première représentation



Deuxième représentation



On obtient la représentation suivante qui sera la référence pour les problèmes additifs et soustractifs et qu'on appellera représentation 1.



Opérations

Je connais les Parties et je cherche le Tout : je fais alors une addition.

$$\text{Partie 1} + \text{Partie 2} = \text{Tout}$$

Je connais le Tout et une Partie, et je cherche l'autre Partie : je fais alors une soustraction.

$$\text{Tout} - \text{Partie 1} = \text{Partie 2}$$

Cette représentation 1 sera affichée dans la classe comme référente d'une situation additive et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

5. Entraînement

Quelques propositions de problèmes additifs et soustractifs.

1 - Sans son cartable Lulu pèse 38 kg.
Avec son cartable, il pèse 42 kg.
Combien pèse son cartable ?

2 - Lulu pèse 35 kg.
Son cartable pèse 3 kg.
Combien pèse Lulu avec son cartable ?

3 - Chloé a une collection de 125 timbres français et de 45 timbres étrangers.
Combien a-t-elle de timbres ?

4 - Chloé a une collection de 200 timbres.
75 timbres sont sur les animaux, les autres timbres sont sur les plantes.
Combien a-t-elle de timbres sur les plantes ?

5 - Gaston a marché pendant 2 H 35 mn. Il a pris un goûter, puis il est reparti pendant 1 H 30 mn.
Combien de temps a-t-il marché ?

6 - Gaston a marché pendant 3 H.
Pendant 2 H 45 mn, il a marché en forêt et le reste du temps il a marché en ville.
Combien de temps a-t-il marché en ville ?

7 - Benjamin achète une raquette de tennis à 150 € et un sac de sport à 35 €.
Combien a-t-il dépensé ?

8 - Benjamin achète pour 160 € de matériel de sport.
Il a dépensé 120 € en vêtements de sport et le reste pour des baskets.
Combien ont coûté les baskets ?

9 - Dans sa potion magique une sorcière verse 75 cl de bave de crapaud et 25 cl de venin de serpent.
Quelle quantité de liquide a-t-elle versé ?

10 - Dans sa potion magique une sorcière utilise un récipient de 1 litre.
Elle verse 60 cl de venin de serpent et le reste en bave de crapaud.
Quelle quantité de bave de crapaud a-t-elle versé ?

11 - La durée habituelle du trajet de Paul pour aller au lycée en métro est de 45 minutes.
Aujourd'hui, il a mis 1 heure et 38 minutes à cause d'une panne de la locomotive.
Combien de temps a-t-il perdu dans le métro ?

12 - Une salle de cinéma a 100 places.
65 places sont occupées.
Combien reste-t-il de places libres ?

13 - Benoit a dépensé 250 €.

Il a acheté une combinaison de ski à 150 € et un casque.

Quel est le prix du casque ?

14 - Carole a 87 perles.

56 perles sont rouges, les autres sont bleues.

Combien Carole a-t-elle de perles bleues ?

15 - Lulu a 2 m de papier cadeau.

Elle en utilise 70 cm.

Combien lui en reste-t-il ?

16 - Bill fait une randonnée de 5 km.

Au bout de 3 km 250, il s'arrête.

Quelle distance lui reste-t-il à parcourir ?

17 - Lulu a 1 kg de farine.

Pour faire des crêpes, il en utilise 750 g.

Combien lui reste-t-il de farine ?

18 - Pour 2 litres d'un cocktail sans alcool, on a mis 10 cl de jus de citron, 80 cl de jus de poire et le reste de jus d'orange.

Quelle quantité de jus d'orange a-t-on mis ?

II - PROBLEMES DITS DE « COMPARAISON »

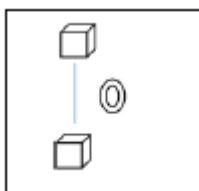
1. Préambule : de quoi s'agit-il ?

On a deux grandeurs, on compare ces deux grandeurs ; c'est un problème statique, il n'y a pas de temporalité, les deux grandeurs se présentent simultanément, avec une mesure plus grande, une mesure plus petite et un écart entre les deux.

Ce sont des problèmes où interviennent les expressions « en plus », « en moins », « de plus », « de moins »...

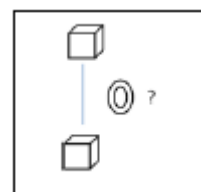
Dans les premières publications de G. Vergnaud¹⁰, cette catégorie n'apparaît pas. En fait ces situations s'apparentent aux situations de transformation avec deux états et une transformation fictive permettant de passer d'une grandeur à l'autre, mais la dimension temporelle, un changement d'état avec le temps, n'intervient pas.

Voici la représentation schématique de problèmes de comparaison que l'on trouve dans des publications ultérieures¹¹:

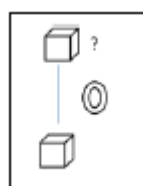


La représentation « verticale », signifie que les deux grandeurs que l'on compare sont simultanément présentes.

- on connaît la mesure de ces deux grandeurs et on veut connaître l'écart entre ces deux grandeurs. On peut demander quelle est la mesure de la grandeur qu'il faut ajouter à la plus petite pour avoir une grandeur égale à la plus grande, ou quelle est la mesure de la grandeur qu'il faut retirer à la plus grande pour avoir une grandeur égale à la plus petite.



- on connaît la mesure de l'écart entre deux grandeurs et la mesure de l'une d'entre elles, on veut connaître la mesure de l'autre grandeur.



ou



On a deux types de problèmes suivant que la mesure connue est celle de la plus petite grandeur

(Mesure la plus petite + Mesure de l'écart = Mesure la plus grande) ou celle de la plus grande (Mesure la plus grande - Mesure de l'écart = Mesure la plus petite).

¹⁰ G. Vergnaud, 1976 op. cit.

¹¹ Brégeon (JL.), Huguet (F.), Péault (H.), Dossat (L.), Myx (A.) sous la direction de Vergnaud (G.), 1997 op. cit.

2. Recherche de la comparaison ou écart

2.1 Recherche de comparaison : Premier problème

Hervé possède 185 billes. Betty possède 123 billes.

Combien Betty a-t-elle de billes en moins ?

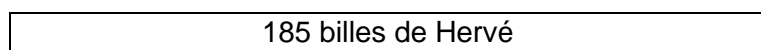
Représentation

Nous allons représenter ce problème au tableau avec des barres. Il s'agit d'une nouvelle représentation.

Le PE lit le problème et dessine la représentation au tableau au fur et à mesure.

Hervé a 185 billes en tout. On peut les représenter par une barre.

Le PE dessine au tableau la barre et indique le nombre de billes.



Betty a 123 billes en tout.

Ce ne sont pas les mêmes que celles d'Hervé.

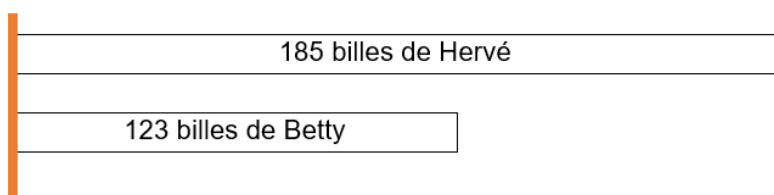
On va donc les représenter par une autre barre.

On fait démarrer les barres au même endroit parce qu'on va les comparer. On va tracer un trait rouge vertical à gauche pour montrer que les deux barres démarrent bien au même endroit.

Comme Betty a moins de billes qu'Hervé, 123 est plus petit que 185, on va faire une barre plus courte pour montrer que Betty a moins de billes.

Remarque : Il faut bien fixer l'idée que c'est Hervé qui a la quantité de billes la plus grande et que c'est Betty qui a la quantité de billes la plus petite.

Le PE complète la représentation.



Pour représenter l'écart entre le nombre de billes d'Hervé et le nombre de billes de Betty, on va tracer une double flèche.

La double flèche représente les billes que Betty ne possède pas.

Elle représente le nombre de billes que Betty a en moins.

Elle représente ce qu'il faudrait donner à Betty pour qu'elle ait autant de billes qu'Hervé.

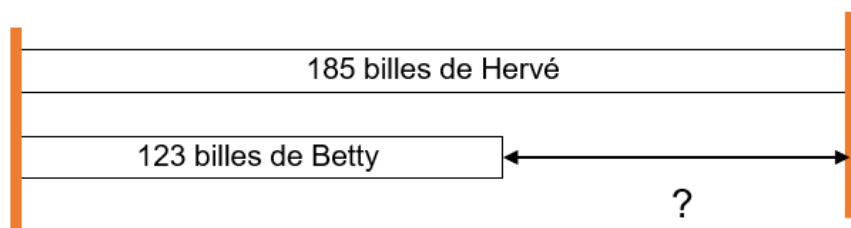
Comme on ne connaît pas cette mesure, on met un point d'interrogation.

Cette double flèche touche la barre la plus courte et arrive au même endroit que la barre la plus longue. Pour les faire arriver au même endroit, on met un deuxième trait vertical à droite.

Le trait rouge vertical de droite montre qu'en calculant l'écart, on arrive au même endroit.

Remarque : Les deux traits rouges permettent de représenter la bonne longueur de la double flèche.

Le PE termine la représentation.



Prélèvement des informations

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il liste les informations avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Nombre de billes d'Hervé : 185 billes

Nombre de billes de Betty : 123 billes

Ecart : ? billes

Résolution du problème

Comment répondre à la question « Combien de billes Betty a-t-elle en moins » ?

Pour trouver le nombre de billes que Betty a en moins il faut calculer l'écart entre le nombre de billes que Betty possède et le nombre de billes qu'Hervé possède. Pour cela, on peut faire une soustraction.

$$185 - 123 = 62$$

Betty possède 62 billes en moins.

On peut faire aussi une addition à trou.

$$123 + \dots ? \dots = 185$$

Remarque : Cette façon de calculer permet de valider la mise en place des deux barres rouges.

La représentation de $123 + ?$ est de même longueur que la représentation de 185.

2.2 Recherche de comparaison : Deuxième problème

Hervé possède 185 billes. Betty possède 123 billes.

Combien Hervé a-t-il de billes en plus ?

Il s'agit du même problème, seule la question change : les élèves l'auront remarqué, sinon le signaler.

Nous faisons ici le choix de recommencer la démonstration de la représentation pour bien fixer les idées des élèves, surtout les plus fragiles.

Nous allons commencer cette fois-ci par la prise de informations car elle sert à faire la représentation et il est donc logique de commencer par celle-ci.

Prélèvement des informations

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il liste les informations avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Nombre de billes d'Hervé : 185 billes

Nombre de billes de Betty : 123 billes

Ecart : ? billes

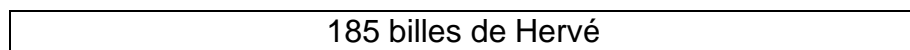
Représentation

Nous allons représenter ce problème au tableau avec des barres.

Le PE lit le problème et dessine la représentation au tableau au fur et à mesure.

Hervé a 185 billes en tout. On peut les représenter par une barre.

Le PE dessine au tableau la barre et indique le nombre de billes.

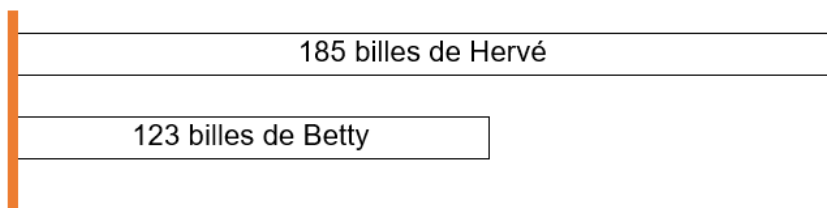


Betty a 123 billes en tout. Ce ne sont pas les mêmes que celles d'Hervé. On va donc les représenter par une autre barre.

On fait démarrer les barres au même endroit parce qu'on va les comparer. On va tracer un trait rouge vertical à gauche pour montrer que les deux barres démarrent bien au même endroit.

Comme Betty a moins de billes qu'Hervé, 123 est plus petit que 185, on va faire une barre plus courte pour montrer que Betty a moins de billes.

Le PE complète la représentation.

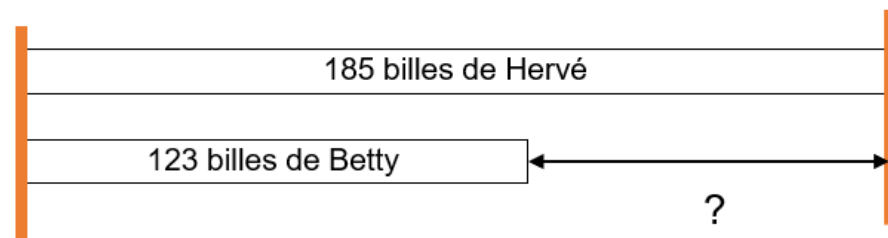


Pour représenter l'écart entre le nombre de billes d'Hervé et le nombre de billes de Betty, on va tracer une double flèche. La double flèche représente les billes que Betty ne possède pas. Elle représente le nombre de billes que Hervé a en plus. Comme on ne connaît pas cette mesure, on met un point d'interrogation.

Cette double flèche touche la barre la plus courte et arrive au même endroit que la barre la plus longue. Pour les faire arriver au même endroit, on met un deuxième trait vertical à droite.

Le trait rouge vertical de droite montre qu'en calculant l'écart, on arrive au même endroit.

Le PE termine la représentation.



Le PE ou un élève remarque que la représentation est identique à la précédente.

Résolution du problème

Comment répondre à la question « Combien de billes Hervé a-t-il en plus » ?

Pour trouver le nombre de billes que Hervé a en plus, il faut calculer l'écart entre le nombre de billes que Betty possède et le nombre de billes qu'Hervé possède. Pour cela, on peut faire une soustraction.

$$185 - 123 = 62$$

Hervé possède 62 billes en plus.

On peut faire aussi une addition à trou.

$$123 + \dots ? \dots = 185$$

Remarque : Cette façon de calculer permet de valider la mise en place des deux barres rouges.

2.3 Institutionnalisation

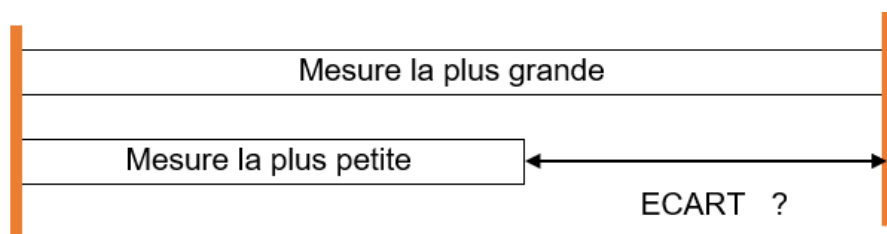
Le PE conduit les élèves à généraliser la représentation.

On obtient une première représentation avec le prélèvement des informations et le schéma.

Mesure la plus grande

Mesure la plus petite

Ecart inconnu ?



Pour trouver la mesure de l'écart, on soustrait la mesure la plus petite à la mesure la plus grande.

$$\text{Mesure la plus grande} - \text{Mesure la plus petite} = \text{ECART}$$

Afin d'aider les élèves à choisir entre un problème de comparaison d'état et un problème d'écart, on peut faire une affiche qu'on peut appeler « Vocabulaire pour les problèmes de comparaison » et sur laquelle on écrira les mots qui aident à comprendre qu'il s'agit d'un problème d'écart au fur et à mesure qu'on les rencontrera. On notera sur cette affiche « en plus » et « en moins ».

3. Recherche de l'un des états

3.1 Recherche de la Mesure la plus petite

La différence d'âge entre Catherine et son papa est de 29 ans.

Son père a 48 ans, quel est l'âge de Catherine ?

Prélèvement des informations

Le PE interroge les élèves et au fur et à mesure, il écrit au tableau les informations.

Quel est la mesure la plus grande ?

C'est l'âge du papa de Catherine. C'est 48 ans.

Le PE écrit au tableau :

Mesure la plus grande : 48 ans

Quel est la mesure la plus petite ?

C'est l'âge de Catherine. On ne le connaît pas. On met un point d'interrogation.

Le PE écrit au tableau :

Mesure la plus petite : ? ans

Quel est l'écart entre l'âge du papa de Catherine et l'âge de Catherine ?

C'est 29 ans.

Le PE écrit au tableau :

Ecart : 29 ans

On obtient sur le tableau :

Mesure la plus grande : 48 ans

Mesure la plus petite : ? ans

Ecart : 29 ans

Représentation

Nous faisons ici le choix de recommencer la démonstration de la représentation pour bien fixer les idées des élèves, surtout les plus fragiles.

Nous allons représenter ce problème au tableau avec des barres. Il s'agit ici de la représentation avec un écart.

Le PE lit le prélèvement des informations et dessine la représentation au tableau au fur et à mesure.

Nous allons d'abord représenter la mesure la plus grande.

Mesure la plus grande : 48 ans

Le PE dessine au tableau la barre et indique l'âge.

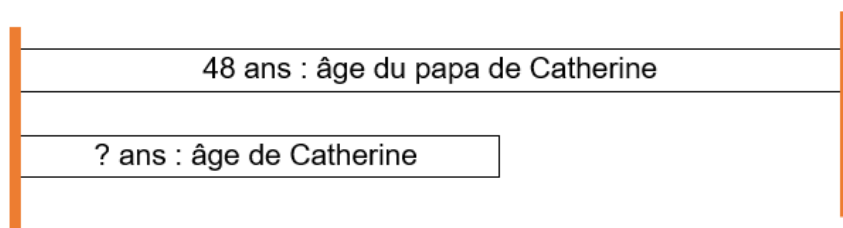
48 ans : âge du papa de Catherine

Le PE complète la représentation.

Nous allons maintenant représenter la mesure la plus petite.

Mesure la plus petite : ? ans

Comme nous ne le connaissons pas, nous mettons un point d'interrogation.

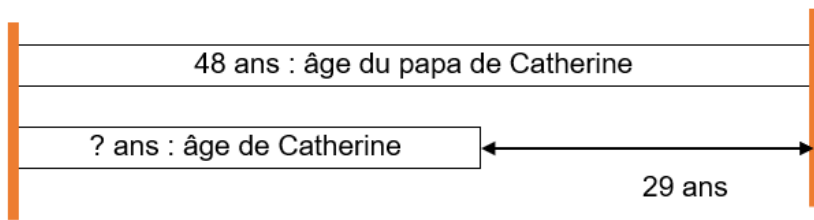


Le PE termine la représentation.

Nous allons maintenant représenter l'écart entre la mesure la plus grande et la mesure la plus petite.

Ecart : 29 ans

On le connaît. Il est de 29 ans.



On obtient cette représentation au tableau.

On ajoute « la différence » sur l’affiche « vocabulaire pour les problèmes de comparaison ».

Résolution du problème

Comment répondre à la question « Quel est l’âge de Catherine si son père a 48 ans » ?

Pour trouver l’âge de Catherine, on peut faire une soustraction. On enlève l’écart à l’âge du papa de Catherine.

$$48 - 29 = 19.$$

Catherine a 19 ans.

On peut faire aussi une addition à trou.

$$29 + \dots ? \dots = 48$$

3.2 Recherche de la Mesure la plus grande

Un VTT coûte 189 € à Sportmarché et 25 € de plus à Athonsport.

Quel est le prix du VTT à Athonsport ?

Prélèvement des informations

Le PE interroge les élèves et au fur et à mesure, il écrit au tableau les informations.

Quelle est la Mesure la plus grande ? Dans quel magasin le VTT coûte-t-il le plus cher ?

C’est à Athonsport qu’il coûte le plus cher. On ne connaît pas son prix.

Le PE écrit au tableau :

Mesure la plus grande : prix du VTT à Athonsport : ? €

Quel est la Mesure la plus petite ?

C’est le prix du VTT à Sportmarché. C’est 189 €.

Le PE écrit au tableau :

Mesure la plus petite : prix du VTT à Sportmarché : 189 €.

Quel est l’écart entre les deux prix ?

C’est 25 €.

Le PE écrit au tableau :

Ecart : 25 €

On obtient sur le tableau :

Mesure la plus grande : prix du VTT à Athonsport : ? €

Mesure la plus petite : prix du VTT à Sportmarché : 189 €.

Ecart : 25 €

Représentation

Nous allons représenter ce problème au tableau avec des barres. Il s'agit ici de la représentation avec un écart.

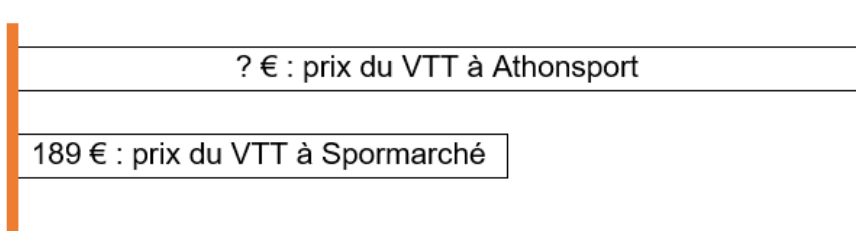
Le PE lit le prélèvement des données et dessine la représentation au tableau au fur et à mesure.

Nous allons d'abord représenter la Mesure la plus grande. On ne la connaît pas. C'est le prix du VTT à Athonsport. Comme on ne la connaît pas, on met un point d'interrogation.

Le PE dessine au tableau la barre.

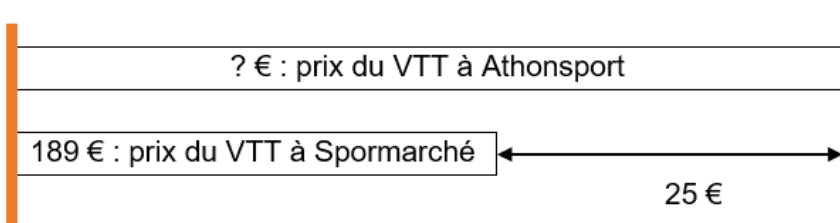


Nous allons maintenant représenter la Mesure la plus petite. Il s'agit du prix du VTT à Sportmarché : 189€.



Le PE termine la représentation.

Nous allons maintenant représenter l'écart de 25 € entre la Mesure la plus grande et la Mesure la plus petite.



On obtient cette représentation au tableau.

On ajoute « de plus » sur l'affiche « vocabulaire pour les problèmes de comparaison ».

Résolution du problème

Comment répondre à la question « Quel est le prix du VTT à Athonsport ? ».

Pour trouver le prix du VTT à Athonsport, on peut faire une addition.

$$189 + 25 = 214$$

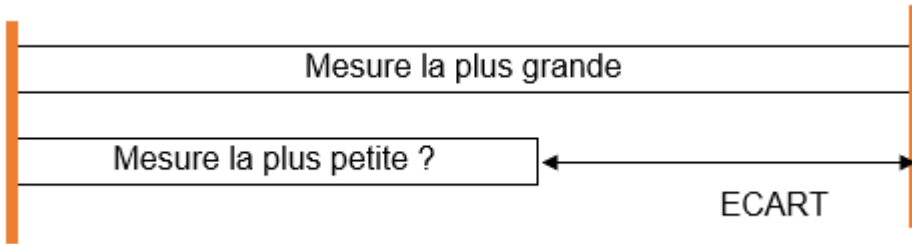
Le VTT à Athonsport coûte 214 €.

3.3 Institutionnalisation

On reprend la première représentation pour laquelle on avait l'écart inconnu et on voit qu'on peut avoir aussi la Mesure la plus petite inconnue ou la Mesure la plus grande inconnue.

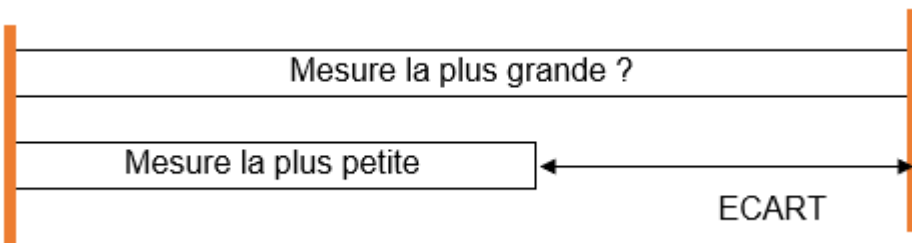
On obtient alors les deux autres représentations suivantes.

Je connais la Mesure la plus grande et l'écart et je cherche la Mesure la plus petite.



Mesure la plus grande - ECART = Mesure la plus petite

Je connais la Mesure la plus petite et l'écart et je cherche la Mesure la plus grande.

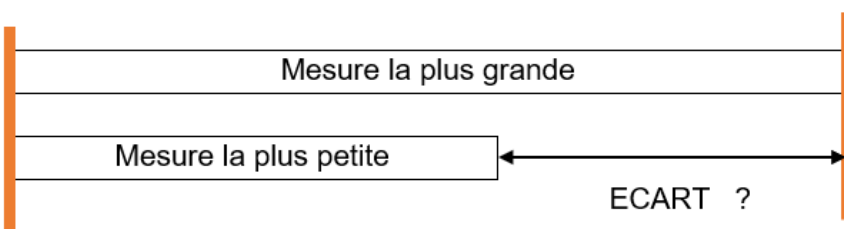


Mesure la plus petite + ECART = Mesure la plus grande

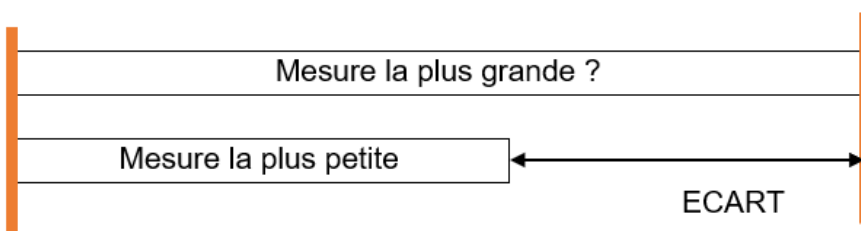
4. Institutionnalisation pour les problèmes de comparaison

On compare les trois représentations obtenues.

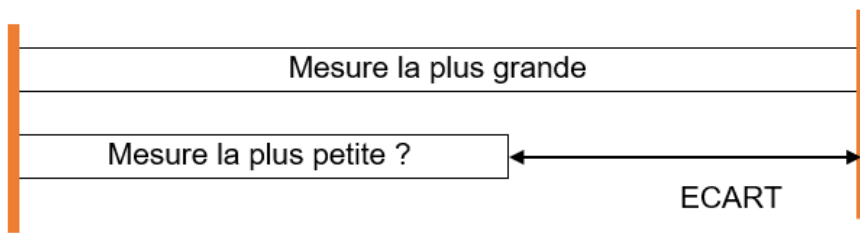
Représentation 3A



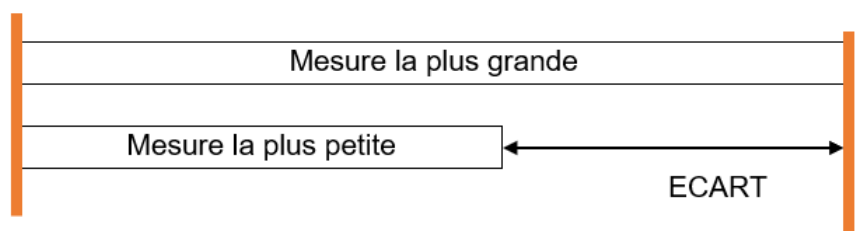
Représentation 3 B



Représentation 3 C



On obtient la représentation suivante qui sera la référence pour les problèmes de comparaison et qu'on appellera Représentation 2.



Remarques :

Chaque barre représente la mesure d'une grandeur qui existe dans la situation proposée, cela peut être montré avec des cubes.

On voit bien alors que l'écart, lui, est juste une valeur mathématique qui permet la comparaison.

Il est à noter que grande mesure, petite mesure et écart sont dans la même unité de mesure.

Opérations

1 Je connais la Mesure la plus grande, la Mesure la plus petite et je cherche l'ECART. Je fais une soustraction.

Mesure la plus grande - Mesure la plus petite = ECART

2 Je connais la Mesure la plus petite et l'ECART et je cherche la Mesure la plus grande. Je fais une addition.

Mesure la plus petite + ECART = Mesure la plus grande

3 Je connais la Mesure la plus grande et l'ECART et je cherche la Mesure la plus petite. Je fais une soustraction.

Mesure la plus grande - ECART = Mesure la plus petite

Cette représentation 2 sera affichée dans la classe comme référente d'une situation additive et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

Elle rejoindra l'affiche « vocabulaire pour les problèmes de comparaison » qu'on complétera au fur et à mesure qu'on rencontrera de nouveaux mots dans les problèmes.

5. Entraînement

Quelques propositions de problèmes de comparaison.

1 - Jean a 153 billes.

Joe a 43 billes.

Combien Jean a-t-il de billes en plus ?

2 - Pierre a 142 timbres de collection.

Il en possède 31 de plus que Sophie.

Combien Sophie a-t-elle de timbres ?

3 - Lucie a 25 € d'argent de poche.

Elle en a 15 € de moins que son cousin Karl.

Combien d'argent de poche possède Karl ?

4 - Samuel a 28 ans de moins que sa mère.

Il fête aujourd'hui ses 15 ans.

Quel âge a la mère de Samuel ?

5 - Jean a 16 ans.

Sa maman a 57 ans.

A quel âge la maman a-t-elle donné naissance à Jean ?

6 - Dans le club omnisport de la ville, il y a 85 basketteurs.

Ils sont 23 de moins que les footballeurs.

Combien y-a-t-il de footballeurs ?

7 - Dans un magasin, un jouet vaut 35 €.

Dans un autre magasin, il vaut 47 €.

De combien est-il plus cher ?

8 - Chez Jouerbien, un camion vaut 53 €.

Chez Jouetclass, on fait des réductions et le même camion vaut 37 €.

Quelle est le montant de la réduction faite par Jouetclass ?

9 - La différence d'âge entre Catherine et son père est de 28 ans.

Quel est l'âge de Catherine si son père a 49 ans ?

10 - Pour un parcours chronométré, Bill met 2 h 35 mn et Annette met 1h 20 mn.

Quelle est la différence de temps entre Bill et Annette ?

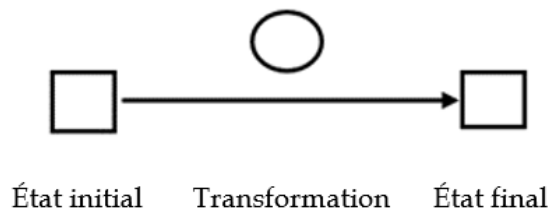
III - PROBLEMES DITS DE « TRANSFORMATION D'ETAT ».

1. Préambule : de quoi s'agit-il ?

On a une grandeur (grandeur initiale), on « agit » sur cette grandeur pour obtenir une autre grandeur (grandeur finale), par un ajout ou un retrait d'une grandeur (on parle de transformation de la grandeur initiale pour obtenir la grandeur finale).

Le déroulement temporel intervient.

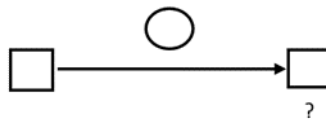
Voici la représentation schématique des problèmes de transformation d'états donnée par G. Vergnaud¹² :



La représentation horizontale signifie que l'état d'une même grandeur (la grandeur initiale) est modifié dans le temps.

On rencontre six types de problèmes :

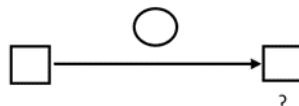
- a) On connaît la mesure de la grandeur initiale, on lui ajoute une grandeur dont on connaît la mesure, (« agir » ici signifie réunir, c'est la transformation qu'on dit positive), on cherche la mesure de la grandeur finale, la résolution nécessite une addition.



Exemple :

**Nathan a 75 billes. Son copain lui donne 14 billes.
Combien Nathan a-t-il de billes ?**

- b) On connaît la mesure de la grandeur initiale, on lui retire une grandeur dont on connaît la mesure, (« agir » ici signifie retirer, c'est la transformation qu'on dit négative), on cherche la mesure de la grandeur finale, la résolution nécessite une soustraction.

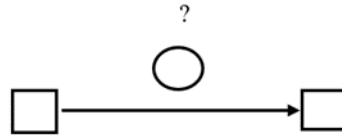


Exemple :

**La maman de Manon part faire les courses avec 90 euros dans son porte-monnaie.
Elle dépense 67 euros.
Combien lui reste-t-il dans son porte-monnaie ?**

¹² G. Vergnaud, 1976, op.cit.

- c) On connaît les mesures des grandeurs initiale et finale, on obtient la grandeur finale en ajoutant à la grandeur initiale une troisième grandeur, on cherche la mesure de cette troisième grandeur, la résolution nécessite une soustraction ou une recherche du complément par addition.



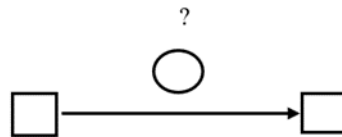
Exemple :

Dans sa tirelire, Manon a déjà 60 euros.

Sa grand-mère lui donne de l'argent. Maintenant, elle a 96 euros.

Combien d'argent sa grand-mère lui a-t-elle donné ?

- d) On connaît les mesures des grandeurs initiale et finale, on obtient la grandeur finale en retirant à la grandeur initiale une troisième grandeur, on cherche la mesure de cette troisième grandeur, la résolution nécessite une soustraction.



Exemple :

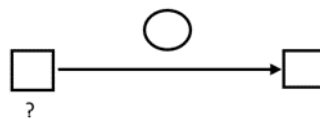
Nathan est venu à l'école avec 49 billes.

A la récréation, il a perdu des billes.

Maintenant, il a 34 billes.

Combien de billes Nathan a-t-il perdu ?

- e) On connaît la mesure de la grandeur finale et la mesure d'une grandeur qu'on ajoute à la grandeur initiale pour obtenir la grandeur finale, on cherche la mesure de la grandeur initiale, la résolution nécessite une soustraction.



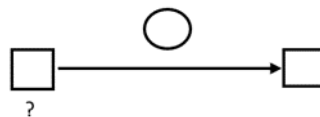
Exemple :

J'ajoute 27 bonbons dans la boîte.

Maintenant j'en ai 109.

Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?

- f) On connaît la mesure de la grandeur finale et la mesure d'une grandeur qu'on retire à la grandeur initiale pour obtenir la grandeur finale, on cherche la mesure de la grandeur initiale, la résolution nécessite une addition.



Exemple :

A la récréation, Nathan a perdu 27 billes. Maintenant, il a 51 billes.

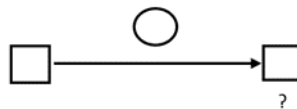
Combien de billes Nathan avait-il avant la récréation ?

2. Proposition de résolution

Tous ces problèmes sont traités comme des problèmes de « composition d'état ».

Il y sera rajouté un marqueur temporel \bigcirc pour indiquer le changement d'état avec le temps.

2.1 Recherche de l'état final et résolution par une addition



Exemple :

Nathan a 75 billes. Son copain lui donne 14 billes.

Combien Nathan a-t-il de billes ?

Voici comment Eva, en CM2 a résolu ce problème en utilisant la représentation en barres.

Information
Tout ? billes
Partie 1 75 billes
Partie 2 14 billes

Représentation ?

75	14
----	----

Opération

$$\begin{array}{r} 75 \\ + 14 \\ \hline 89 \end{array}$$

Réponse
Nathan a 89 billes.

Le PE fait remarquer que bien que ce problème ait été résolu comme les problèmes de composition d'état avec le schéma 1, il y a une petite différence. Il se déroule dans le temps.

Avant Nathan avait 75 billes, maintenant il en a 89.

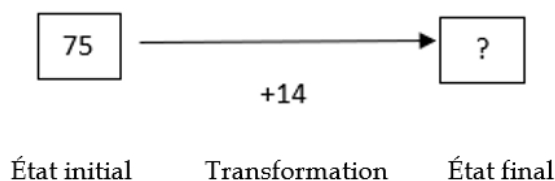
Un élève propose qu'on ajoute le mot « maintenant » dans la phrase réponse.

Après discussion, et pour faire simple, une flèche est rajoutée en dessous de la représentation.

Elle représente le temps qui s'écoule comme pour une frise historique.

Ainsi, les problèmes de transformation s'accompagneront d'une marque temporelle symbolisant le temps et montrant que les deux états (initial et final) pris en compte ne sont pas simultanément présents.

Toutefois, on peut proposer aussi une représentation plus spécifique aux élèves et qui se rapproche de la représentation de Vergnaud.

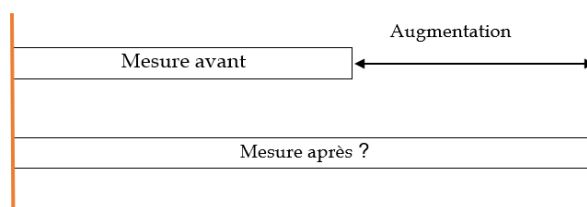


L'état initial et l'état final sont symbolisés par des carrés. La flèche représente la transformation et montre que le problème se déroule dans le temps. Toutefois, la représentation en barres peut s'inscrire dans la progression adoptée, comme le montre les productions des élèves.

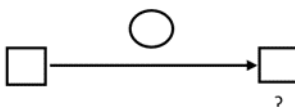
Le signe opératoire montre que la transformation est positive.

L'opération nécessaire pour résoudre le problème est une addition.

Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹³.



2.2 Recherche de l'état initial et résolution par une soustraction



Exemple :

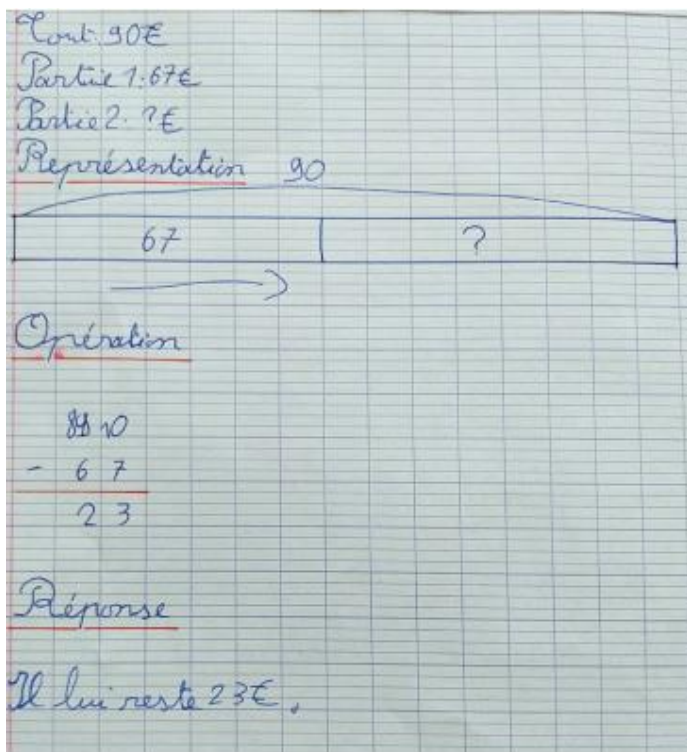
La maman de Manon part faire les courses avec 90 euros dans son porte-monnaie.

Elle dépense 67 euros.

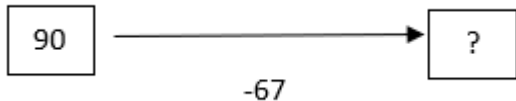
Combien lui reste-t-il dans son porte-monnaie ?

¹³ Cabassut R. *Les représentations en barre* : « ni cet excès d'honneur, ni cet indignité », in *Au fil des maths*, N°537 Opinions, 1^{er} trimestre 2022, p. 4

Voici comment Lucas, en CM2 a résolu ce problème en utilisant la représentation en barres.

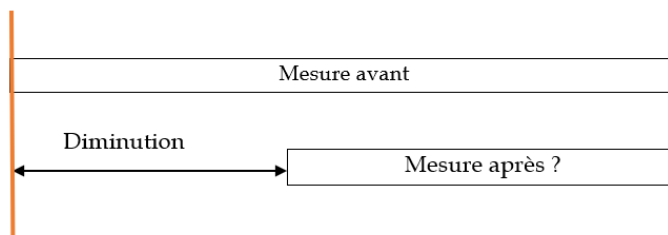


On peut aussi proposer cette représentation.



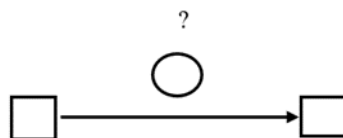
Cette fois-ci, la transformation est négative et l'opération est une soustraction.

Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹⁴.



¹⁴ Ibid.

2.3 Recherche de la transformation : l'état final est plus grand que l'état initial



Exemple :

Dans sa tirelire, Manon a déjà 60 euros.

Sa grand-mère lui donne de l'argent. Maintenant, elle a 96 euros.

Combien d'argent sa grand-mère lui a-t-elle donné ?

Voici comment Thibault, en CM2 a résolu ce problème en utilisant la représentation en barres.

Informations
Total: 96€
Partie 1: 60€
Partie 2: ?€
Représentation

96

60 ?

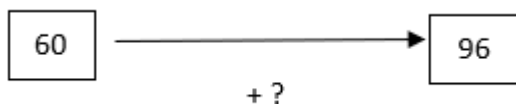
Opération

96
-60

36

Réponse
La grand-mère lui a offert 36€.

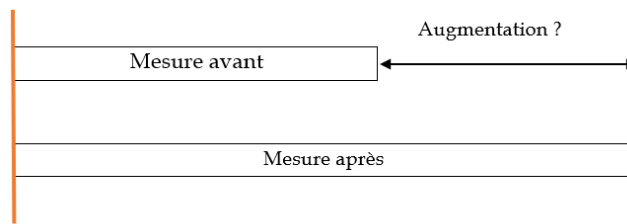
On peut aussi proposer cette représentation.



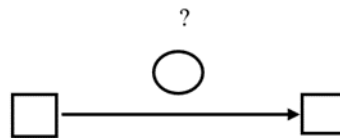
Cette fois-ci, on ne connaît pas la transformation mais on sait qu'elle est positive puisque la grand-mère donne de l'argent.

Pour trouver l'opération, il faut faire l'état final moins l'état initial c'est-à-dire une soustraction bien que la transformation soit positive.

Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹⁵.



2.4 Recherche de la transformation : l'état final est plus petit que l'état initial



Exemple :

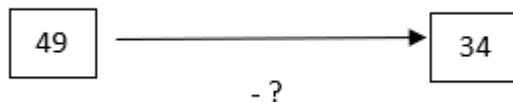
Nathan est venu à l'école avec 49 billes.

A la récréation, il a perdu des billes.

Maintenant, il a 34 billes.

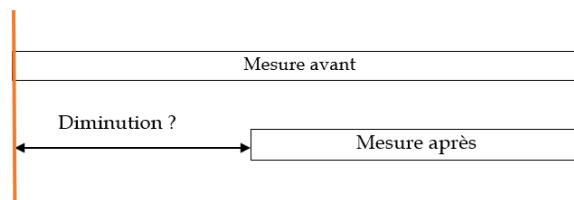
Combien de billes Nathan a-t-il perdues ?

Cette représentation est proposée aux élèves



On ne connaît pas la transformation mais on sait qu'elle est négative puisque Nathan a perdu des billes. Pour trouver l'opération, il faut faire l'état initial moins l'état final c'est-à-dire une soustraction.

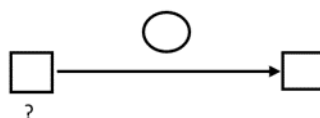
Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹⁶.



¹⁵ Ibid.

¹⁶ Ibid.

2.5 Recherche de l'état initial et transformation positive



Exemple :

J'ajoute 27 bonbons dans la boîte.

Maintenant j'en ai 109.

Combien la boîte contenait-elle déjà de bonbons ?

Voici comment Julia, en CM2 a résolu ce problème.

Information

Tout: 109 bonbons

Partie 1: ? bonbons

Partie 2: 27 bonbons

Représentation

109

? 27

Opération

$$\begin{array}{r} 109 \\ - 27 \\ \hline 82 \end{array}$$

Réponse

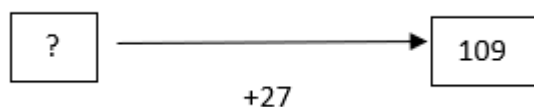
La boîte contenait 82 bonbons. ✓

Remarque :

Etant donné que l'état initial est inconnu, il est logique de mettre le point d'interrogation dans la première case.

Certains élèves ont inversé le point d'interrogation et 27. Cette inversion ne peut être considérée comme une erreur et n'empêche pas de résoudre le problème.

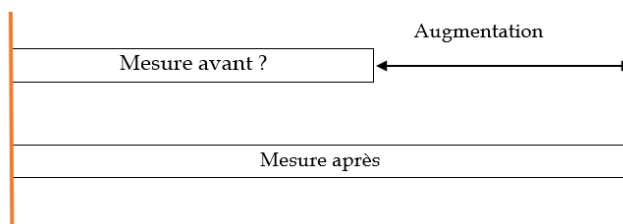
Cette autre représentation est proposée aux élèves.



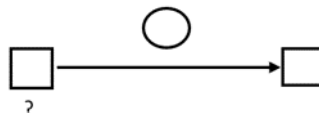
On ne connaît pas l'état initial mais on connaît l'état final et la transformation qui est positive puisqu'on ajoute des bonbons dans la boîte.

Pour trouver l'opération, il faut faire l'état final moins la transformation c'est-à-dire une soustraction.

Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹⁷.



2.6 Recherche de l'état initial et transformation négative

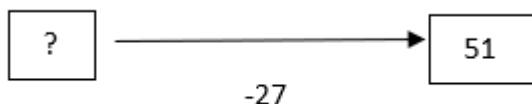


Exemple :

A la récréation, Nathan a perdu 27 billes. Maintenant, il a 51 billes.

Combien de billes Nathan avait-il avant la récréation ?

Cette représentation est proposée aux élèves.



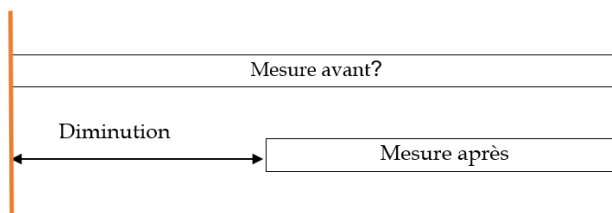
On ne connaît pas l'état initial mais on connaît l'état final et la transformation qui est négative puisque Nathan a perdu des billes.

Pour trouver l'opération, il faut faire l'état final plus la transformation c'est-à-dire une addition.

Remarque pour le PE :

Chaque fois qu'on remonte dans le temps pour chercher l'état initial, le calcul sera d'un signe inverse de celui de la transformation.

Il est possible aussi d'utiliser les représentations proposées par Richard Cabassut¹⁸.



¹⁷ Ibid.

¹⁸ Ibid.

3. Quelques problèmes particuliers

Certains problèmes de transformation présentent un déplacement dans le temps mais aussi un déplacement dans l'espace comme les problèmes d'ascenseur ou de déplacement sur des cases.

Voici quelques exemples.

3.1 Problèmes d'ascenseur

Problème 1 :

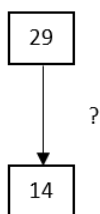
M. Durand travaille au 29^{ème} étage d'une tour. Il va voir un ami qui travaille au 14^{ème} étage.

De combien d'étages doit-il descendre ?

On peut proposer la représentation ci-dessous aux élèves pour résoudre ce problème. Elle ressemble beaucoup à la représentation de Vergnaud et elle a été proposée par un élève de CM2.

La représentation est verticale comme la montée ou la descente en ascenseur.

Les cases représentent l'état initial et l'état final et la flèche représente la transformation. Le sens de la flèche indique le sens de déplacement de l'ascenseur.



Pour résoudre ce problème, les élèves feront une soustraction. $29 - 14 = 15$

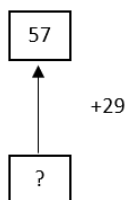
On pourra leur faire remarquer que le nombre le plus petit se trouvera toujours en bas.

Problème 2 :

M. Durand travaille dans une tour. Il sort de son bureau et monte de 29 étages pour porter un document au 57^{ème} étage.

A quel étage est son bureau ?

Quand on connaît la transformation, on indique si elle est positive (l'ascenseur monte) ou négative (l'ascenseur descend).



Pour résoudre ce problème, les élèves feront une addition à trou ($? + 29 = 57$)

ou une soustraction ($57 - 29 = ?$).

3.2 Déplacement sur des cases

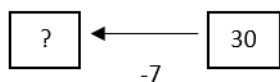
Problème 1

Chloé joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 30. Elle doit reculer de 7 cases.

Sur quelle case va-t-elle arriver ?

On peut utiliser le même genre de représentation que pour les problèmes d'ascenseur mais cette fois-ci en horizontal.

Les deux cases représentent l'état initial et l'état final et la flèche représente le sens du déplacement. Si on recule, l'opérateur sera négatif. Si on avance, l'opérateur sera positif.

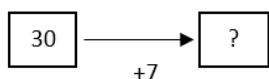


Pour résoudre ce problème, les élèves feront une soustraction : $30 - 7 = ?$.

Problème 2

Chloé joue au jeu de l'oie. Elle est sur la case 30. Elle doit avancer de 7 cases.

Sur quelle case va-t-elle arriver ?



Pour résoudre ce problème, les élèves feront addition : $30 + 7 = ?$.

IV - PROBLEMES A DEUX ETAPES

1. Définition

Qu'est-ce qu'un problème à deux étapes ?

C'est un problème à deux calculs. On a un premier calcul qui permet de trouver un premier résultat.

On se sert de ce résultat pour le deuxième calcul.

Le résultat du deuxième calcul permet de répondre à la question qui est posée.

Il faut donc d'abord se demander quelle information manque pour répondre à la question posée.

La recherche du résultat de cette information se fera par le premier calcul.

1.1 Exemple

Une bouteille de jus de pomme coûte 2 € 50.

Une bouteille de jus d'orange coûte 3 € 50.

Julien a 4 €.

Combien doit-il avoir en plus pour acheter ces deux bouteilles ?

« *Quelle information manque-t-il ?* »

Il manque le prix des deux bouteilles, donc un Tout.

Quand la mesure du Tout sera calculée, il sera possible de calculer l'écart qui manque, ce qui permettra d'acheter les deux bouteilles.

On se sert du premier résultat de l'étape 1 dans le deuxième calcul de l'étape 2.

Etape 1 : $2 \text{ € } 50 + 3 \text{ € } 50 = 6 \text{ €}$

Etape 2 : $4 \text{ €} + ? \text{ €} = 6 \text{ €}$ ou $6 \text{ €} - 4 \text{ €} = 2 \text{ €}$

Pour représenter ce problème, on peut utiliser deux représentations ce qui est plus facile à mettre en place, ou une seule.

1.2 Mise en œuvre 1

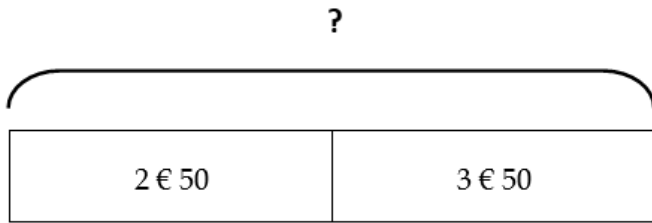
On construit les deux représentations au fur et à mesure de la lecture de l'énoncé du problème.

Une bouteille de jus de pomme coûte 2 € 50.

Une bouteille de jus d'orange coûte 3 € 50.

On a deux Parties qui forment un Tout.

C'est ce que l'on cherche : le prix des deux bouteilles de jus de fruit.



Dans un premier temps, on calcule le prix de ces deux bouteilles.

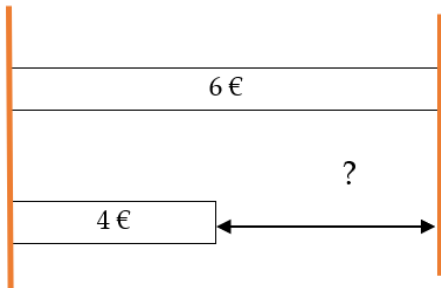
$$2\text{€}50 + 3\text{€}50 = 6 \text{ €}$$

Julien a 4 €.

Combien doit-il avoir en plus pour acheter ces deux bouteilles ?

En plus indique un écart.

On indique la Grande mesure, ce que Julien va dépenser pour acheter les jus de fruits, la Petite mesure, l'argent que Julien possède et l'Ecart, ce qui lui manque.



Dans un deuxième temps, on calcule l'Ecart entre le prix des jus de fruits et ce que possède Julien :

$$6 - 4 = 2.$$

Il manque 2 € à Julien.

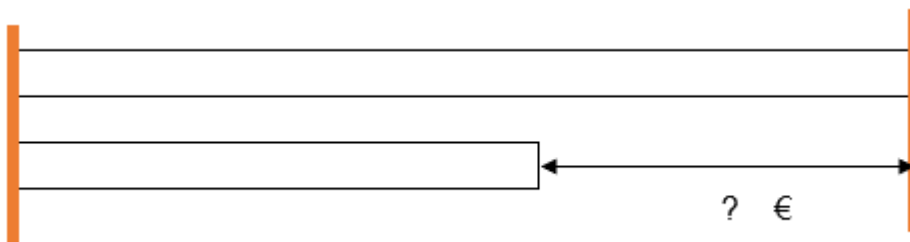
1.3 Mise en œuvre 2

On construit une représentation globale qui fait apparaître la question finale et la mesure manquante pour arriver à la résoudre.

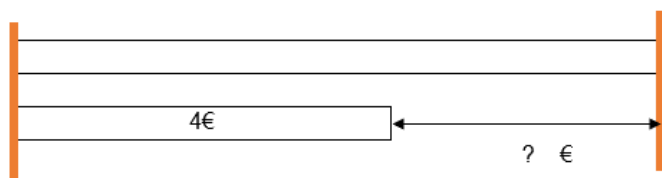
L'intérêt est d'avoir une représentation globale du problème.

Pour construire cette représentation globale, on commence par la fin du problème c'est-à-dire la question : Combien doit-il avoir en plus pour acheter ces deux bouteilles ?

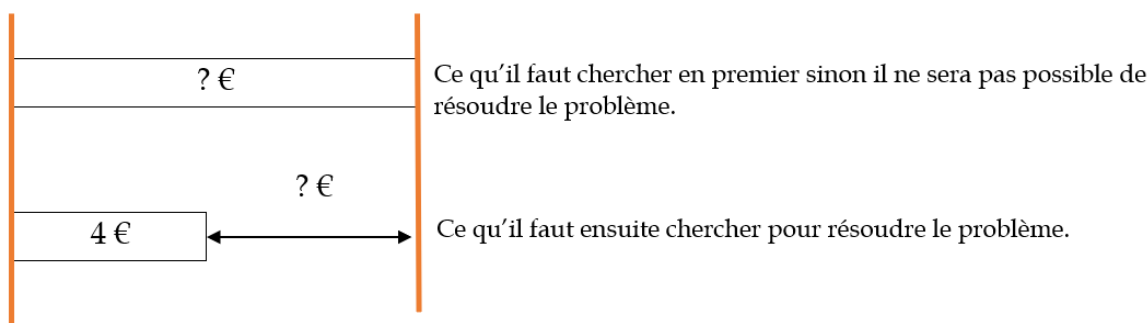
Avec l'expression en plus on voit qu'il s'agit d'un problème d'Ecart. On trace la représentation d'un problème d'Ecart dont on cherche l'Ecart.



Ensuite on rajoute la mesure que l'on connaît, les 4 € que possède Julien. Il s'agit de la Petite mesure puisque Julien doit avoir de l'argent en plus pour acheter les jus de fruits.



Quant à la Grande mesure, on ne la connaît pas. Il faut la calculer. C'est ce que coûtent les deux bouteilles.



Pour résoudre le problème, on calcule la Grande mesure : $2 \text{ € } 50 + 3 \text{ € } 50 = 6 \text{ €}$

Puis on calcule l'Ecart entre le prix des jus de fruits et ce que possède Julien : $6 - 4 = 2$.

Il manque 2 € à Julien.

2. Entraînement

1 - Une bouteille de jus de pomme coûte 3 € 50.

Une bouteille de jus d'orange coûte 2 € 50.

Julien a 5 €.

Combien doit-il avoir en plus pour acheter ces deux bouteilles ?

Le premier calcul est la recherche d'un Tout avec une addition.

Le deuxième calcul est la recherche d'un écart avec une soustraction.

2 - Lulu a 135 billes.

Jean a 15 billes en moins.

Combien ont-ils de billes en tout ?

Le premier calcul est la recherche de la petite mesure avec une soustraction.

Le deuxième calcul est la recherche du Tout avec une addition.

3 - Une boulangère a préparé 654 baguettes de pain dans la matinée.
Dans l'après-midi, elle en a préparé 46 de plus que le matin.
Combien de baguettes a-t-elle préparé en tout pour la journée ?

*Le premier calcul est la recherche de la grande mesure avec une addition.
Le deuxième calcul est la recherche du Tout avec une addition.*

4 - Il y a 1395 visiteurs à un carnaval.
884 d'entre eux sont des adultes, les autres sont des enfants.
Combien d'adultes y-a-t-il de plus que d'enfants ?

*Le premier calcul est la recherche d'une Partie avec une soustraction.
Le deuxième calcul est la recherche de l'écart avec une soustraction.*

5 - Un ordinateur et un téléphone portable coûtent 1 979 €.
Le téléphone portable coûte 219 €.
Quelle est la différence de prix entre les deux articles ?
*Le premier calcul est la recherche d'une Partie avec une soustraction.
Le deuxième calcul est la recherche de l'écart avec une soustraction.*

CHAMP MULTIPLICATIF

On appelle problème multiplicatif tout problème nécessitant l'usage d'une multiplication ou d'une division pour être résolu. Cette partie du document aborde l'étude de ces problèmes.

On distinguera :

Concernant la multiplication :

- les problèmes de **recherche de la mesure d'un tout** constitué de parties identiques connaissant la mesure d'une partie et le nombre de parties,
- les problèmes de **recherche de la mesure d'un tout organisé en rangées et lignes régulières**, connaissant le nombre de lignes et le nombre de rangées.

Concernant la division :

- les problèmes de **recherche de la mesure d'une partie** d'un tout constitué de parties identiques, connaissant la mesure du tout et le nombre de parties, (problèmes dits de **division partage** ou division partition).
- les problèmes de **recherche du nombre de parties** d'un tout constitué de parties identiques, connaissant la mesure du tout et la mesure d'une partie, (problèmes dits de **division quotition**).

Concernant la multiplication et la division :

- les problèmes impliquant la comparaison de deux grandeurs dont on sait que les mesures sont proportionnelles : **n fois plus, n fois moins**,
- les **problèmes de proportionnalité**, problèmes où les mesures de deux grandeurs sont liées par un opérateur.
- les **problèmes de pourcentages** dont l'étude sera ramenée à des problèmes de proportionnalité.

Il s'agit ici de travailler différentes représentations d'aides à la résolution des problèmes de multiplication et de divisions.

Avant de démarrer l'apprentissage de cette représentation, le PE prévoit de réviser le sens de la multiplication et de la division (voir le chapitre Justification des 4 opérations).

I - MULTIPLICATION : RECHERCHE DU TOUT

Un fleuriste doit composer 4 bouquets de 5 roses.

De combien de roses a-t-il besoin ?

1. Prélèvement des informations permettant de trouver la réponse

Le PE indique aux élèves qu'ils vont apprendre à résoudre une nouvelle catégorie de problèmes.

Nous allons commencer par prélever les informations. Que connaît-on ? On connaît le nombre de bouquets. Il y a 4 bouquets.

Le PE écrit au tableau

Nombre de bouquets : 4

Que connaît-on d'autre ? On sait aussi combien on met de roses dans chaque bouquet. On met 5 roses.

Le PE écrit au tableau

Nombre de roses dans chaque bouquet : 5

Que cherche-t-on ? On cherche combien de roses le fleuriste a besoin en tout. On cherche le Tout.

Le PE écrit au tableau

Tout ? roses

2. Matérialisation du problème avec des cubes

Les élèves sont amenés à travailler par groupe de deux.

Chaque groupe reçoit environ 15 cubes multidirectionnels d'une couleur et 15 d'une autre couleur.

Vous essayez de représenter le problème avec ces cubes.

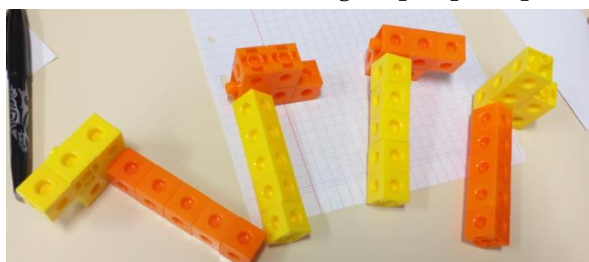
La représentation doit aider à trouver la solution.

Quelqu'un qui ne connaît pas le problème doit pouvoir le comprendre.

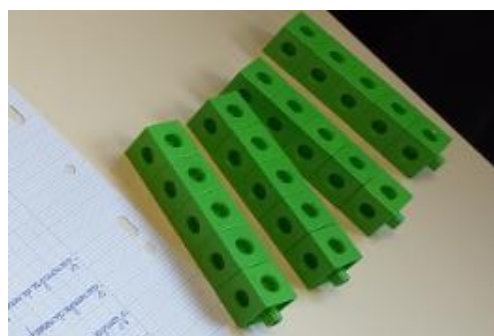
Le PE laisse les groupes travailler quelques minutes.

3. Explicitation des choix

Le PE choisit un ou deux groupes pour passer au tableau qui explique ce qu'il a fait.

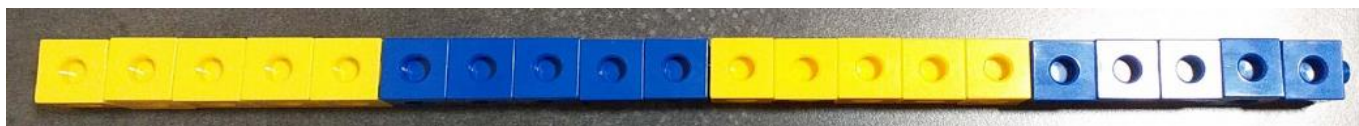


Certains représentent encore les bouquets.



La plupart des groupes représentent les 4 bouquets par 4 barres de 5 cubes de la même couleur pour les 5 fleurs et expliquent qu'en les mettant bout à bout, on obtient le nombre total de roses, c'est-à-dire le Tout.

On souhaite arriver à la représentation suivante.



Dans cette représentation, on fait abstraction d'une partie de l'information : le fait que ce soit des roses pour ne garder que les informations pertinentes : la quantité d'objets dans chaque bouquet.

Chaque cube représente une rose, on a une couleur pour chaque bouquet.

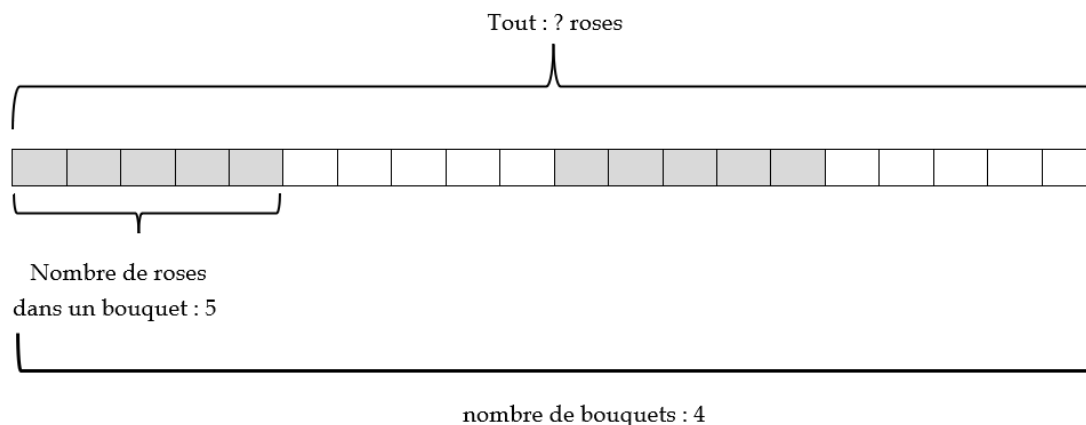
4. Représentation

Chaque groupe reçoit une feuille blanche.

Vous allez maintenant représenter les cubes sur une feuille.

Quelqu'un qui ne connaît pas le problème doit pouvoir le comprendre.

On choisit un ou deux groupes pour passer au tableau afin d'obtenir la représentation ci-dessous.



Le PE résume ce qui a été représenté tout en montrant ce qu'il dit au tableau.

On voit les 4 bouquets et on voit que dans chaque bouquet, il y a 5 roses. On voit le nombre total de roses.

Il s'agit maintenant de simplifier la représentation et de mettre en place le vocabulaire : mesure d'une Part, mesure du Tout et nombre de Parts.

Le mot Partie a été privilégié pour le champ additif.

Pour le champ multiplicatif, le mot Part semble plus pertinent mais les deux peuvent être employés.

Remarque : Pour les classes de CM, on peut commencer à simplifier la représentation.

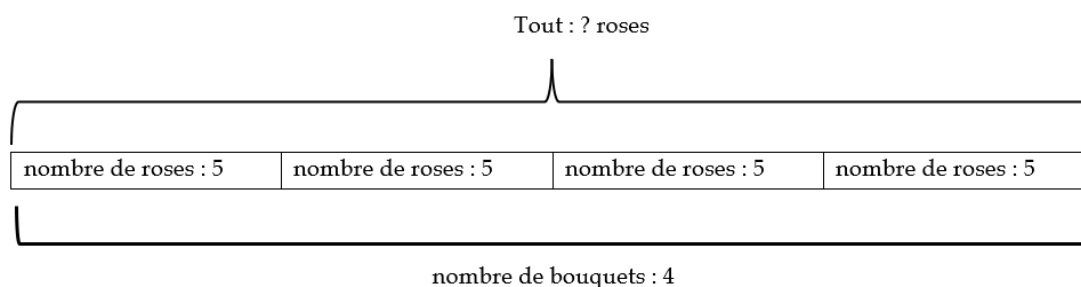
Pour les autres classes, il est recommandé de faire d'autres problèmes en gardant cette première représentation.

En allant trop vite, on peut perdre les élèves les plus fragiles pour qui les représentations simplifiées sont encore trop abstraites.

Que peut-on faire pour simplifier la représentation ?

Le PE amène les élèves à supprimer la représentation de chaque cube, ce qu'ils ont déjà fait pour les représentations précédentes ainsi que les différences de couleur.

On ne considère plus les collections elles-mêmes mais leur mesure. On passe dans le monde numérique.



Le PE continue la simplification et met en place le vocabulaire.

Il modifie le schéma et écrit les informations en même temps.

Le nombre de roses, c'est la mesure du Tout. Dans ce problème, c'est ce qu'on cherche.

Le nombre de bouquets, c'est le nombre de Parts. On écrit nombre de Parts : 4.

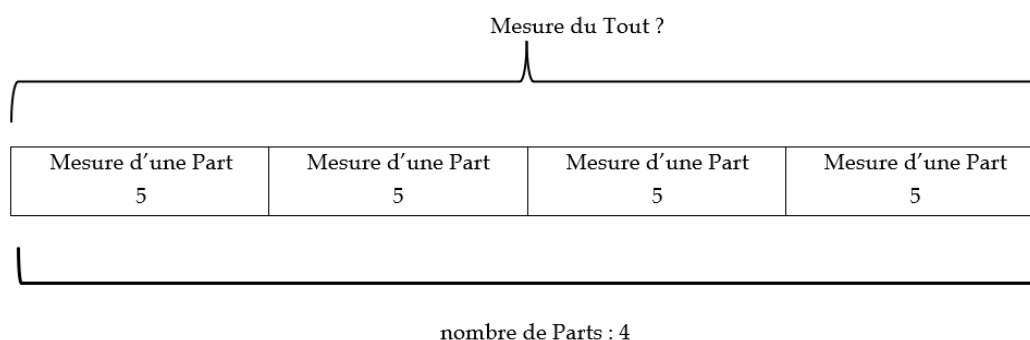
Le nombre de roses dans chaque bouquet, c'est la mesure d'une Part. C'est le nombre de roses qui se répète à **chaque** fois. Le mot chaque est à mettre en avant. Il indique qu'on travaille dans le monde de la multiplication.

On écrit : mesure d'une Part, 5 roses.

On met la mesure d'une Part directement dans une Part.

Est-ce que j'ai vraiment besoin de mettre un nombre dans les autres Parts ?

Non parce qu'elles ont toutes la même mesure.



Mesure du Tout : ? roses

Nombre de Parts : 4

Mesure d'une Part : 5 roses

Nous avons constaté que certains élèves confondent nombre de parts et mesure d'une part.

Pour les aider, et cela a été testé en Aide Pédagogique Complémentaire (APC), il est intéressant de remarquer que le Tout et la mesure d'une Part sont dans la même unité de mesure. Ici des roses.

Le nombre de parts, lui, est exprimé ici en bouquets.

Il conviendra d'y revenir pour la résolution d'autres problèmes.

Un référentiel lexical peut être installé avec deux colonnes : Mesure d'une part / Tout et nombre de parts.

Ici nous aurions roses et bouquets, mais nous pourrions par exemple compléter avec bonbons et paquets, etc.

Une astuce mise en œuvre en APC, consiste à remarquer que dans la recherche du Tout, on multiplie 4 x 5, ce qui visuellement peut être décrit comme « on va vers le haut, on monte » ... La mesure augmente.

Le PE garde la trace de cette représentation au tableau avec le prélèvement des informations.

5. Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des informations et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre de roses ?

Pour trouver le nombre de roses, on fait une multiplication.

$$4 \times 5 = 20$$

Pour résoudre ce problème, il a fallu chercher le Tout en multipliant le nombre de Parts avec la mesure d'une Part.

6. Remarque importante avant de passer à l'institutionnalisation

Il est conseillé de laisser le nombre de Parts bien visible dans la barre pendant quelques temps, en résolvant des problèmes faciles avant de passer à l'institutionnalisation.

Si on passe trop vite à l'institutionnalisation, pour beaucoup d'élèves, la représentation de l'institutionnalisation perd son sens.

Pour aider les élèves à repérer un problème multiplicatif et pour trouver ce qui correspond à la mesure d'une Part, on peut les inciter à reformuler le problème en utilisant le mot « chaque » qui indique qu'il y a répétition et le mot « Part » qui permet de trouver la mesure d'une Part.

Ceci peut faire l'objet d'un apprentissage spécifique.

Par exemple :

Dans un stade, il y a 425 rangées de 100 places chacune.

Combien doit-on prévoir de plaques pour numéroter toutes les places ?

On peut dire que **chaque rangée** contient 100 places. **Chaque Part** contient 100 places. **Une Part** mesure à chaque fois 100 places. La mesure d'une Part est 100 et c'est chaque fois la même mesure...

Autre exemple :

Le tour d'un terrain de foot mesure 400 m.

A l'entraînement, les joueurs font 3 tours.

Quelle distance ont-ils parcouru ?

On peut dire que **chaque tour de terrain** mesure 400 m. **Chaque « Part »** mesure 400m. **Une Part** mesure à chaque fois 400m. La mesure d'une Part est 400 et c'est chaque fois la même mesure...

7. Institutionnalisation

L'institutionnalisation prend vraiment sens avec un nombre de parts important, qu'il sera impossible de représenter dans la barre.

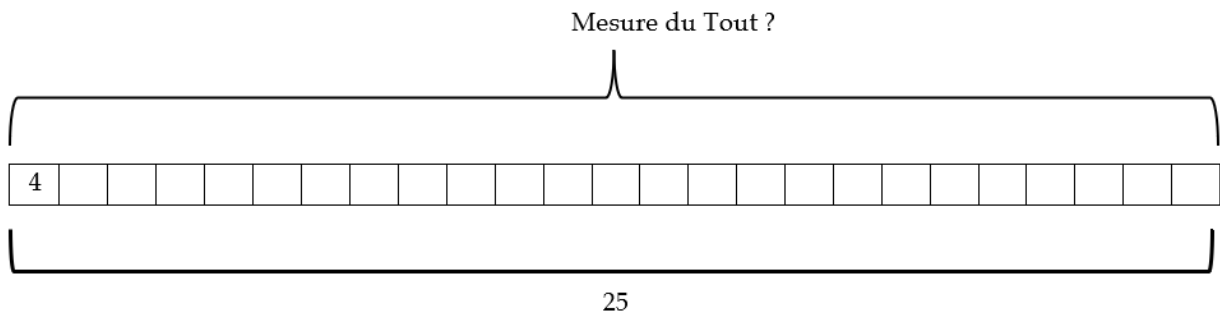
Le PE choisit un problème adapté pour lequel il sera long et coûteux en énergie de représenter toutes les Parts.

On peut par exemple choisir le problème 1 dans la partie entraînement.

Une ardoise coûte 4€. Amélia en achète 25.

Combien va-t-elle payer ?

Le PE laisse les élèves résoudre le problème et le corrige au tableau. On obtient la représentation suivante.



Il constate avec ses élèves que c'était long de représenter toutes les cases et qu'il peut être impossible de le faire lorsque le nombre va devenir très grand.

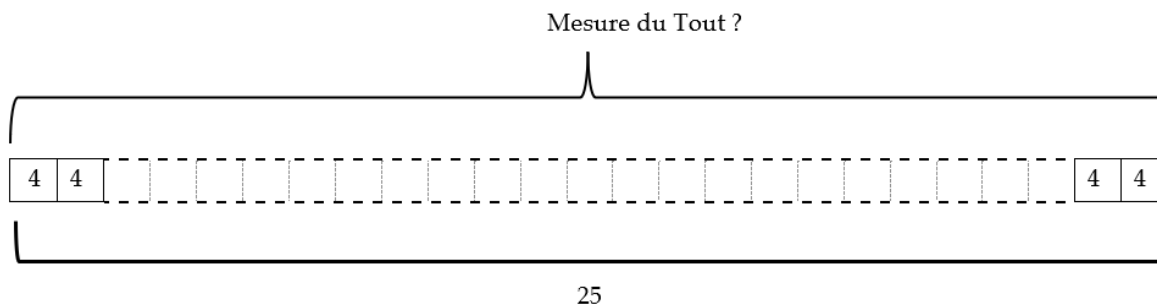
Imaginons qu'au lieu d'acheter 25 ardoises, on en achète 100 voire 1000.

Le PE propose de remplacer un certain nombre de cases par des pointillés de la même manière que lorsqu'on a beaucoup de choses à dire on met trois petits points à la fin d'une phrase.

Il part de la représentation ci-dessus, il garde 2 cases au début et 2 cases à la fin pour bien montrer qu'on va avoir la même quantité du début à la fin de la représentation et il efface toutes les autres cases pour les remplacer par une ligne pointillée.

Les pointillés permettent de ne pas représenter chacune des parts.

On ne conserve que l'information sur le nombre de parts.



Ensuite le PE part de la représentation qu'il vient de faire et il conduit les élèves à la généraliser.

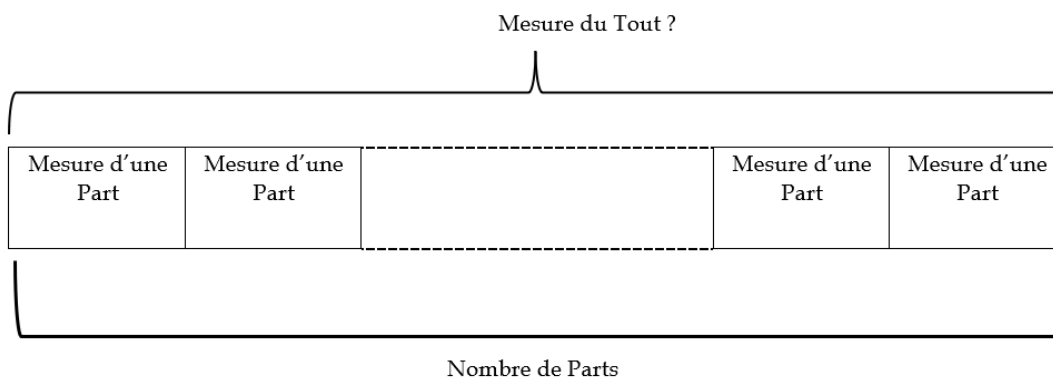
Avec l'aide de ses élèves, il supprime les données numériques et les remplace par Mesure d'une Part et Nombre de Parts.

Il obtient une première représentation avec le prélèvement des informations et le schéma.

Mesure du Tout ?

Nombre de Parts

Mesure d'une Part



Pour trouver la mesure du Tout, on multiplie le nombre de Parts par la mesure d'une Part :

Tout = nombre de Parts x mesure d'une Part.

Cette représentation sera affichée dans la classe comme référente d'une situation multiplicative.

8. Entraînement

Pour s'entraîner, différents problèmes sont proposés aux élèves.

1 - Une ardoise coûte 4€. Amélia en achète 25.

Combien va-t-elle payer ?

2 - Le jardinier de la ville a planté 6 rangées de 10 rosiers.

Combien de rosiers a-t-il planté ?

3 - Dans un stade, il y a 425 rangées de 100 places chacune.

Combien doit-on prévoir de plaques pour numéroté toutes les places ?

4 - Un verger compte 1305 arbres.

Cette année, le propriétaire estime la production de chaque arbre à 25kg.

Quelle masse de fruits produira le verger ?

5 - Le tour d'un terrain de foot mesure 400 m.

A l'entraînement, les joueurs font 3 tours.

Quelle distance ont-ils parcouru ?

6 - Le côté d'un carré mesure 8 cm.

Quelle est la longueur des 4 côtés du carré ?

7 - La reine des abeilles pond environ 2 500 œufs par jour.

Combien pondra-t-elle d'œufs en 23 jours ?

8 - Une famille utilise 421 litres d'eau par jour.

Calcule sa consommation pendant 2 semaines.

9 - Un employé de banque gagne 1 925 € par mois.

Combien gagne-t-il en une année ?

10 - Un jardinier achète 15 plants de rosiers à 7 € chacun et 6 cyprès à 12 € chacun.

Quel est le montant de sa dépense ?

9. Recherche de la mesure d'un Tout organisé en colonnes et lignes régulières

Ce sont des problèmes pour lesquels on peut utiliser un tableau à double entrée. Chaque élément est représenté par 2 caractéristiques. Une caractéristique est représentée par une ligne et l'autre caractéristique par une colonne.

Exemple :

J'ai 7 tee-shirts différents et 5 pantalons différents.

Combien de tenues différentes je peux obtenir ?

On peut résoudre ce problème avec une représentation en barres.

Pour un tee-shirt, j'ai 5 tenues différentes. La mesure d'une Part est 5 tenues. Comme j'ai 7 tee-shirts, le nombre de Parts est 7. Pour trouver le Tout, je calculerai 7 fois 5 tenues différentes.

La représentation en tableau à double entrée peut être utile pour ce genre de problème.

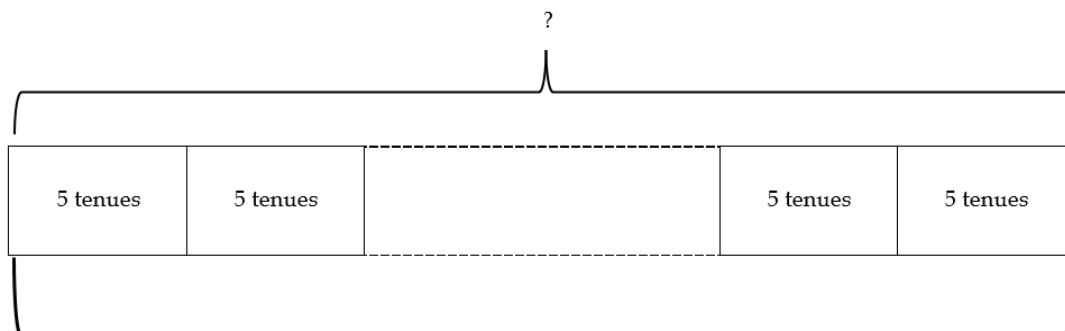
Elle permet aussi d'énumérer toutes les solutions.

	<i>P1</i>	<i>P2</i>	<i>P3</i>	<i>P4</i>	<i>P5</i>
<i>T1</i>					
<i>T2</i>					
<i>T3</i>		<i>Tenue P2 -T3</i>			
<i>T4</i>					
<i>T5</i>					
<i>T6</i>					
<i>T7</i>					

Pour trouver le nombre de tenues différentes, on multiplie alors le nombre de lignes par le nombre de colonnes.

Ce type de problème ne nécessitant pas de représentation en barres ne sera pas traité plus en avant.

Nous vous en proposons cependant un exemple.



II - DIVISION

1. DIVISION PARTAGE ou DIVISION PARTITION : recherche de la mesure d'une Part

Problème

Un fleuriste a 21 roses.

Il doit composer 3 bouquets.

Combien y-aura-t-il de roses dans chaque bouquet ?

1.1 Prélèvement des informations

De la même manière que pour le premier problème, il s'agit d'aider les élèves à repérer ce qu'on connaît et ce qu'on cherche.

Le PE note au tableau les 3 données que l'on recherche.

Mesure du Tout

Mesure d'une Part

Nombre de Parts

Le PE lit l'énoncé et au fur et à mesure de sa lecture, il complète les données pertinentes avec l'aide de ses élèves et les inscrit au tableau.

Un fleuriste a 21 roses. Ce sont toutes les roses qu'il a. C'est la mesure du Tout.

Le PE écrit 21 roses à côté de « mesure du Tout ».

Ce fleuriste doit composer des bouquets. On peut dire qu'il PARTage ses fleurs en Parts égales et que les Parts égales, ce sont les bouquets. On connaît donc le nombre de Parts. C'est le nombre de bouquets. C'est 3.

Le PE écrit 3 bouquets à côté de « nombre de Parts ».

Qu'est-ce qu'on cherche ? On cherche le nombre de roses dans chaque bouquet. On cherche la mesure d'une Part. On recherche combien chaque Part va mesurer.

Le PE écrit au tableau ? roses à côté de « mesure d'une Part ».

Au tableau sont donc inscrites les informations.

Mesure du Tout : 21 roses

Mesure d'une Part : ? roses

Nombre de Parts : 3 bouquets

1.2 Matérialisation du problème

Les élèves travaillent par groupe de deux.

Le PE demande aux élèves combien de cubes sont nécessaires pour résoudre ce problème.

La réponse est 21 puisqu'on connaît le Tout.

Vous allez utiliser ces cubes pour résoudre le problème.

1.3 Explicitation des choix

Le PE circule entre les groupes pour vérifier que chaque groupe a séparé ses cubes en mettant d'abord un cube dans chaque tas jusqu'à avoir 3 tas parce qu'il y a 3 bouquets puis en complétant petit à petit jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cubes.



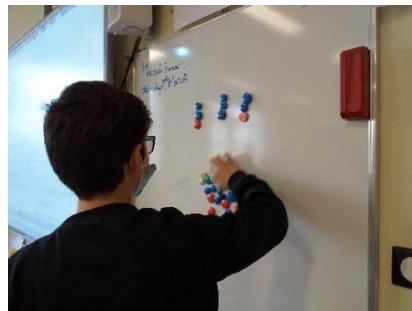
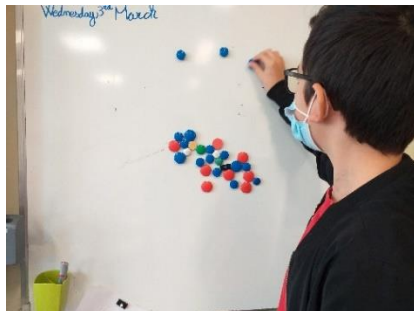
On souhaite arriver à la représentation suivante.



Le PE résume ce qui a été dit.

Il peut utiliser des aimants sur le tableau pour montrer la manipulation à tous les groupes.

Les 21 aimants représentent les 21 roses. On fait 3 bouquets c'est à dire 3 Parts égales autrement dit 3 groupes d'aimants avec le même nombre d'aimants dans chaque groupe.

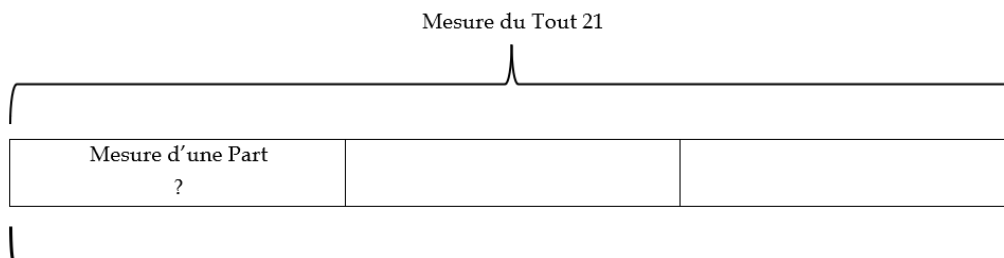


Les élèves pourront dire que dans chaque groupe, il y a 7 aimants et que ces aimants représentent le nombre de roses dans chaque bouquet.

1.4 Représentation

Vous allez représenter ce problème avec des barres sur la même feuille.

Le PE choisit un ou deux groupes pour passer au tableau afin d'obtenir la représentation ci-dessous.



nombre de Parts : 3

1.5 Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des données pertinentes et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre de roses dans chaque bouquet ?

On peut faire une division. $21 : 3 = 7$

Le PE peut reprendre les cubes pour montrer la division. Il prend la barre et la partage en 3 Parts égales en disant qu'il divise la barre en 3 Parts égales.

Le résultat de la division, c'est le nombre de cubes que l'on compte dans une Part.

On peut faire une multiplication à trou. $3 \times ? = 21$

Cette multiplication à trou peut aussi se visualiser avec les cubes.

Procéder éventuellement par essais successifs.

Pour résoudre cette multiplication à trou, il faut chercher 21 dans la table de 3 et on trouve 7.

Pour résoudre ce problème, il a fallu chercher la mesure d'une Part.

1.6 Entraînement

Pour s'entraîner, différents problèmes sont proposés aux élèves.

1 - Un lot de 6 bouteilles de jus de fruits coûte 12 €.

Combien coûte 1 bouteille de jus de fruit ?

2 - Pour un goûter d'anniversaire, Tom répartit 2 litres de jus de fruits dans 10 verres.

Combien contiendra chaque verre ?

3 - Bill a 80 bonbons.

Il veut faire 4 sachets identiques.

Combien de bonbons y aura-t-il dans chaque sachet ?

4 - En début d'année la maîtresse commande 150 cahiers pour sa classe de 25 élèves.

Combien de cahiers sont prévus pour chaque élève ?

5 - Trois amis vont au restaurant.

Ils décident de partager équitablement le prix des repas.

L'addition est de 45 €.

Combien chacun devra-t-il payer ?

6 - En 1 an, Jean a gagné 600 € en lavant des voitures.

Combien a-t-il gagné en moyenne par mois ?

7 - Un carton de 40 sachets de bonbons pèse 4 kg.

Combien pèse 1 sachet de bonbons ?

8 - Une agence de voyage a imprimé 225 brochures et les a réparties équitablement en 6 paquets. Il reste 3 brochures.

Combien de brochures y a-t-il dans chaque paquet ?

9 - Un ruban de 4 m est coupé en 8 morceaux.

Quelle sera la longueur de chaque morceau ?

10 - Cette année, 7 millions 300 mille personnes ont visité la Tour Eiffel.

Combien de personnes ont visité la Tour Eiffel en moyenne chaque jour ?

2. DIVISION QUOTITION : recherche du nombre de Parts

Un fleuriste a 30 roses.

Il doit composer des bouquets de 5 roses.

Combien de bouquets va-t-il composer ?

2.1 Prélèvement des informations

Le PE note au tableau les 3 informations pertinentes que l'on recherche et après lecture du problème pas à pas et discussion avec les élèves, on obtient les informations suivantes.

Mesure du Tout : 30 roses

Mesure d'une Part : 5 roses

Nombre de Parts : ? bouquets

2.2 Matérialisation du problème

Les élèves travaillent par groupe de deux.

Le PE demande aux élèves combien de cubes sont nécessaire pour résoudre ce problème.

La réponse est 30 puisque la mesure du Tout est 30.

Vous allez utiliser ces cubes pour résoudre le problème.

2.3 Explicitation des choix

Le PE circule entre les groupes pour vérifier que chaque groupe a fait des tas de 5 cubes jusqu'à épuisement de son stock de cubes. On obtient alors 6 tas.

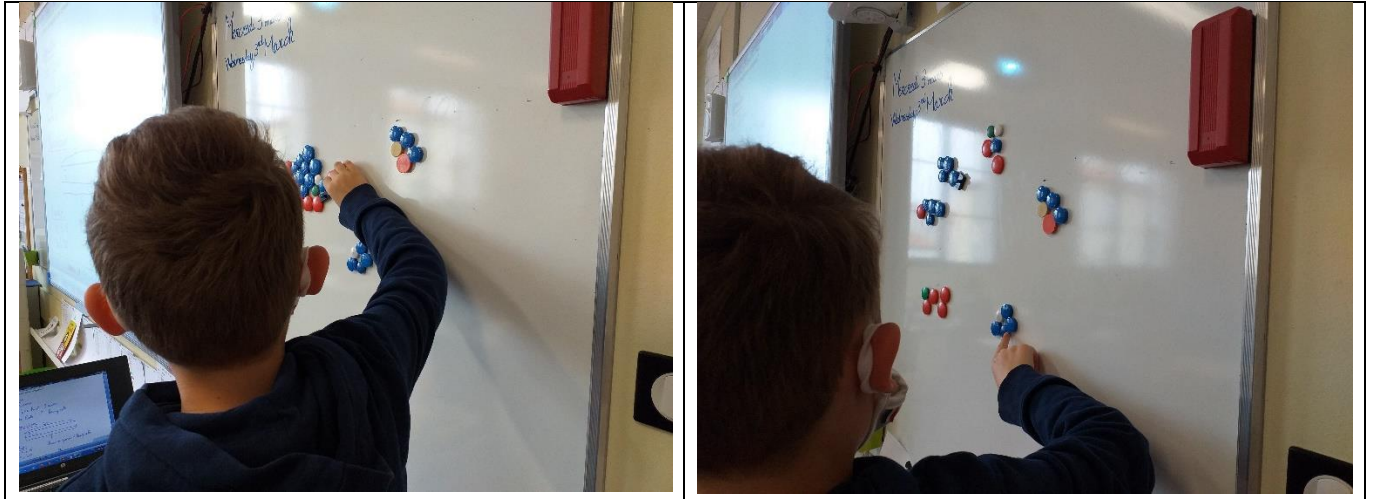


On souhaite arriver à la représentation suivante.



Le PE résume ce qui a été dit.

Il peut utiliser des aimants sur le tableau pour montrer la manipulation à tous les groupes.



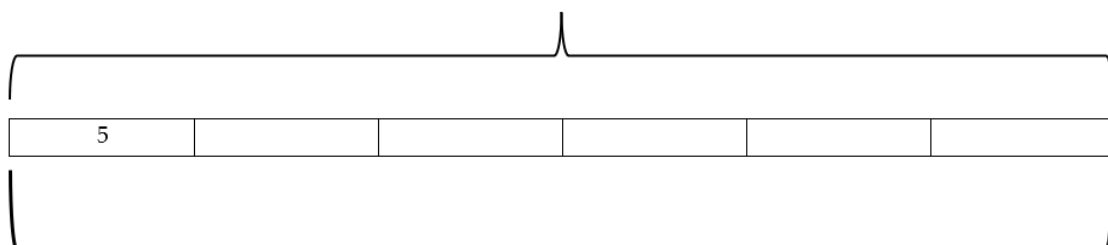
Les 30 aimants représentent les 30 roses. On a fait des groupes de 5 aimants qui représentent les 5 roses qu'il y a dans chaque bouquet. C'est la mesure de la Part. On obtient 6 groupes de 5 aimants.
Avec les cubes, on obtient autant de barres qu'on a de bouquets.
On obtient 6 barres de 5 cubes soit 6 bouquets de 5 roses.

2.4 Représentation

Vous allez représenter ce problème avec des barres sur la feuille.

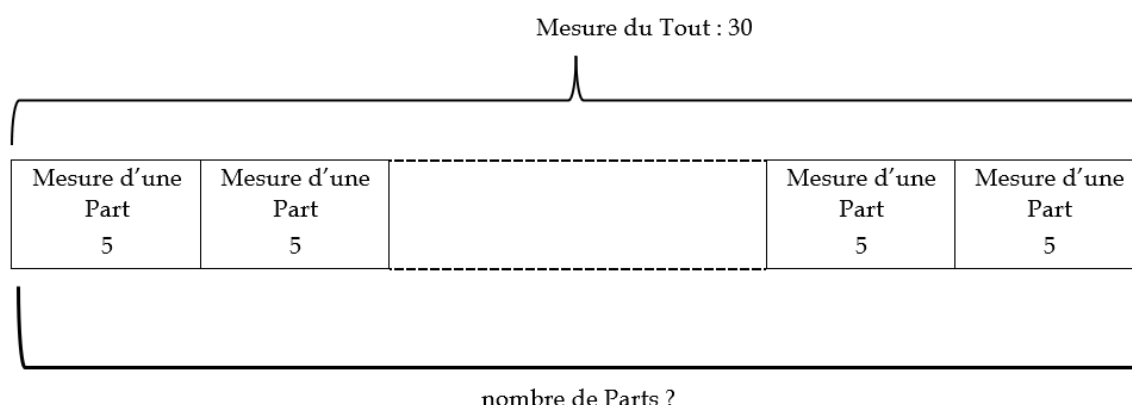
Le PE choisit un ou deux groupes pour passer au tableau. On obtient la représentation ci-dessous.

Mesure du Tout 30



Spontanément, des élèves proposent une représentation avec les 6 Parts car ils ont déjà fait le calcul. Or, normalement, on ne connaît pas cette donnée quand on fait la représentation.

Le PE leur propose d'utiliser la représentation précédente qui a permis de trouver le Tout.



2.5 Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des informations pertinentes et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre de roses dans chaque bouquet ?

On peut faire une division. $30 : 5 = 6$

On peut faire une multiplication à trou. $? \times 5 = 30$

Cette multiplication à trou peut aussi se visualiser avec les cubes.

Procéder éventuellement par essais successifs.

Pour résoudre cette multiplication à trou, il faut chercher 30 dans la table de 5 et on trouve 6.

Pour résoudre ce problème, il a fallu chercher le nombre de Parts.

Le PE revient aux aimants sur le tableau pour montrer aux élèves que les deux problèmes sont différents. Pour le premier, on cherche la mesure de la Part dans une distribution équitable.

Pour le deuxième, on cherche le nombre de Parts (tas), chaque Part ayant une mesure donnée.

On n'utilise pas la même façon de faire : le geste dans le monde réel n'est pas le même.

L'opération dans le monde mathématique est la même.

3. Institutionnalisation

Le PE conduit les élèves à généraliser la collecte des données pertinentes et la représentation.

Il écrit au tableau les informations et la représentation simplifiée.

Il rappelle que lorsqu'on écrit les informations, il faut toujours indiquer les unités de mesure.

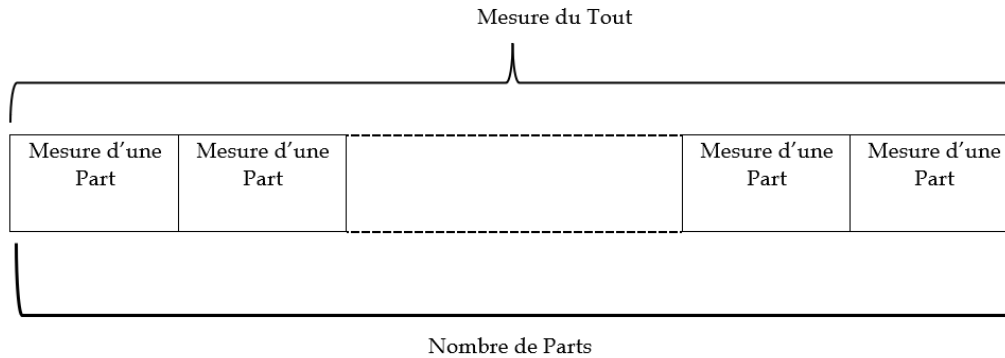
On peut ici rappeler ce que peut-être une unité de mesure : les roses des problèmes qu'on vient de voir, mais aussi des euros, des kilos, des litres....

Informations

-Mesure du Tout

-Mesure d'une Part

-Nombre de Parts :



Il explique que suivant le problème, on peut chercher la mesure du Tout, la mesure d'une Part ou le nombre de Parts en rappelant les 3 problèmes précédents qui illustrent un cas différent à chaque fois.

A chaque fois, il déplace le point d'interrogation pour montrer ce que l'on cherche.

Si je cherche le Tout, je multiplie la mesure d'une Part par le nombre de Parts.

Si je cherche la mesure d'une Part, je divise le Tout par le nombre de Parts.

Si je cherche le nombre de Parts, je divise le Tout par la mesure d'une Part.

En APC, une aide pour les élèves :

Quand on monte dans la représentation, on augmente, on multiplie.

Quand on descend dans la représentation, on diminue, on divise.

Les premiers temps, on indique la mesure d'un Part dans les deux premières et les deux dernières cases, pour bien montrer qu'elle se répète de manière identique.

Petit à petit, une fois la représentation bien comprise, on pourra les amener à ne compléter que la première case.

Cette représentation sera affichée dans la classe comme référente d'une situation multiplicative et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

4. Entraînement

Pour s'entraîner, différents problèmes sont proposés aux élèves.

1 - Il y a 28 élèves en CE2.

Le maître veut faire des équipes de 4 enfants.

Combien fait-il d'équipes ?

2 - La classe a acheté un paquet de 100 papillotes.

Chaque élève en reçoit 5.

Combien y-a-t-il d'élèves ?

3 - L'école a reçu 90 stylos par paquets de 15.

Combien de paquets a-t-elle reçu ?

4 - On partage une ficelle de 50 cm en morceaux de 12 cm.

Combien pourra-t-on faire de morceaux ?

Quelle longueur restera-t-il ?

5 - 79 personnes attendent devant l'ascenseur d'une tour.

L'ascenseur ne peut transporter que 5 personnes à la fois.

Combien faudra-t-il de voyages ?

6 - Pour un anniversaire, les élèves ont amené 2 litres de jus de fruit.

Combien de verres de 25 cl pourra-t-on remplir ?

7 - Le périmètre d'un polygone mesure 20 cm.

Chaque côté mesure 4 cm.

Combien ce polygone a-t-il de côtés ?

8 - Le jardinier de la ville a planté 120 rosiers.

Dans chaque rangée, il met 10 rosiers.

Combien y a-t-il de rangées ?

9 - Des amis vont au restaurant. Ils doivent 175 euros.

Ils décident de partager le prix des repas en parts égales.

Chacun va payer 25 €.

Combien sont-ils ?

10 - Pierre a acheté son scooter à crédit.

Le prix du scooter est de 2 400 €.

Il devra payer 200 € par mois.

Pendant combien de temps devra-t-il payer ?

III - MULTIPLICATION ET DIVISION : N FOIS PLUS, N FOIS MOINS

1. Activités préparatoires

Avant l'apprentissage de la résolution de ce type de problèmes, il est judicieux de mettre en place quelques activités préparatoires en calcul mental afin d'introduire la notion d'opérateur ainsi qu'un travail autour de la représentation.

Ces activités nécessitent de connaître par cœur les tables de multiplication.

1.1 L'opérateur

On commence par travailler sur les multiplications à trou.

On cherche l'opérateur c'est à dire un signe opératoire accompagné d'un nombre comme par exemple $\times 3$.

Chercher une multiplication

Je travaille dans le monde multiplicatif.

J'ai 3. Je veux obtenir 6.

Par quoi remplacer le point d'interrogation ?

$$3 \xrightarrow{\quad ? \quad} 6 \qquad \text{Je fais } \times 2 \text{ car } 3 \times 2 = 6$$

$\times 2$ s'appelle un opérateur. Il est formé d'un signe d'opération et d'un nombre.

Il faudra bien insister sur cette notion d'opérateur qui est composé d'un signe d'opération et d'un nombre. Les élèves ont tendance à en oublier une partie, soit l'opération, soit le nombre.

Quel opérateur permet de passer de 4 à 12 ?

Ce calcul sera représenté de la façon suivante :

$$4 \xrightarrow{\quad ? \quad} 12$$

L'opérateur est $\times 3$ car $4 \times 3 = 12$.

On continue de même avec quelques exercices sur l'ardoise pour chercher d'autres opérateurs.

10/30 5/35 4/32 7/28 9/36 6/36 etc.

Chercher une division

Avec les exemples suivants, on explique que dans le monde multiplicatif, il y a la division.

Je travaille toujours dans le monde multiplicatif.

Quel opérateur permet de passer de 18 à 6 ?

$$18 \xrightarrow{\quad ? \quad} 6$$

L'opérateur est $\div 3$ car $18 \div 3 = 6$ ou $6 \times 3 = 18$

On continue de même avec quelques exercices sur l'ardoise pour chercher d'autres opérateurs.

24/8 35/5 18/9 21/7 27/3 20/5

Entraînement

Au cours des jours suivants, on s'entraîne en faisant varier les opérations mais aussi la place du point d'interrogation afin de s'entraîner dans différents cas.

$$6 \xrightarrow{\quad ? \quad} 18$$

$$? \xrightarrow{\times 3} 18$$

$$6 \xrightarrow{\times 3} ?$$

$$18 \xrightarrow{?} 6$$

$$? \xrightarrow{\div 3} 6$$

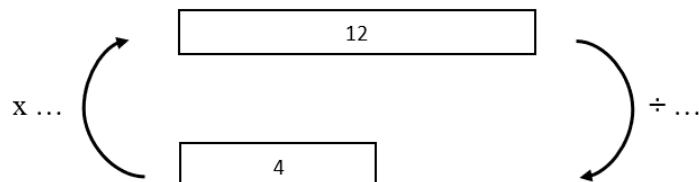
$$18 \xrightarrow{\div 3} ?$$

1.2 Activités de représentation

Voici une représentation référente.

La grande barre représente la mesure la plus grande, par exemple elle vaut 12.

La petite barre représente la mesure la plus petite par exemple elle vaut 4.



Pour passer de la petite barre à la grande barre, on utilise un opérateur qui est $\times 4$.

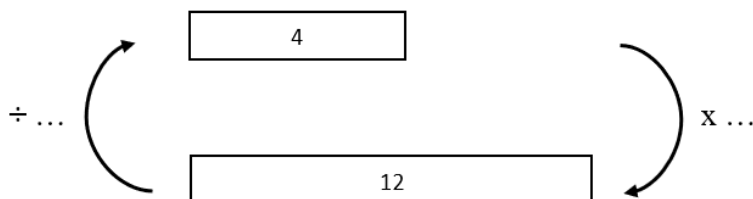
Pour passer de la grande barre à la petite barre, on utilise un opérateur qui est $: 4$.

Il faut insister sur l'importance du sens des flèches et donc veiller à ce qu'il soit bien indiqué.

Il est intéressant de montrer aux élèves qu'ils peuvent placer la mesure la plus petite au-dessus.

La petite barre représente la mesure la plus petite par exemple elle vaut 4.

La grande barre représente la mesure la plus grande par exemple elle vaut 12.

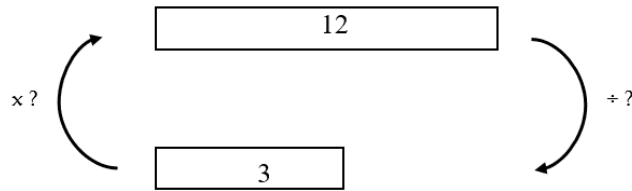


Pour passer de la petite barre à la grande barre, on utilise un opérateur qui est $\times 4$.

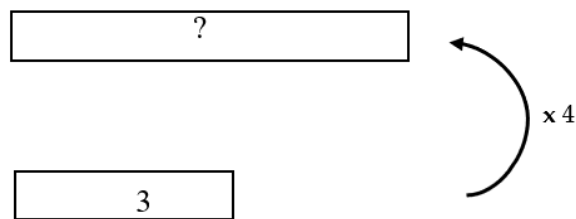
Pour passer de la grande barre à la petite barre, on utilise un opérateur qui est $: 4$.

Ensuite, on varie les exercices en cherchant soit les opérateurs, soit la mesure de la grande barre, soit la mesure de la petite barre.

Exemple 1

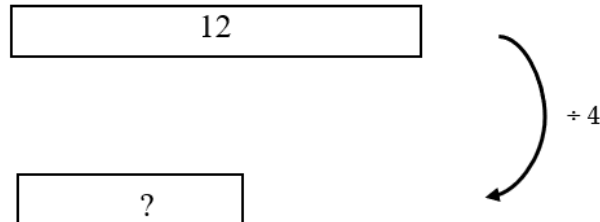


Exemple 2



Remarque : la flèche part de la mesure connue et va en direction de la mesure inconnue.

Exemple 3



Il sera intéressant de varier les situations pour bien mettre en place l'idée que la flèche va, au moins dans un premier temps, de la partie connue à la partie inconnue.

2. Recherche de la grande mesure

Paul a 28 images.

Marie a 2 fois plus d'images que Paul.

Combien Marie a-t-elle d'images ?

2.1 Prélèvement des données pertinentes

Le PE indique aux élèves qu'ils vont apprendre à résoudre une nouvelle catégorie de problèmes.

Il amène le prélèvement des données pertinentes.

Il écrit au tableau.

Grande mesure :

Petite mesure :

Opérateur :

Il aide les élèves à argumenter et à choisir quelle sera la grande mesure et quelle sera la petite.

Ils s'aident pour cela de l'opérateur indiqué dans l'énoncé : deux fois plus.

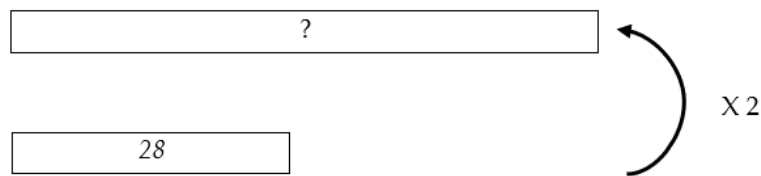
Il écrit au tableau.

Grande mesure : ? images

Petite mesure : 28 images

Opérateur : $\times 2$

2.2 Représentation



La représentation avec la petite mesure au-dessus est bien sûr recevable.

2.3 Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des données pertinentes et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre d'images de Marie ?

On fait une multiplication.

$$28 \times 2 = 56$$

Marie a 56 images

3. Recherche de la petite mesure

Ben a 100 €.

Jimmy a 2 fois moins d'argent que Ben.

Combien d'argent a donc Jimmy ?

3.1 Prélèvement des données pertinentes

Le PE amène le prélèvement des données pertinentes.

Il écrit au tableau.

Grande mesure :

Petite mesure :

Opérateur :

Il aide les élèves à argumenter et à choisir quelle sera la grande mesure et quelle sera la petite.

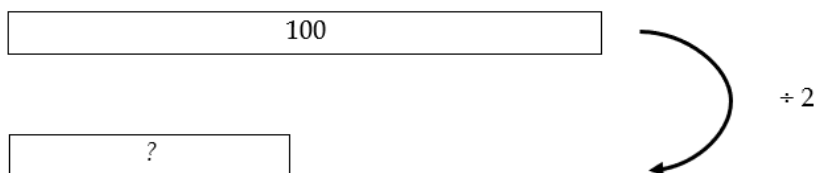
Il écrit au tableau.

Grande mesure : 100 €

Petite mesure : ?

Opérateur : $\div 2$

3.2 Représentation



3.3 Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des données pertinentes et la représentation.

Comment fait-on pour trouver le nombre d'images de Marie ?

On fait une division.

$$100 \div 2 = 50$$

Jimmy a 50 €.

4. Recherche de l'opérateur

Une bague en argent coûte 6 €. Une bague en or coûte 18 €.

Combien de fois plus coûte la bague en or ?

4.1 Prélèvement des données pertinentes

Le PE amène le prélèvement des données pertinentes.

Il écrit au tableau.

Grande mesure :

Petite mesure :

Opérateur :

Il aide les élèves à argumenter et à choisir quelle sera la grande mesure et quelle sera la petite.

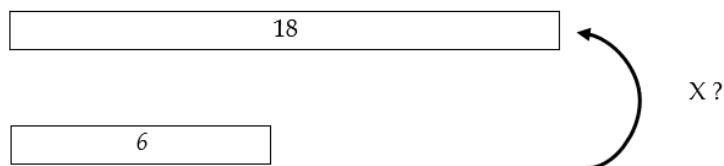
Il écrit au tableau.

Grande mesure : 18 €

Petite mesure : 6 €

Opérateur : ?

4.2 Représentation



4.3 Résolution du problème

Les élèves observent le tableau sur lequel est écrit le prélèvement des données pertinentes et la représentation.

Comment fait-on pour trouver l'opérateur ?

Ce raisonnement peut poser problème. Plusieurs démarches sont possibles.

1 On cherche 18 dans la table de 6.

2 On fait une multiplication à trou : $6 \times \dots = 18$.

3 On cherche dans 18 combien de fois 6.

On obtient $\times 3$.

La bague en or coûte 3 fois plus que la bague en argent.

On peut remarquer que la bague en argent coûte trois fois moins que la bague en or.

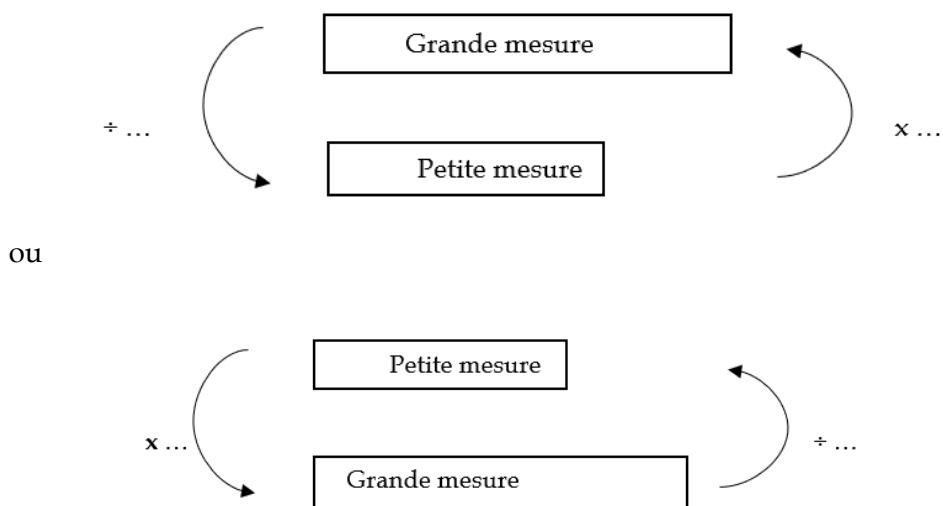
$$18 \div 3 = 6$$

5. Institutionnalisation

Le PE conduit les élèves à généraliser le prélèvement des données pertinentes et la représentation. Il écrit au tableau les informations et la représentation simplifiée.

Informations

- grande mesure
- petite mesure
- opérateur



Il explique que suivant le problème, on peut chercher la grande mesure, la petite mesure ou l'opérateur en rappelant les 3 problèmes qui illustrent un cas différent à chaque fois.

Si je cherche la grande mesure, je multiplie la petite mesure par l'opérateur.

Si je cherche la petite mesure, je divise la grande mesure par l'opérateur.

Si je cherche l'opérateur, je divise la grande mesure par la petite mesure.

Cette représentation 4 sera affichée dans la classe comme référente d'une situation multiplicative n fois plus, n fois moins et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

6. Entraînement

Pour s'entraîner, différents problèmes sont proposés aux élèves.

1 - Paul a 110 timbres.

Marie a 3 fois plus de timbres que Paul.

Combien Marie a-t-elle de timbres ?

2 - Pierre a 9 ans.

Son père est 4 fois plus âgé que lui.

Quel âge a son père ?

3 - Ben a 90 billes.

Jimmy a 3 fois moins de billes que Ben.

Combien de billes a donc Jimmy ?

4 - Le papa de Pierre a 50 ans.

Pierre est 5 fois moins âgé que son père.

Quel âge a Pierre ?

5 - Jean a 25 billes.

Julie a 100 billes.

Combien Julie a-t-elle de fois plus de billes que Jean ?

6 - Emma a 48 timbres de collection.

Bernard a 12 timbres de collection.

Combien Bernard a-t-il de fois moins de timbres de collection ?

7 - Au cross Alex a parcouru 2 700 m et Anthony 900 m.

Combien de fois moins Anthony a-t-il parcouru ?

8 - Une voiture avec un équipement minimum coûte 9 000 €.

Une deuxième voiture avec options de confort coûte 27 000 €.

Combien de fois plus coûte la deuxième voiture ?

9 - Au cross Alex a parcouru 3 km et Anthony 1 500 m.

Combien de fois moins Anthony a-t-il parcouru ?

10 - Combien de fois plus vaut 200 000 par rapport à 10 000 ?

IV - PROPORTIONNALITE

1. Activités préparatoires

Avant d'apprendre à résoudre des problèmes de proportionnalité, il est indispensable de définir et de reconnaître ce qu'est une situation de proportionnalité.

1.1 Compter de 5 en 5, de 6 en 6...

Pour remplir des tableaux de proportionnalité, il est intéressant de maîtriser cette activité, voire de la reconnaître dans un tableau.

1.2 Réviser la notion d'opérateur

Si cette notion n'a pas été travaillée depuis quelques semaines, il peut être intéressant de la revoir.

Voir chapitre XI paragraphe 1.1 l'opérateur.

1.3 Définition d'une situation de proportionnalité

Avant de travailler sur des problèmes de proportionnalité, il faut que les élèves reconnaissent des situations de proportionnalité.

Nous allons travailler la proportionnalité : il y a proportionnalité quand des mesures changent dans les mêmes proportions.

Pour la proportionnalité, on utilise la multiplication ou la division.

Remarques pour l'enseignant : On parle de situation de proportionnalité quand on a deux grandeurs qui sont liées : la mesure de l'une d'entre elle est obtenue à partir de la mesure de l'autre multipliée par une constante qu'on appelle coefficient de proportionnalité. Nous, nous l'appellerons l'opérateur.

Au-delà de cette définition un peu abstraite, ce sont des grandeurs qui sont proportionnelles, et en général ce sont les habitudes sociales qui, implicitement, induisent la proportionnalité : on pourrait imaginer que plus on achète de paquets de bonbons moins cher est le paquet !

Ces situations sont en général suffisamment familières aux élèves pour qu'ils oublient les grandeurs qui sont derrière d'où l'intérêt de les faire travailler sur des situations de proportionnalité et des situations qui n'en sont pas.

Nous allons prendre un exemple.

Un paquet de bonbons coûte 3 euros.

Combien coûtent 2 paquets ?

J'ai multiplié le nombre de paquets par 2, j'ai deux fois plus de paquets.

De la même manière, en utilisant le même opérateur, je multiplie le prix par deux, je vais payer deux fois plus : $2 \times 3 = 6$ euros. Je vais payer 6 euros.

On dit aussi que l'on multiplie dans les mêmes proportions.

Si je multiplie le nombre de paquets par 2, je multiplie le prix par 2.

J'ai multiplié le prix d'un paquet dans les mêmes proportions que le nombre de paquets.

Remarque pour l'enseignant : on introduit un nouveau vocabulaire en alternative au mot opérateur. Ceci afin de justifier la terminologie proportionnalité.

Combien coûtent 3 paquets ?

J'ai multiplié le nombre de paquets par 3, j'ai trois fois plus de paquets.

De la même manière, dans la même proportion, je multiplie le prix par trois, je vais payer trois fois plus : $3 \times 3 = 9$ euros. Je vais payer 9 euros.

Combien coûtent 4 paquets ?

J'ai multiplié le nombre de paquets par 4, j'ai quatre fois plus de paquets.

De la même manière, dans la même proportion, je multiplie le prix par quatre, je vais payer quatre fois plus : $4 \times 3 = 12$ euros. Je vais payer 12 euros.

Combien coûtent 5 paquets ?

J'ai multiplié le nombre de paquets par 5, j'ai cinq fois plus de paquets.

De la même manière, dans la même proportion, je multiplie le prix par cinq, je vais payer cinq fois plus : $5 \times 3 = 15$ euros. Je vais payer 15 euros.

1.4 Situation de proportionnalité et représentation en barres

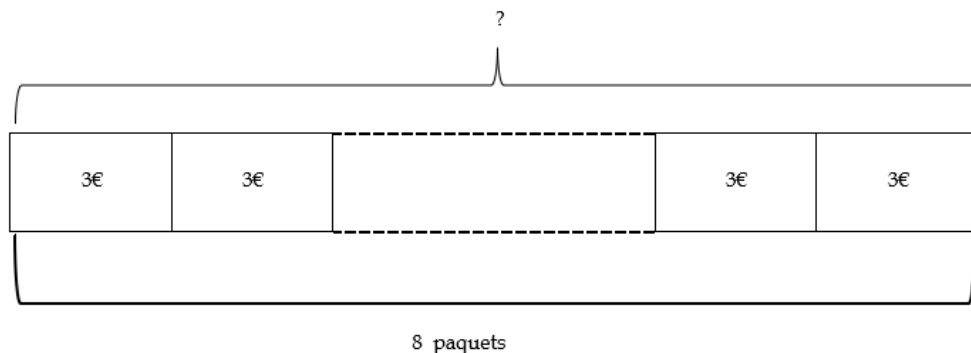
On peut résoudre ce type de problème en utilisant la représentation en barres.

Par exemple

Un paquet de bonbon coûte 3€. Combien coûtent 8 paquets de bonbons ?

On connaît la Mesure d'une Part (3€), le nombre de Parts (8 paquets) et on cherche le Tout.

On obtient la représentation ci-dessous.



Mais cette manière de résoudre le problème est chronophage car elle implique une nouvelle représentation chaque fois que le nombre de paquets change.

Comme à **chaque fois**, on a **multiplié le prix d'un paquet dans les mêmes proportions que le nombre de paquets**, on peut également résoudre ce type de problème en construisant un tableau de proportionnalité.

1.5 Activités préparatoires avant d'utiliser un tableau de proportionnalité

Avant de faire des tableaux de proportionnalité, il est conseillé de passer par cette étape intermédiaire.

On reprend le problème précédent.

Un paquet de bonbon coûte 3€. Combien coûtent 8 paquets de bonbons ?

On construit le tableau suivant.

Nombre de paquets	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Prix en euros	3	3	3	3	3	3	3	3	24

Pour trouver le prix des bonbons, on fait la même opération que pour trouver le nombre de paquets, c'est-à-dire une addition.

Pour trouver le prix des bonbons, je fais la même addition que pour trouver le nombre de paquets.

Cette phase de justification peut être commencée en CM1.

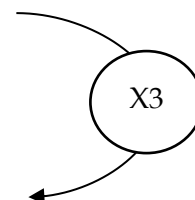
Cela permettra de comprendre et visualiser le lien de proportionnalité entre les deux grandeurs.

1.6 Construction et lecture d'un tableau de proportionnalité

Opérateur externe

On remplit le tableau ci-dessous au fur et à mesure avec les élèves.

Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	4	5
Prix en euros	0	3	6	9	12	15



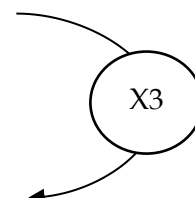
On remarque que pour passer de la ligne du haut à celle du bas, on multiplie à chaque fois par 3. C'est l'opérateur externe.

Le même opérateur fonctionne dans tout le tableau de proportionnalité.

Question : J'ai 10 paquets de bonbons, quel prix est-ce que je vais payer ?

On remarque qu'on peut rajouter 10 dans le tableau et utiliser l'opérateur : $10 \times 3 = 30$

Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	4	5	10
Prix en euros	0	3	6	9	12	15	30



Remarque pour le PE :

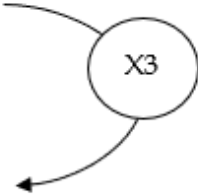
$\times 3$ est appelé coefficient de proportionnalité. Nous l'appellerons l'**opérateur externe**. Il agit de la mesure d'une grandeur sur la mesure de l'autre grandeur. Dans le problème ci-dessus, il s'agit du prix en euros par rapport au nombre de paquets.

Nous prendrons l'habitude de toujours mettre la situation d'origine, le 0, dans le tableau ce qui servira pour la construction du graphique.

Opérateur interne à chaque mesure

Reprenons le même tableau. Tout en gardant le sens des mesures manipulées, nous allons faire ressortir les propriétés de linéarité dont on aura besoin plus loin.

			$2 + 3 = 5$					
			┌───┐					
Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	4	5	7	15
Prix en euros	0	3	6	9	12	15	21	45
			└───┘					
			$6 + 9 = 15$					

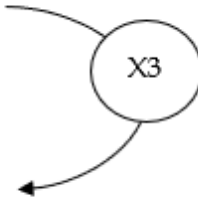


On remarque que si on achète 2 paquets de bonbons, puis 3 paquets de bonbons soit $2 + 3 = 5$ paquets, on va payer $6 + 9 = 15$ euros.

Autrement dit, si on fait la somme dans deux cases de la première ligne, on doit faire la somme dans les deux cases correspondantes de la deuxième ligne.

On remarque que si on achète trois fois cinq paquets de bonbons, soit $3 \times 5 = 15$ paquets, on va payer 3 fois le prix de 5 paquets, soit $3 \times 15 = 45$ euros. Si on multiplie une case de la première ligne par un nombre, on doit multiplier de la même façon la case correspondante de la deuxième ligne.

						$\times 3$		
						┌───┐		
Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	4	5	7	15
Prix en euros	0	3	6	9	12	15	21	45
						└───┘		
						$\times 3$		



On remarque que si Pierre achète 15 paquets, il va payer 45 euros. Si Paul en achète 5 fois moins, il va acheter $15 : 5 = 3$ paquets et il va payer $45 \text{ euros} : 5 = 9$ euros. Si on divise une case de la première ligne par un nombre, on doit diviser la case correspondante de la deuxième ligne.

	0	1	2	3	4	5	7	15
Nombre de paquets de bonbons								
Prix en euros	0	3	6	9	12	15	21	45

: 5

: 5

Tous ces opérateurs sont des opérateurs **internes** qui agissent sur les mesures **d'une même grandeur**.

1.7 Reconnaître des situations de proportionnalité

Afin d'aider les élèves à faire une différence entre une situation de proportionnalité et une situation de non proportionnalité, on va s'entraîner à les reconnaître.

À partir de problèmes

Le PE propose des problèmes aux élèves.

Ils doivent dire s'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou non et pourquoi.

Les problèmes sont affichés au tableau un par un. Les élèves réfléchissent sur leur ardoise.

1 - Pour le dernier contrôle de maths, Lucie a révisé pendant une heure et a obtenu la note de 7 sur 10. Pour le prochain contrôle, elle décide de travailler deux fois plus longtemps.

Quelle note va-t-elle avoir ?

Est-ce une situation de proportionnalité ?

2 - Il faut 3 œufs pour un gâteau de 4 personnes.

Il faut 6 œufs pour un gâteau de 8 personnes.

Est-ce une situation de proportionnalité ?

3 - Un enfant de 5 ans pèse 20 kg. Combien pèsera-t-il à 50 ans ?

Est-ce une situation de proportionnalité ?

4 - Un magasin annonce : un pantalon 40 €, 3 pantalons 100 €.

Est-ce une situation de proportionnalité ?

5 - Un livre coûte 3 €, 5 livres coûtent 15 € et 10 livres coûtent 30 €.

Est-ce une situation de proportionnalité ?

6 - Un fleuriste propose les tarifs suivants :

10 roses pour 15 € et 20 roses pour 25 €.

Est-ce une situation de proportionnalité ?

7 - Le tour d'un parc mesure 2 km.

Combien mesure 2 tours de parc ? Combien mesure 3 tours de parc ? Combien mesure 10 tours de parc ?

Est-ce une situation de proportionnalité ?

8 - Un cycliste vient de réussir un parcours de 2 h 05 mn.

Combien de temps mettra-t-il pour faire ce parcours 2 fois ? 5 fois ? 20 fois ?

Est-ce une situation de proportionnalité ?

C'est à discuter : est-ce que le cycliste va être capable de toujours rouler à la même vitesse ?

9 - À 6 ans, Armand chaussait du 30.

Combien va-t-il chausser à 18 ans ?

Est-ce une situation de proportionnalité ?

10 - Une place de cinéma coûte 7 €, quatre places de cinéma coûtent 28 € et le carnet de 10 places coûte 50€.

Est-ce une situation de proportionnalité ?

À partir de tableaux

Le PE propose des tableaux aux élèves. Ils doivent dire s'il s'agit d'une situation de proportionnalité ou non et pourquoi.

Les problèmes sont affichés au tableau un par un. Les élèves réfléchissent sur leur ardoise.

Tableau 1 :

<i>Nombre de paquets de bonbons</i>	0	1	2	3	5	10
<i>Prix en euros</i>	0	4	8	12	20	40

Tableau 2 :

<i>Nombre de paquets de bonbons</i>	0	1	2	3	5	10
<i>Prix en euros</i>	0	4	8	12	20	30

Tableau 3 :

Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	5	10
Prix en euros	0	5	10	15	20	30

Tableau 4 :

Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	5	10
Prix en euros	0	5	10	15	25	50

Tableau 5 :

Nombre de paquets de bonbons	0	2	4	6	8	10
Prix en euros	0	8	16	24	32	40

1.8 Lecture de graphiques

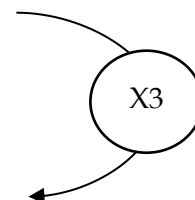
Avant de construire un graphique de proportionnalité, les élèves s'entraînent à lire quelques graphiques comme par exemple un graphique de poids ou de taille en fonction de l'âge, un graphique de température...

1.9 Construction de graphiques de proportionnalité

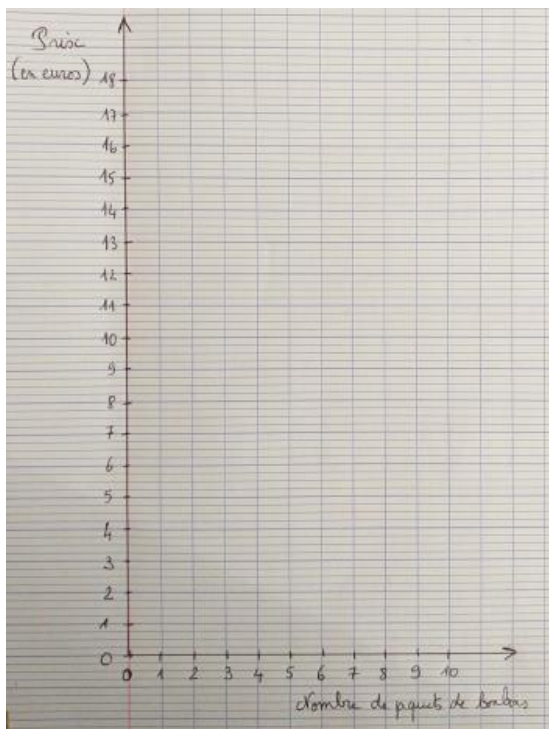
Premier exemple

Nous reprenons le tableau de proportionnalité du premier exemple pour montrer aux élèves comment construire un graphique.

Nombre de paquets de bonbons	0	1	2	3	4	5
Prix en euros	0	3	6	9	12	15



Nous allons maintenant représenter ce tableau de proportionnalité avec un graphique.



Pour cela, nous allons tracer deux axes : un axe horizontal et un axe vertical.

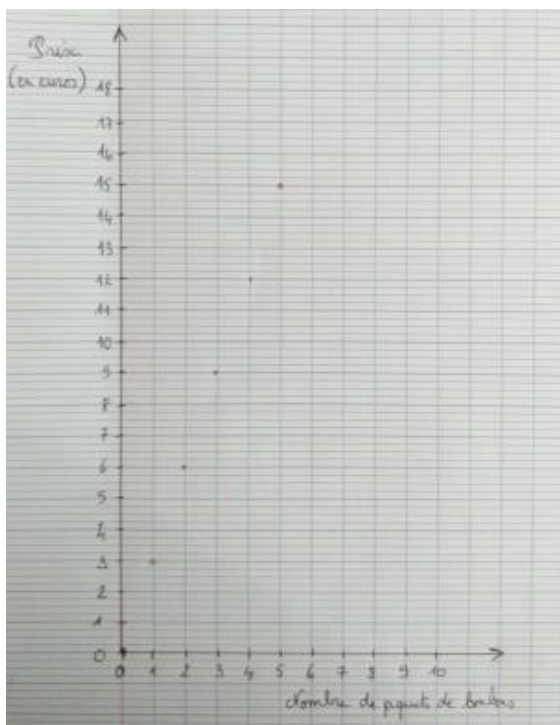
Sur ces deux axes, nous allons placer des graduations.

Sur l'axe horizontal, nous allons noter le nombre de paquets de bonbons.

Chaque carreau représentera 1 paquet.

On compte de 1 en 1.

Sur l'axe vertical, nous allons noter le prix en euros.

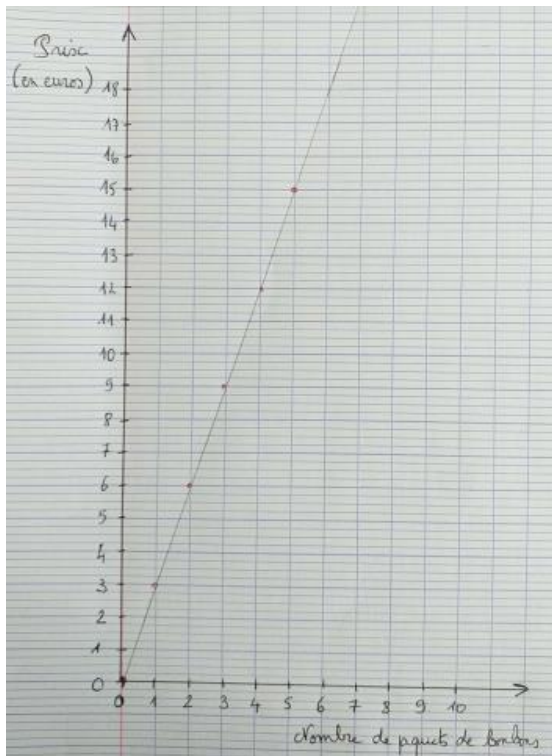


Nous allons maintenant placer les données qu'on a dans le tableau, on va les placer par couple. On va commencer par placer le couple (1,3). Dans le couple (1,3), le premier nombre se lit sur l'axe horizontal et le deuxième nombre se lit sur l'axe vertical. Petit à petit, on place tous les couples inscrits dans le tableau : (2,6), (3,9)...etc.

Sans oublier de placer le couple (0,0).

Il y a un 0 pour l'axe horizontal et un 0 pour l'axe vertical et ces deux 0 sont situés au même endroit.

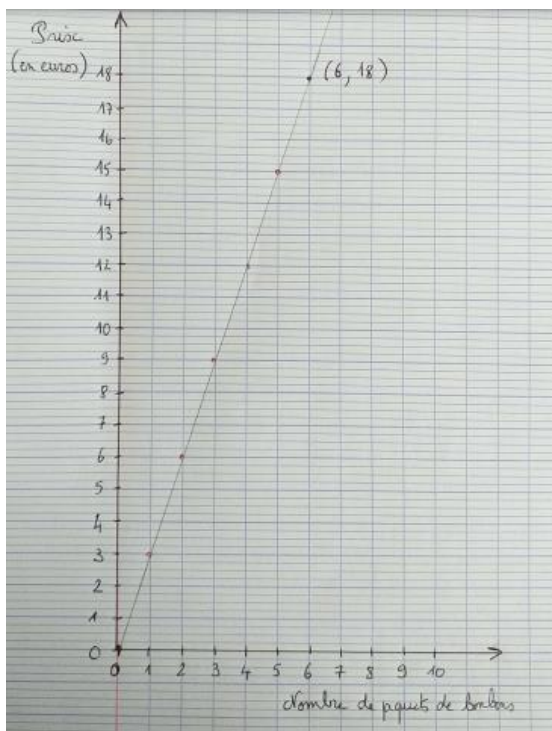
Les élèves peuvent avoir des difficultés à voir que ce point est le zéro de l'axe horizontal **et** le zéro de l'axe vertical.



Il ne nous reste plus qu'à relier tous les points obtenus entre eux avec une règle.

On obtient une ligne droite qui passe par le point $(0,0)$.

Quand on obtient une demi-droite qui passe par le point $(0,0)$, on peut dire que nous avons une situation de proportionnalité.



On remarque que sur cette demi-droite, nous avons le point $(6,18)$ qu'on aurait pu mettre dans notre tableau de proportionnalité.

C'est une autre manière de trouver d'autres points.

C'est l'occasion de s'entraîner à lire des graphiques.

Deuxième exemple

Voici un autre exemple.

Un paquet de bonbons coûte 3 €.

Combien coûtent 2 - 3 - 5 et 10 paquets ?

Combien de paquets peut-on acheter avec 12 € ?

Le PE demande aux élèves de construire un tableau et d'indiquer l'opérateur externe.

Ce qui peut donner :

Nombre de paquets	0	1	2	3	5	10	?
Prix	0	3	?	?	?	?	12



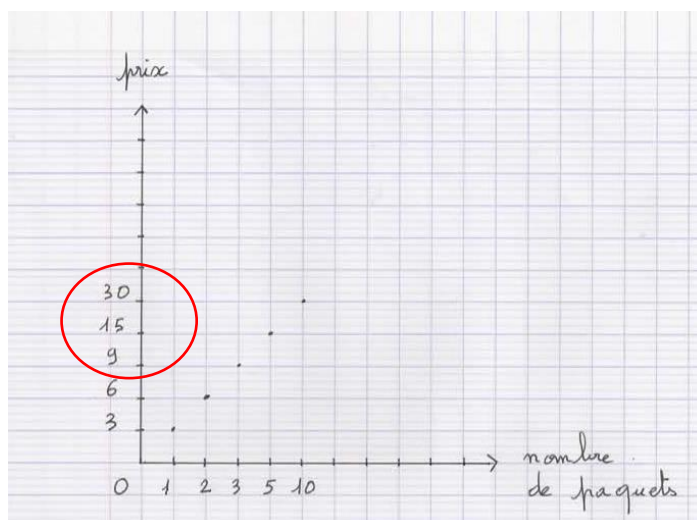
Le PE leur demande ensuite de construire le graphique.

Les élèves font souvent cette erreur qui consiste à mettre directement les données du tableau dans le graphique sans tenir compte de l'échelle de la graduation.

Pour le nombre de paquets, on compte bien de 1 en 1, chaque carreau représente 1 paquet.

Pour le prix, on compte bien de 3 en 3, chaque carreau représente 3 euros.

Ainsi sur ce graphique, il faut mettre 12 à la place de 15 et 15 à la place de 30.



1.10 Exercices d'entraînement

1 - Une camionnette consomme en moyenne 10 litres de carburant pour 100 km parcourus.

Complète le tableau de proportionnalité.

Trouve l'opérateur.

Nombre de litres de carburant	0	10	20	30			100
Km parcourus	0	100			400	800	1000

Construis un graphique.

2 - La maitresse doit acheter des cahiers sans remises pour les grosses commandes.

Un lot de 100 cahiers coûte 10 €.

Combien vont coûter 200 cahiers, 500 cahiers, 1000 cahiers ?

Combien de cahiers pourra-t-elle acheter avec 50 € ?

Construis un tableau et un graphique.

3 - Un robot peint 5 jouets en 1 heure.

Combien de jouets va-t-il peindre en 2 heures, en 5 heures, en 10 heures ?

Combien de temps va-t-il mettre pour peindre 7 jouets ?

Construis un tableau et un graphique.

4 - Un **robinet** qui goutte équivaut à une perte de 5 litres d'eau par heure.

Quelle sera la quantité d'eau perdue en 2 heures, 10 heures, 1 journée ?

Construis un tableau et un graphique.

La difficulté sera ici le choix de l'échelle : 1 journée faisant 24 h, il sera plus pratique de compter de 2 en 2 pour l'axe du temps.

2. Représentation en barres adaptée à des problèmes de proportionnalité

2.1 Exemple 1

Maintenant que les élèves sont capables de reconnaître des situations de proportionnalité, nous allons apprendre à résoudre des problèmes de proportionnalité en utilisant une nouvelle représentation en barres.

Voici un problème :

Un fleuriste propose 10 roses pour 15 €.

Combien coûteront 20 roses ?

Nous allons représenter ce problème avec des barres.

Le PE représente le problème au fur et à mesure qu'il dit les choses.

Tout d'abord, nous allons tracer un grand trait rouge vertical : à gauche, ce sera le nombre de roses et à droite, le prix en euros.

On place les barres qui correspondent à 10 roses et à 15€.

En dessous, on place la barre qui correspond à 20 roses. Il y a plus de roses, elle sera donc plus grande.

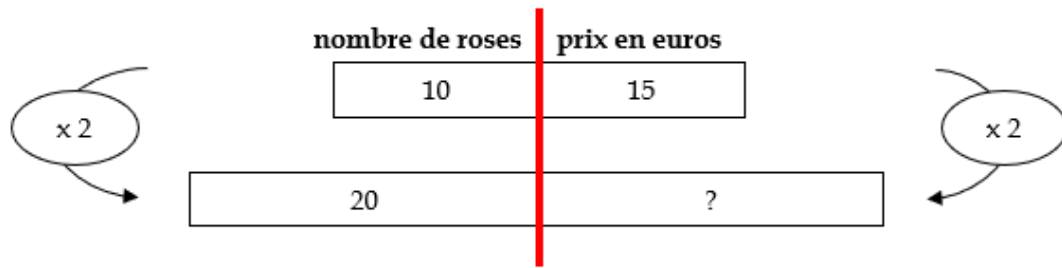
Remarque pour le PE : il n'est pas nécessaire que les barres soient proportionnelles. Pour ce problème, il est évident que la barre doit être deux fois plus grande, mais ce ne sera pas toujours évident.

On place ensuite la barre qui correspond au prix des 20 roses ; elle sera elle-aussi plus grande puisqu'il s'agit d'une situation de proportionnalité. Si la mesure du nombre de roses augmente, le prix augmentera dans les mêmes proportions.

On s'appuie sur ce que l'on connaît, les nombres de roses, pour chercher ce que l'on ne connaît pas, un prix.

On cherche l'opérateur pour passer de 10 à 20 roses. Ici, c'est $\times 2$.

Comme il s'agit d'une situation de proportionnalité, l'opérateur est le même pour le prix en euros.



On peut alors résoudre le problème.

$$15 \times 2 = 30$$

Les 20 roses coûteront 30 euros.

2.2 Exemple 2

Un câble de 100 m de long pèse 30 kg.

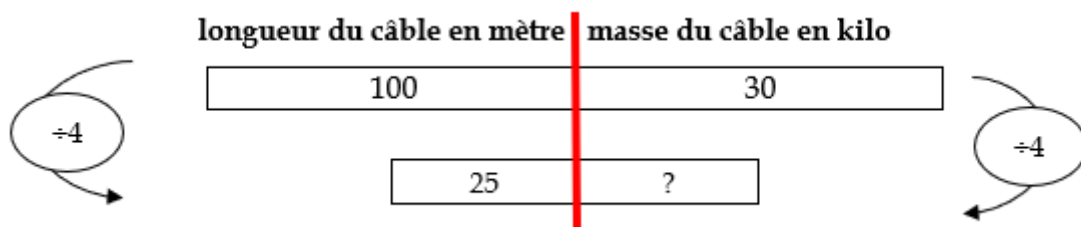
Combien pèsent 25 mètres de ce même câble ?

Nous allons représenter ce problème avec des barres de la même manière.

Laisser les élèves chercher un peu puis faire la représentation au fur et à mesure avec leur aide.

On obtient la représentation ci-dessous.

Remarque : si les élèves n'arrivent pas à trouver l'opérateur pour passer de 100 à 25 ici $\div 4$, leur signaler qu'il est possible de le trouver en divisant 100 par 25.



On peut alors résoudre le problème.

$$30 \div 4 = 7,5$$

Un câble de 25 mètres de long pèse 7,5 kilogrammes.

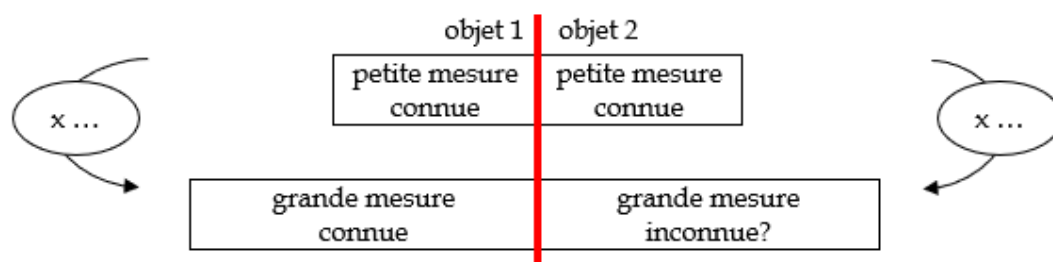
On demande alors aux élèves combien pèse un câble de 200 m, 50m...

On s'aperçoit qu'il est possible d'utiliser cette représentation pour calculer les différentes masses de ce câble puisque l'opérateur externe reste le même.

Suivant le niveau de compréhension des élèves, d'autres problèmes peuvent être travaillés avant de passer à l'institutionnalisation.

2.3 Institutionnalisation

Le PE conduit les élèves à généraliser la représentation.



On peut alors résoudre le problème.

Pour l'objet 1, on connaît toujours la petite mesure et la grande mesure ce qui nous permet de calculer l'opérateur.

L'opérateur est le même pour l'objet 2 car il s'agit d'une situation de proportionnalité.

Pour l'objet 2 :

- soit je cherche la petite mesure et je divise la grande mesure par l'opérateur,
- soit je cherche la grande mesure et je multiplie la petite mesure par l'opérateur.

Cette représentation 5 sera affichée dans la classe comme référente d'une situation de proportionnalité et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

2.4 Entraînement

1 - Il faut 4 œufs dans un gâteau pour 8 personnes.

Combien d'œufs faudra-t-il pour 20 personnes ?

2 - 5 kg de cerises coûtent 19 €.

Combien coûtent 15 kg ?

3 - Un artisan fabrique 2 jouets en bois en 10 H.

Combien en fabrique-t-il en 40 H ?

4 - La maitresse doit acheter des ardoises.

Cinq ardoises coûtent 10,50€.

La maitresse en commande 10.

Combien va-t-elle payer ?

5 - Une voiture peut parcourir 38 kilomètres avec 1 litre de carburant.

Combien faudra-t-il de litres pour parcourir 760 kilomètres ?

6 - Une machine imprime 60 cartes de vœux en 1 minute.

A cette vitesse, combien de temps sera nécessaire pour imprimer 3 000 cartes de vœux ?

7 - Il faut 6 œufs pour 1 gâteau.

Combien d'œufs faudra-t-il pour 12 gâteaux ?

8 - Il faut 72 œufs pour 12 gâteaux.

Combien d'œufs faudra-t-il pour 1 gâteau ?

9 - Il faut 6 œufs pour 1 gâteau.

Combien de gâteaux pourra-t-on faire avec 72 œufs ?

3. Proportionnalité : passage par l'unité

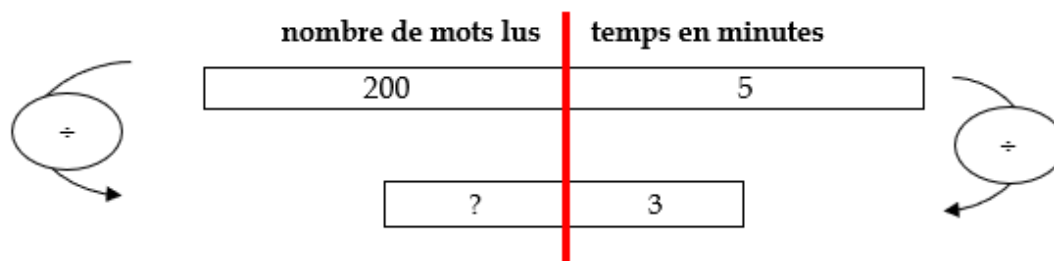
Certains problèmes ne peuvent se résoudre qu'en passant par l'unité car il est difficile de trouver un opérateur en passant de la petite mesure à la grande mesure voire impossible car on trouve un nombre infini.

3.1 Exemple 1

Un enfant lit 200 mots en 5 minutes.

Combien lira-t-il de mot en 3 minutes ?

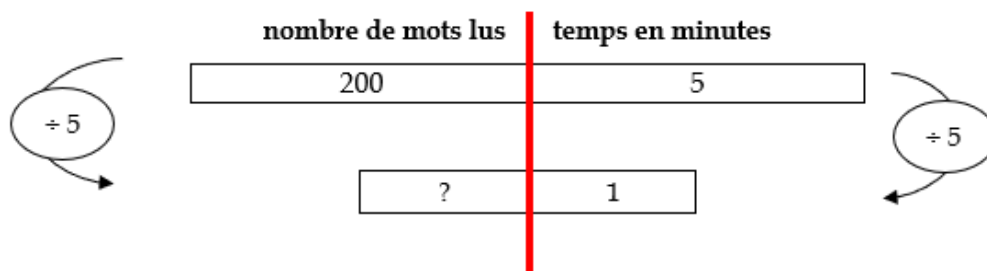
Le PE représente le problème comme précédemment, guidé par ses élèves et il obtient la représentation suivante.



Pour commencer, on cherche l'opérateur. Les élèves s'aperçoivent rapidement qu'il est difficile à trouver. Certains commencent à poser la division $5 \div 3$ et se rendent compte qu'elle est infinie.

Le PE explique que pour résoudre ce problème, il va d'abord falloir trouver combien l'enfant lit de mots en 1 minute.

On trouve alors l'opérateur. Pour passer de 5 à 1, on divise par 5.



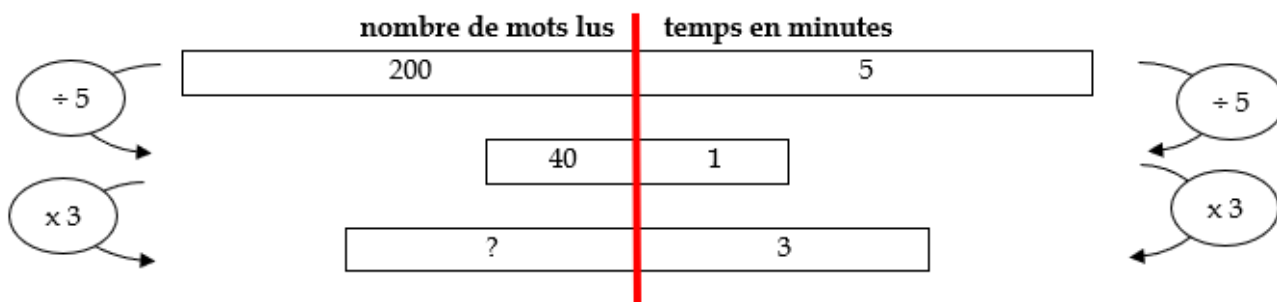
On peut alors résoudre le problème.

$$200 \div 5 = 40$$

L'enfant lit 40 mots à la minute.

Pour trouver combien il lit de mots en 3 minutes, on complètera la représentation.

On trouve l'opérateur. Pour passer de 1 à 3, on multiplie par 3.



On peut alors résoudre le problème.

$$40 \times 3 = 120$$

L'enfant lit 120 mots en 3 minutes.

3.2 Exemple 2

La maitresse doit acheter des ardoises. 5 ardoises coutent 10,50 €.

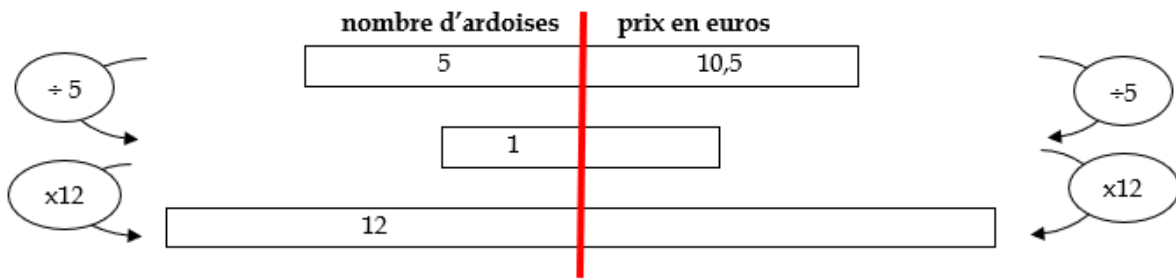
La maitresse en commande 12.

Combien va-t-elle payer ?

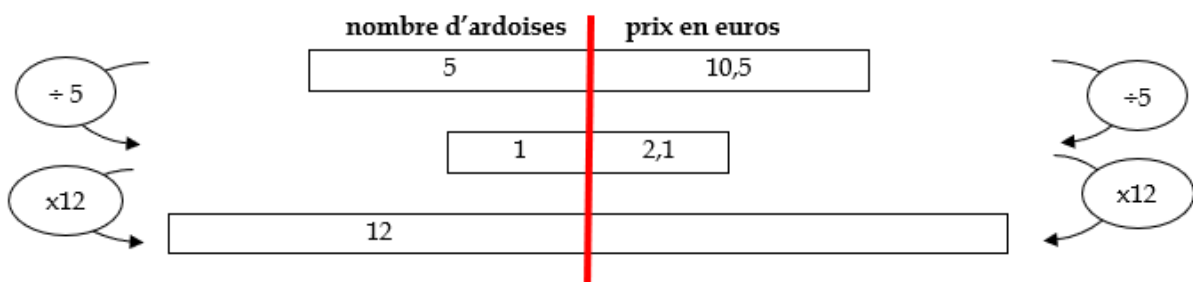
Le PE dit aux élèves qu'il s'agit d'un problème de proportionnalité avec un passage par l'unité afin de s'entraîner.

Il laisse quelques minutes aux élèves pour qu'ils commencent à essayer de résoudre ce problème en laissant la représentation du problème précédent au tableau. Il passe dans les rangs pour guider ceux qui ont du mal à commencer ou à trouver les opérateurs.

Après une lecture oralisée, le PE représente le problème au tableau guidé par ses élèves et obtient alors la représentation suivante.



On peut alors résoudre le problème. On cherche d'abord le nombre intermédiaire en résolvant l'opération : $10,5 : 5$. On obtient 2,1 qu'on place dans la représentation.



On termine en faisant $2,1 \times 12 = 25,2$.
La maîtresse va payer 25,2 euros pour 12 ardoises.

3.3 Autres problèmes

Avant de passer à l'institutionnalisation, le PE propose d'autres problèmes à ses élèves jusqu'à ce qu'ils aient bien assimilé la représentation.

1 - 4 mangues coûtent 18 €.

Combien coûtent 10 mangues ?

2 - 17 jeux coûtent 255 €.

Combien coûtent 13 jeux ?

3 - Le directeur de l'école a payé 96 € pour une commande de 16 livres « Chair de poule » pour mettre dans la bibliothèque de l'école.

Il passe une deuxième commande de 13 livres.

Combien va-t-il payer ?

4 - Pierre achète un rôti de 2 kg. Il paie 26 euros.

Quel est le prix d'un rôti de 1,7 kg ?

5 - En 4 sauts, une sauterelle parcourt 38 mètres.

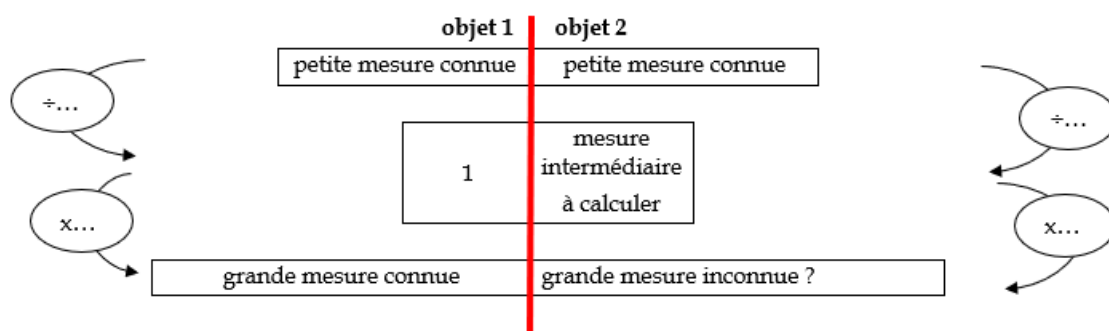
Quelle distance parcourt-elle en 7 sauts ?

6 - Pour fêter son anniversaire, Sidonie achète 9 litres de jus de fruits.

Sachant que 4 litres de jus de fruits coûtent 7 € 20, combien va-t-elle payer ?

3.4 Institutionnalisation

Le PE conduit les élèves à généraliser la représentation.



On peut alors résoudre le problème.

Pour l'objet 1, on connaît toujours la petite mesure et la grande mesure ce qui nous permet de calculer l'opérateur de la petite mesure à l'unité et l'opérateur de l'unité à la grande mesure.

Les opérateurs sont les mêmes pour l'objet 2 car il s'agit d'une situation de proportionnalité.

Pour l'objet 2 :

- Je divise la petite mesure connue par l'opérateur et j'obtiens la mesure intermédiaire.
- Je multiplie la mesure intermédiaire par le deuxième opérateur et j'obtiens la grande mesure.

Cette représentation pour le passage à l'unité complétera la représentation 5 affichée dans la classe et sera donnée aux élèves (voir annexe 1).

3.5 Entraînement

Parfois, il peut être judicieux de ne pas passer par 1 mais par 2, 3, 4, 5, 10, 100... dans le but de simplifier les calculs. Quelques exemples sont proposés ci-dessous.

1 - 6 kg de fruits coûtent 21 €.

Combien coûtent 16 kg ?

Il peut être intéressant de passer par 2.

2 - 4 roses coûtent 18 €.

Combien coûtent 6 roses ?

Il peut être intéressant de passer par 2.

3 - 12 kg de fruits coûtent 18 €

Combien coûtent 10 kg ?

Il peut être intéressant de passer par 2.

4 - 8 ananas coûtent 12 €.

Combien coûtent 20 ananas ?

Il peut être intéressant de passer par 4.

5 - Pour un gâteau de 6 personnes, il faut 200 cl de lait.

Combien faudra-t-il de lait pour 15 personnes ?

Il peut être intéressant de passer par 3.

6 - 15 kg d'abricots coûtent 18 €

Combien coûtent 10 kg ?

Il est intéressant de passer par 5.

7 - 200 cahiers coûtent 14 €.

Combien coûtent 300 cahiers ?

Il peut être intéressant de passer par 100.

8 - 200 cahiers coûtent 15 €.

Combien coûtent 500 cahiers.

Il est intéressant de passer par 100 ou 50.

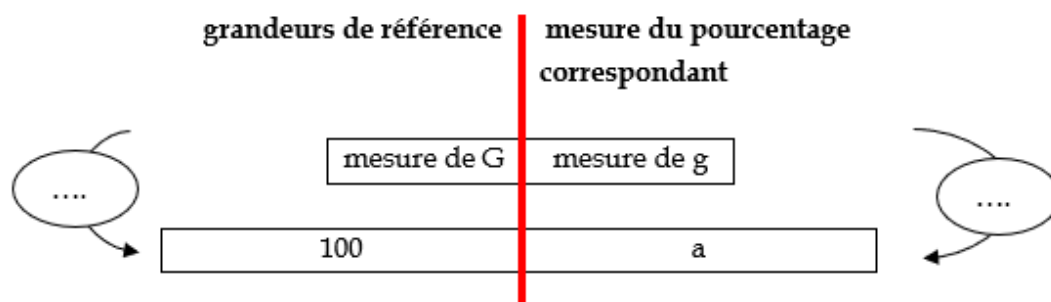
V - LES POURCENTAGES

1. Les pourcentages : qu'est-ce que c'est ?

Un pourcentage exprime un rapport entre deux mesures d'une même grandeur, on le note a%.

G est une grandeur dite de référence. On dit qu'une grandeur g, de même nature, dite grandeur sur laquelle porte le pourcentage, représente a% de la grandeur G, quand le coefficient de proportionnalité permettant de passer de la mesure de G à 100 est le même que celui permettant de passer de la mesure de g à a.

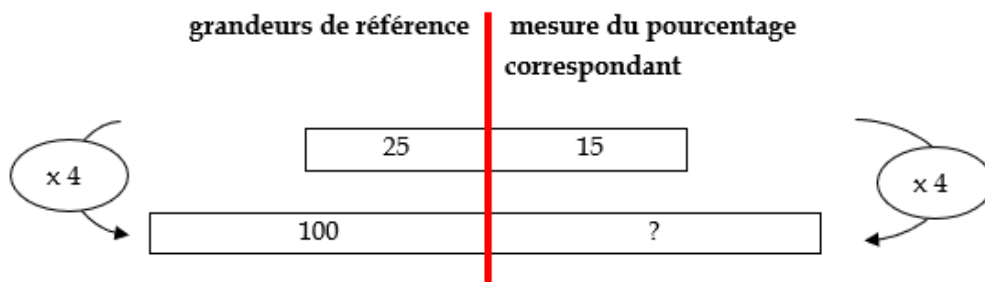
Les problèmes de pourcentages font partie des problèmes de proportionnalité.



Voici un exemple pour illustrer cette définition.

Dans une classe de 25 élèves, 15 élèves sont des filles.

Quel est le pourcentage de filles ?

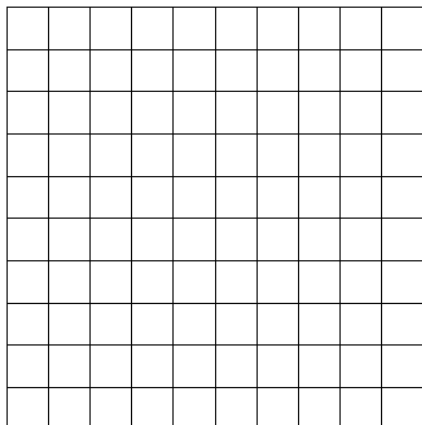


$$15 \times 4 = 60$$

Il y a 60% de filles dans la classe.

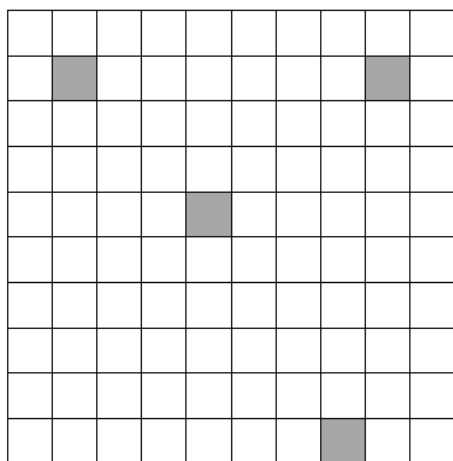
1.1 Activités préparatoires

Afin de faire comprendre les pourcentages aux élèves, on commence par travailler sur un quadrillage de 100 cases projeté au tableau.



Combien y-a-t-il de cases dans ce tableau ? Il y en a 100.

Le PE coche 4 cases au hasard.



Combien de cases sont cochées ?

4 cases sont cochées sur les 100 cases du tableau.

On a 4 cases cochées pour 100 cases en tout : 4 pour 100.

On peut écrire la fraction décimale correspondante : $\frac{4}{100}$.

C'est l'occasion de rappeler que $\frac{4}{100} = 0,04$.

Il y a une autre façon encore d'écrire qu'on a pris 4 cases sur les 100 cases qu'on avait.

On peut l'écrire ainsi. Ecrire 4 % au tableau.

Il faut lire 4 pour cent. Sur ce symbole, les 2 zéros représentent les 2 zéros de 100.

Le PE fait de même avec d'autres exemples : 7%, 25%, 37% par exemple.

Il explique alors que 4%, 7%, 25%...etc sont des pourcentages et il fait remarquer que dans le mot **pourcentage**, on peut lire les mots **pour cent**. Quand la valeur de référence est 100 unités, les cases cochées représentent 4, 7, 25, ... unités.

On travaille sur la proportionnalité par rapport à 100.

On est dans le monde de la multiplication et de la division.

On pourra associer pourcentages et fractions :

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} \text{ ce qui représente } 50 \%$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} \text{ ce qui représente } 25 \%$$

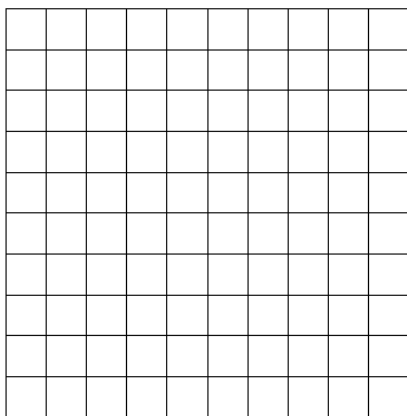
$$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} \text{ ce qui représente } 75 \% \dots$$

Ceci permettra de consolider la table de 25 et pourra aider à la recherche de l'opérateur.

Ceci est un exercice numérique qui ne doit pas faire oublier que : un pourcentage est un rapport de mesure donc un nombre sans dimension, les fractions elles, peuvent être des mesures.

1.2 Exercices d'application

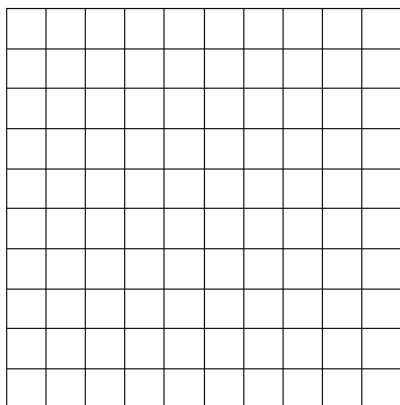
Exercice 1 : Coche 50 pour cent du quadrillage. 50 %



A quelle fraction décimale cela correspond-il ?

A quel nombre décimal cela correspond-il ?

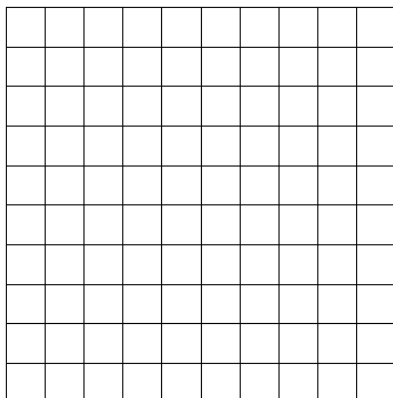
Exercice 2 : Coche 25 pour cent du quadrillage. 25 %



A quelle fraction décimale cela correspond-il ?

A quel nombre décimal cela correspond-il ?

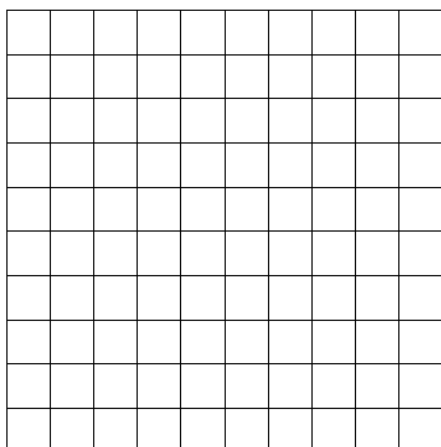
Exercice 3 : Coche 10 pour cent du quadrillage. 10 %



A quelle fraction décimale cela correspond-il ?

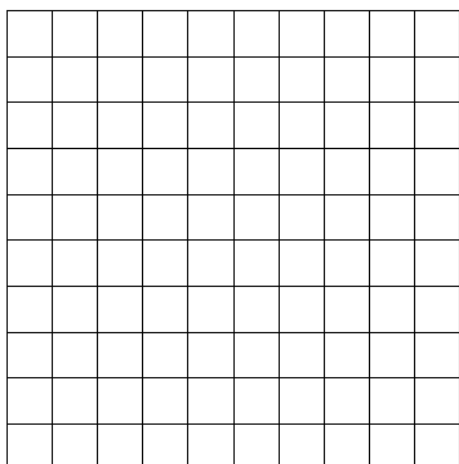
A quel nombre décimal cela correspond-il ?

Exercice 4 : Coche 5 % du quadrillage.



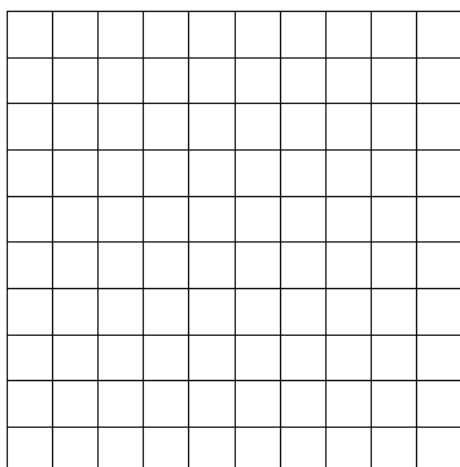
A quelle fraction décimale cela correspond-il ?
A quel nombre décimal cela correspond-il ?
Quel pourcentage du carré non coché reste-t-il ?

Exercice 5 : Coche 33 %.



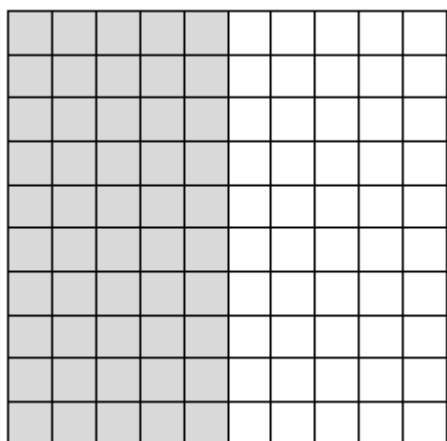
A quelle fraction décimale cela correspond-il ?
A quel nombre décimal cela correspond-il ?
Quel pourcentage du carré non coché reste-t-il ?

Exercice 6 : Coche 1 % du quadrillage.

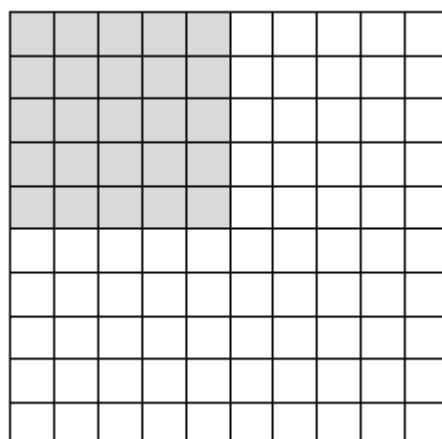


A quelle fraction décimale cela correspond-il ?
A quel nombre décimal cela correspond-il ?
Quel pourcentage du carré non coché reste-t-il ?

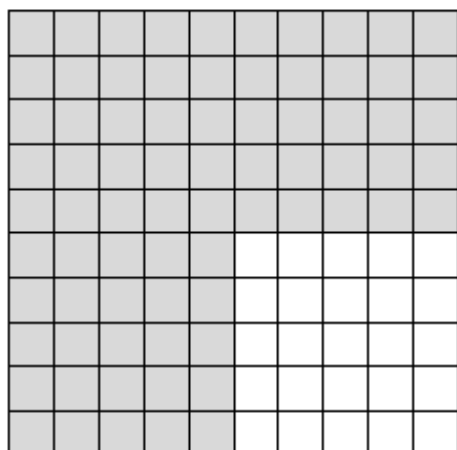
Exercice 7 : Trouve le pourcentage de la partie grisée.



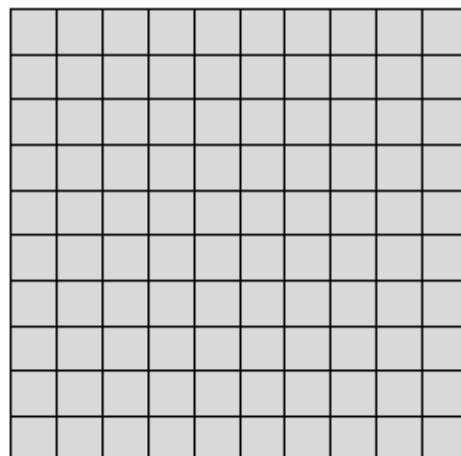
Pourcentage %
Fraction :
Nombre décimal :



Pourcentage %
Fraction :
Nombre décimal :



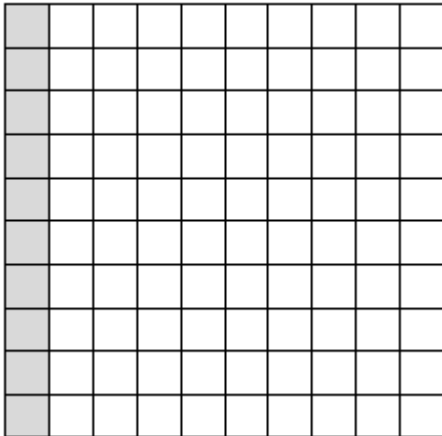
Pourcentage %
Fraction :
Nombre décimal :



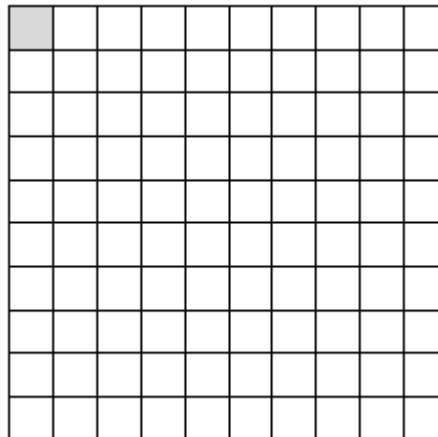
Pourcentage %
Fraction :
Nombre décimal :

Exercice 8 : trouve le pourcentage de la partie grisée et de la partie non grisée.

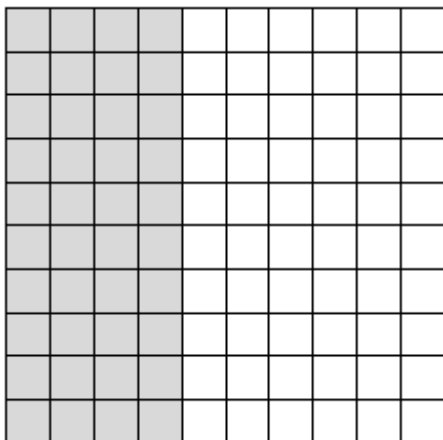
Le PE fait remarquer aux élèves que le pourcentage de la partie grisée plus le pourcentage de la partie blanche fait 100%.



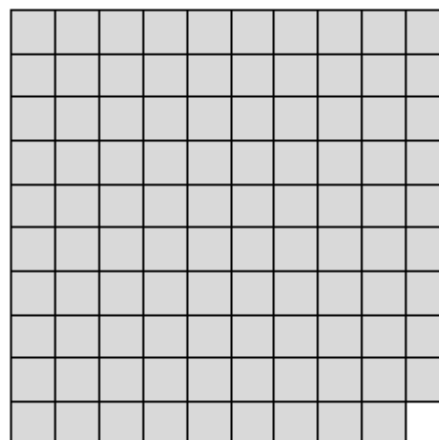
Pourcentage de la partie grisée %
 Pourcentage de la partie blanche %



Pourcentage de la partie grisée %
 Pourcentage de la partie blanche %



Pourcentage de la partie grisée %
 Pourcentage de la partie blanche %



Pourcentage de la partie grisée %
 Pourcentage de la partie blanche %

2. Représentation des problèmes de pourcentages

On rencontre trois types de problèmes avec les pourcentages : recherche du complément à 100%, calculer un pourcentage, appliquer un pourcentage.

2.1 Type 1 : le complément à 100

En général on considère que la grandeur sur laquelle porte le pourcentage est une partie de la grandeur de référence. Le pourcentage est alors inférieur à 100. Le complément de la grandeur de référence est alors un pourcentage de la grandeur de référence, pourcentage obtenu par soustraction du premier pourcentage à 100¹⁹.

Exemples

Exemple 1

Dans une école, il y a 100 élèves de CM1/CM2.

60% sont des garçons.

Quel est le pourcentage de filles ?

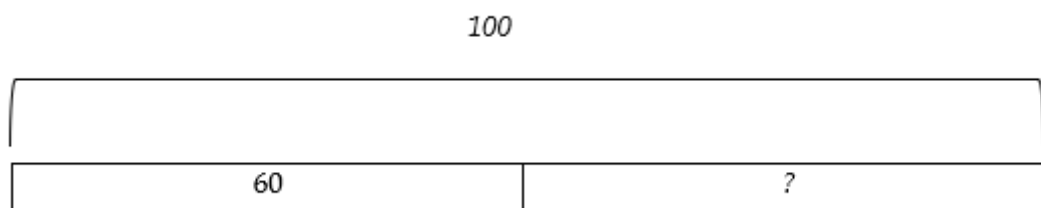
Le PE guide ses élèves pour résoudre ce problème.

Nous allons résoudre ce problème avec une barre.

La première partie représente le pourcentage de garçons dans la classe soit 60%.

La deuxième partie représente le pourcentage de filles dans la classe. C'est ce qu'on cherche.

Les deux parties forment le Tout, c'est-à-dire 100%.



Pour trouver le pourcentage de filles, il faut faire une soustraction. $100 - 60 = 40$

Il y a 40% de filles dans la classe.

Si nécessaire le PE peut proposer un deuxième exemple à ses élèves.

Exemple 2

M. Paul achète des fruits pour faire de la confiture. 10% sont abimés et 15% sont verts.

Combien de fruits sont corrects ?

Le PE guide ses élèves pour résoudre ce problème.

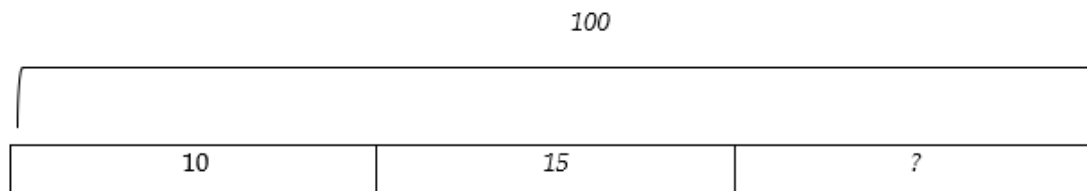
La première Partie représente le pourcentage de fruits abimés.

La deuxième Partie représente le pourcentage de fruits verts.

La troisième Partie représente le pourcentage de fruits corrects.

¹⁹ Ce n'est pas toujours le cas, un pourcentage peut -être supérieur à 100, comme dans l'exemple 2 du type 2.

Les trois Parties forment le Tout c'est-à-dire 100%.



Pour trouver le pourcentage de fruits corrects, il faut d'abord calculer le pourcentage de fruits abimés et verts : $10 + 15 = 25$.

Ensuite il faut faire une soustraction $100 - 25 = 75$

Il y a 75 % de fruits corrects.

Exercices d'applications

La mesure du tout doit être égale à 100.

1 - Pour 100 élèves d'une école, 75 % pratiquent un sport en dehors de l'école.

Quel pourcentage d'élèves ne pratiquent pas de sport en dehors de l'école ?

2 - Dans une classe, 25 % des élèves viennent à l'école en voiture.

Quel pourcentage des élèves ne viennent pas en voiture ?

3 - Des élèves sèment des graines.

70 % des graines germent.

Quel pourcentage des graines n'ont pas germé ?

4 - 95 % des élèves mangent au restaurant scolaire.

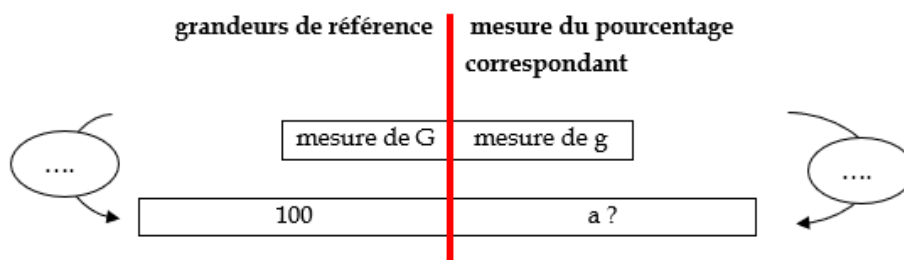
Quel pourcentage d'élèves n'y mangent pas ?

5 - Dans un paquet de billes, 25 % sont rouges, 50 % sont jaunes et le reste est bleu.

Quel est le pourcentage de billes bleues. ?

2.2 Type 2 : calculer le pourcentage

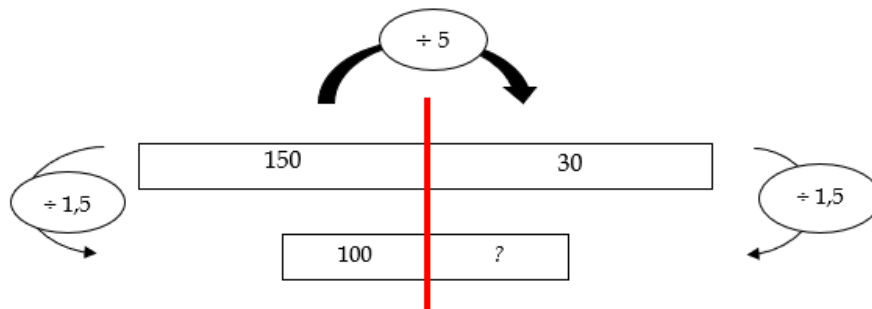
La mesure de G est connue, la mesure de g est connue. On cherche quel pourcentage de G que g représente. On dit qu'on recherche un pourcentage.



Voici 2 exemples pour illustrer cette définition.

Exemple 1 : Lors des promotions un vendeur propose une remise de 30€ sur un blouson à 150€.

Quel est le pourcentage de remise ?

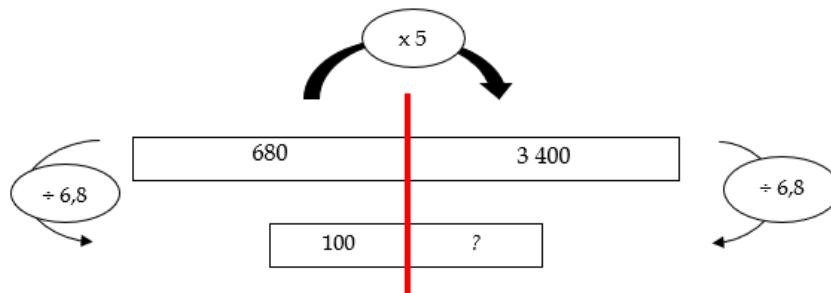


L'opérateur $\div 1,5$ étant difficile à trouver pour les élèves, un opérateur plus simple peut être trouvé en passant d'une colonne à l'autre.

$$100 \div 5 = 20$$

La remise est de 20%.

Exemple 2 : Dans un verger on a récolté 680 kg de pommes saines, sur une récolte de 3400 kg. Si on se base sur cette situation : quelle quantité de pommes doit-t-on récolter pour avoir 1000 kg de pommes saines ?



L'opérateur $\div 6,8$ étant difficile à trouver pour les élèves, vu qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité, un opérateur plus simple peut être trouvé en passant d'une colonne à l'autre.

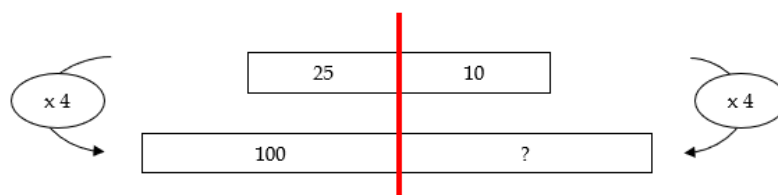
$$100 \times 5 = 500$$

Exemples

Exemple 1

Dans une classe de 25 élèves, il y a 10 filles et 15 garçons.

Quel est le pourcentage de filles ?



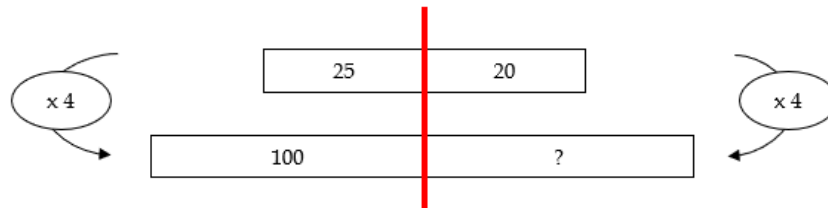
$$10 \times 4 = 40$$

Il y a 40% de filles dans cette classe.

Exemple 2

Dans une classe de 25 élèves, 20 élèves vont choisir l'anglais.

Quel pourcentage d'élèves va choisir anglais ?



$$20 \times 4 = 80$$

80% d'élèves choisissent l'anglais dans cette classe.

Exercices d'application

1 - Dans un CM2 de 25 élèves, 17 élèves vont choisir l'anglais au collège.

Quel pourcentage d'élèves vont choisir l'anglais ?

Quel pourcentage d'élèves vont choisir une autre langue ?

2 - Dans une classe de 20 élèves, 2 élèves sont gauchers.

Quel pourcentage d'élèves sont gauchers ?

Quel pourcentage d'élèves sont droitiers ?

3 - Parmi les 50 élèves qui sont en CM2, 8 pratiquent le tennis.

Quel pourcentage d'élèves pratiquent le tennis ?

4 - Dans une boîte de 200 jetons :

- 100 jetons sont rouges.

- 50 jetons sont bleus.

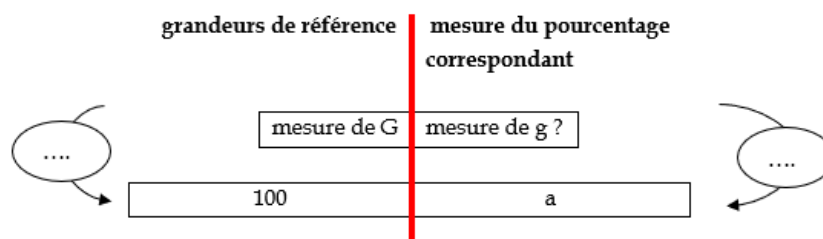
- 10 jetons sont jaunes.

- les autres jetons sont blancs.

Quel est le pourcentage de jetons pour chaque couleur ?

2.3 Type 3 : appliquer le pourcentage

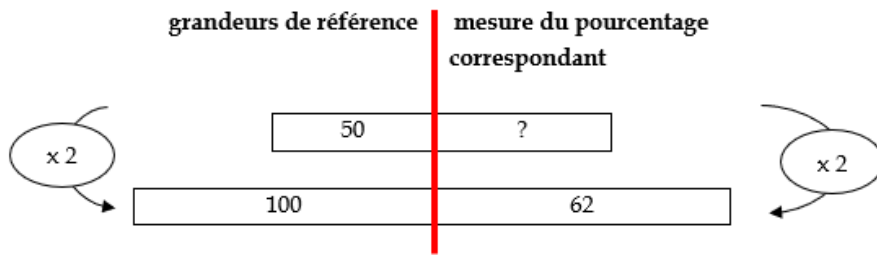
La mesure de G est connue, on cherche la mesure de g correspondant à un pourcentage a% connu. On dit que l'on applique un pourcentage.



Voici 3 exemples pour illustrer cette définition.

Exemple 1 : Dans une assemblée de 50 personnes, il y a 62% de femmes.

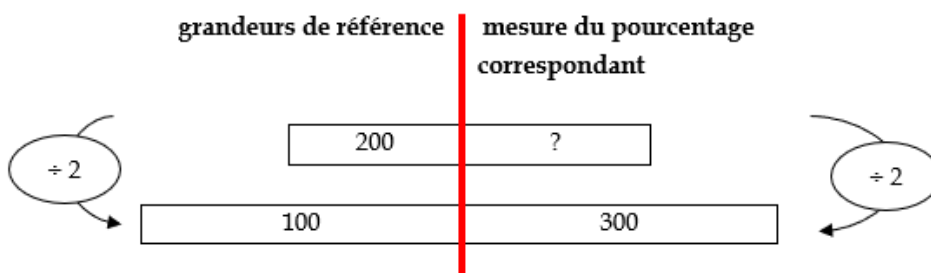
Combien il y a-t-il de femmes ?



$$? \times 2 = 62 \text{ ou } 62 \div 2 = ?$$

Si, dans une assemblée de 50 personnes, 62% sont des femmes, il y a 31 femmes

Exemple 2 : Dans un bassin la hauteur de l'eau est de 200 cm. Suite à un gros orage la hauteur de l'eau augmente de 300%. Quelle est la hauteur d'eau après l'orage ?

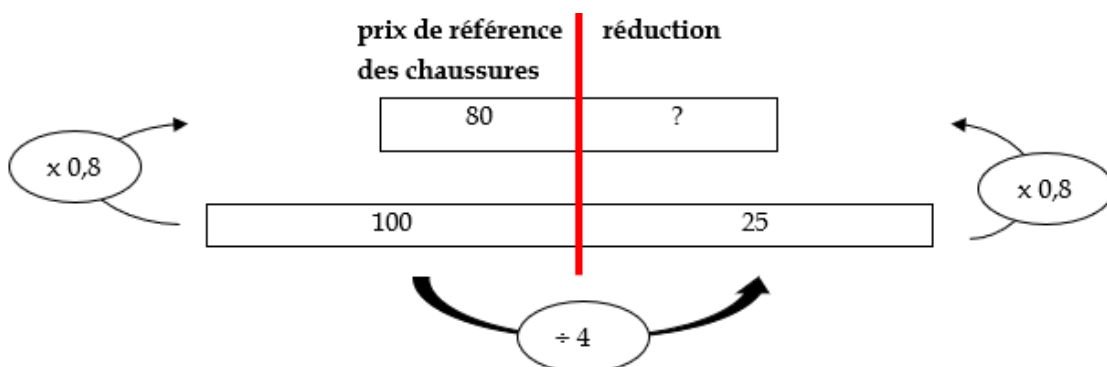


$$? \div 2 = 300 \text{ ou } 300 \times 2 = ?$$

Suite à l'orage la hauteur d'eau sera 600 cm

Exemple 3 : Une paire de chaussure de sport valant 80 € est soldée à 25%.

Quel est le montant de la réduction ?



L'opérateur $\times 0,8$ nous semble difficile à trouver pour les élèves de CM2. Il convient donc de rappeler que nous sommes dans une situation de proportionnalité. Si un opérateur peut être trouvé pour passer d'une ligne à l'autre, un autre opérateur peut être trouvé pour passer d'une colonne à l'autre. Ici un opérateur bien plus simple permet de passer de 100 à 25.

$$80 \div 4 = 20$$

La réduction sera donc de 20 euros.

Il peut être remarqué une relation avec les fractions : 25%, c'est le quart de 100.

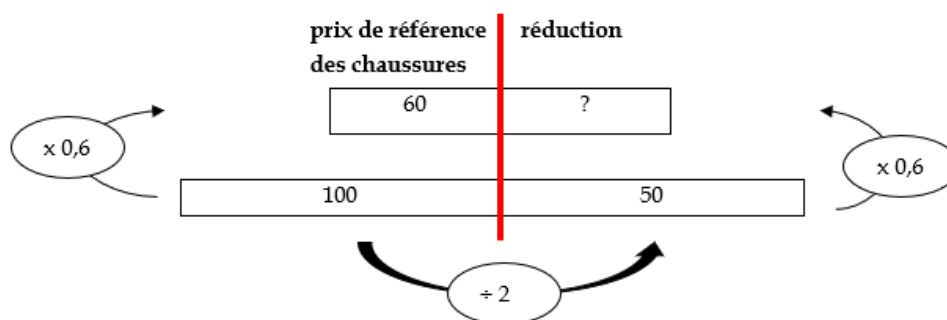
Le PE propose le même exercice avec des nombres différents avant de passer aux exercices d'entraînement.

Exemple

Une paire de chaussure de sport valant 60€ est soldée à 50%.

Quel est le nouveau prix des chaussures ?

On obtient la représentation suivante :



$$60 \div 2 = 30$$

Le montant de la réduction est 30€.

Le nouveau prix des chaussures est de : $60 - 30 = 30€$

Le PE fait remarquer que dans ce cas le montant de la réduction et le nouveau prix est le même.

Exercices d'application (à faire avec les élèves)

Les soldes sont là !

1 - Un jouet à 40 € est soldé avec une réduction de 25 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

2 - Un vêtement à 60 € est soldé avec une réduction de 20 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

3 - Un lot de bonbons à 30 € est soldé avec une réduction de 10 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

4 - Un ordinateur à 400 € est soldé avec une réduction de 75 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

3. Exercices d'entraînement (à faire faire par les élèves)

1 - Dans un paquet de bonbons, 50 % sont à la fraise, 20 % sont au caramel et le reste est à la vanille.
Quel pourcentage de bonbons est à la vanille ?

2 - Dans une classe de 25 élèves, 10 font du foot, 9 font du hand et les autres font du basket.

Quel est le pourcentage d'élèves pour chaque sport ?

3 - Un jouet à 60 € est soldé à 25 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

4 - Une veste à 100 € est soldée à 60 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

Remarque pour le PE : pour ce problème il n'y a pas de calculs à faire. Le résultat se lit directement.

5 - Dans une classe de 20 élèves, 75 % sont des garçons.

Combien y-a-t-il de garçons et de filles ?

6 - Un jardinier cultive un jardin de 200 m².

Il décide de mettre des fleurs sur 30 % de la surface et de cultiver le reste de la surface en légumes.

Quelle surface sera consacrée aux fleurs ?

Quelle surface sera consacrée aux légumes ?

7 - Dans un sac de billes, 48 % sont en verre, 22 % sont en métal et le reste est en terre.

Quel pourcentage de billes est en terre ?

8 - Un jouet à 60 € est soldé à 20 %.

Quel est le montant de la réduction ?

Quel est le nouveau prix ?

9 - Dans une classe de 25 élèves, 12 font de la musique, 8 font du théâtre et les autres font de la danse.

Quel est le pourcentage d'élèves pour chaque activité ?

10 - Dans une classe de 20 élèves, 20 % viennent en tenue de sport tous les jours.

Cela concerne combien d'élèves ?

VI - LES PROBLEMES A DEUX ETAPES

1 - Nathan achète 4 paquets de gâteaux et 1 paquet de bonbons pour 10 €.

Le paquet de bonbons coûte 4 €.

Combien coûte un paquet de gâteaux ?

2 - Trois sachets de 25 billes sont à répartir entre 6 joueurs.

Combien restera-t-il de billes non partagées ?

3 - Bill a 12 billes.

Ben en a 2 fois plus que Bill.

Boule en a 2 fois plus que Bill.

Combien ont-ils de billes en tout ?

4 - Dans une résidence on a 1 familles de 2 personnes, 2 familles de 3 personnes et 3 familles de 4 personnes.

Une personne consomme 150 litres d'eau par jour.

Quelle est la consommation d'eau de la résidence en 1 semaine ?

CONCLUSION

Comme tous les outils, la représentation de problèmes avec la méthode en barre a ses limites.

La représentation, en elle-même, peut être source de difficultés de compréhension, ce qui nécessite qu'elle soit construite avec les élèves pour qu'elle soit porteuse de sens. C'est certes un investissement, mais il en vaut la peine.

Cet outil a plusieurs avantages.

Les élèves pour résoudre des problèmes peuvent s'appuyer sur une démarche (recherche des informations pertinentes, choix de la représentation, calcul, réponse) et sur un référentiel de représentations. Chaque étape est l'occasion d'analyser la situation afin de motiver les choix faits, donc de consolider la compétence des élèves. Nous avons remarqué que même les plus démunis se mettent au travail et cherchent, ils sont rassurés quant à leurs capacités à résoudre des problèmes. Lucas élève de CM2 disait : « Avec cette méthode, je n'ai plus de problèmes avec les problèmes ! ».

La modélisation numérique de situations concrètes s'appuie sur de nombreux domaines d'apprentissage qui interagissent les uns sur les autres²⁰. Il est difficile pour l'enseignant de déterminer un cheminement cohérent dans ce domaine. L'utilisation de représentations intermédiaires et l'analyse des fonctions de ces représentations²¹, permettent d'avoir des éléments pour organiser l'enseignement et donner aux élèves des arguments pour choisir des techniques de résolution. Elle est à la fois le fil rouge des apprentissages en matière de résolution de problèmes d'arithmétique et le prétexte pour analyser les caractéristiques des situations à modéliser.

Le recours aux représentations en barres peut être rapidement chronophage. Le but est de pouvoir s'en passer après avoir compris l'enjeu des mathématisations attendues.

Nous espérons que ce travail rendra service aux collègues à la recherche de réponses pédagogiques aux difficultés de leurs élèves sur la résolution de problèmes.

²⁰ Voir à ce sujet l'apport théorique : « Grandeurs, mesure et opérations », en annexe de ce document.

²¹ Voir à ce sujet l'apport théorique : « Enjeux des représentations en barres », en annexe de ce document.

ANNEXES

ANNEXE 1 : TRACES ECRITES POUR LES ELEVES

PROBLÈMES ADDITIFS ou SOUSTRACTIFS

Représentation 1

J'ai un TOUT et plusieurs parties.

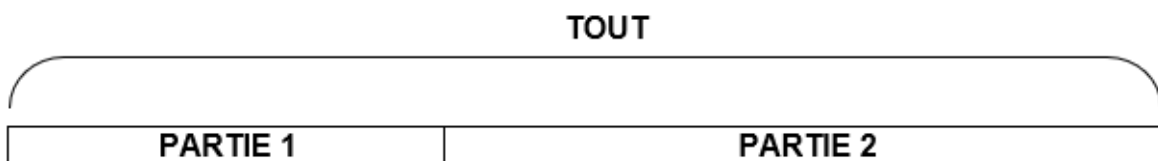
Informations

TOUT

PARTIE 1

PARTIE 2

Représentation



Opération

1. Je connais les PARTIES et je cherche le TOUT et je fais une addition.
 $PARTIE 1 + PARTIE 2 = TOUT$

Exemple :

Dans une classe, il y a 15 filles et 5 garçons.

Combien y-a-t-il d'élèves dans cette classe ?

2. Je connais le TOUT et une PARTIE, et je cherche l'autre PARTIE et je fais une soustraction.

$$TOUT - PARTIE 1 = PARTIE 2$$

Exemple :

Une salle de cinéma a 100 places.

85 places sont occupées.

Combien reste-t-il de places libres ?

Représentation 2

Problèmes de comparaison

J'ai deux TOUT et un ECART.

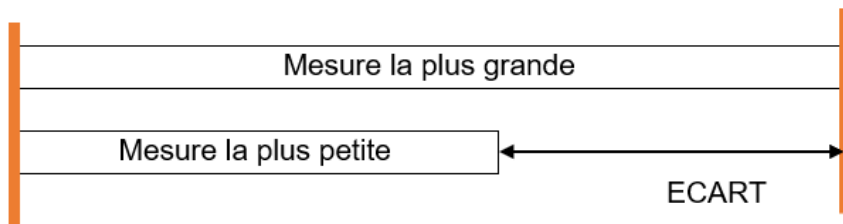
Informations

Mesure la plus grande

Mesure la plus petite

ECART

Représentation



Opération

1. *Je connais la mesure la plus grande, la mesure la plus petite et je cherche l'écart.
Je fais une soustraction.*

Mesure la plus grande - mesure la plus petite = ECART

Exemple :

Hervé possède 185 billes. Betty possède 123 billes.

Combien Betty a-t-elle de billes en moins ?

ou

Combien Hervé a-t-il de billes en plus ?

2. **Je connais la mesure la plus grande et l'ECART et je cherche la mesure la plus petite.
Je fais une soustraction.**

Mesure la plus grande - ECART = mesure la plus petite

Exemple :

La différence d'âge entre Catherine et son papa est de 29 ans.

Quel est l'âge de Catherine, si son père a 48 ans ?

3. **Je connais la mesure la plus petite et l'ECART et je cherche la mesure la plus grande.
Je fais une addition.**

Mesure la plus petite + ECART = mesure la plus grande

Exemple :

Un VTT coûte 189 € à Sporéco et 25€ de plus à Vélothlon.

Quel est le prix du VTT à Vélothlon ?

PROBLÈMES DE MULTIPLICATION OU DE DIVISION

Représentation 3

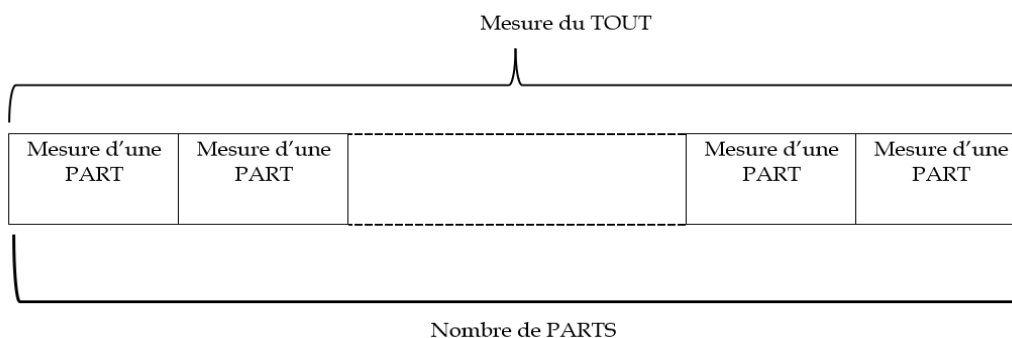
Informations

Mesure du TOUT

Mesure d'une PART

Nombre de PARTS

Représentation



Opération

1. Je cherche le TOUT, je connais la mesure d'une PART et le nombre de PARTS. Je fais une multiplication.

Mesure d'une PART x nombre de PARTS = TOUT

Exemple :

Un fleuriste doit composer 40 bouquets de 5 roses.

De combien de roses a-t-il besoin ?

2. Je cherche la mesure d'une PART, je connais le TOUT et le nombre de PARTS. Je fais une division.

TOUT ÷ nombre de PARTS = mesure d'une PART

Exemple :

Un fleuriste a 210 roses.

Il doit composer 30 bouquets.

Combien y-aura-t-il de roses dans chaque bouquet ?

3. Je cherche le nombre de PARTS, je connais le TOUT et la mesure d'une PART. Je fais une division

TOUT ÷ mesure d'une PART = nombre de PARTS

Exemple :

Un fleuriste a 300 roses. Il doit composer des bouquets de 15 roses.

Combien de bouquets va-t-il composer ?

Représentation 4

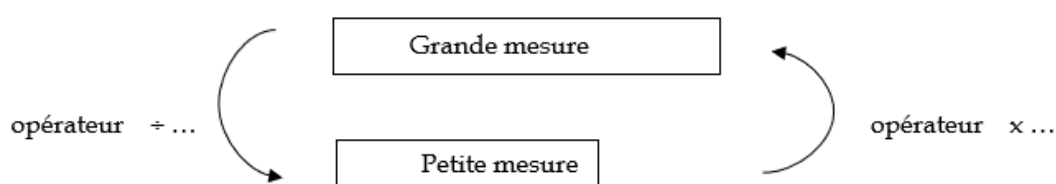
Informations

grande mesure

petite mesure

opérateur

Représentation



Opération

- 1. Je cherche la grande mesure, je multiplie la petite mesure par l'opérateur.**

$$\text{Petite mesure} \times \text{opérateur} = \text{grande mesure}$$

Exemple :

Paul a 28 images.

Marie a 2 fois plus d'images que Paul.

Combien Marie a-t-elle d'images ?

- 2. Je cherche la petite mesure, je divise la grande mesure par l'opérateur.**

$$\text{Grande mesure} \div \text{opérateur} = \text{petite mesure}$$

Exemple :

Ben a 100 €.

Jimmy a 2 fois moins d'argent que Ben.

Combien d'argent a donc Jimmy ?

- 3. Je cherche l'opérateur, je divise la grande mesure par la petite.**

$$\text{Grande mesure} \div \text{petite mesure} = \text{opérateur}$$

Exemple :

Une bague en argent coûte 6 €. Une bague en or coûte 18 €.

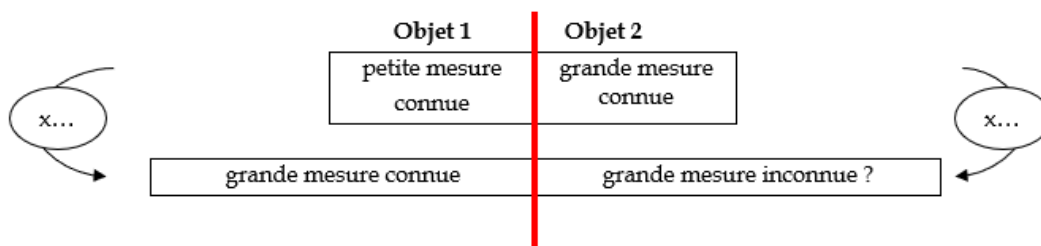
Combien de fois plus coûte la bague en or ?

PROBLÈMES DE PROPORTIONNALITÉ

Représentation 5

1. Grandeurs proportionnelles

Pour l'objet 1, on connaît toujours la petite mesure et la grande mesure ce qui nous permet de calculer l'opérateur. Grande mesure connue \div petite mesure connue = opérateur



L'opérateur est le même pour l'objet 2 car il s'agit d'une situation de proportionnalité. Une fois qu'on connaît l'opérateur, on peut résoudre le problème.

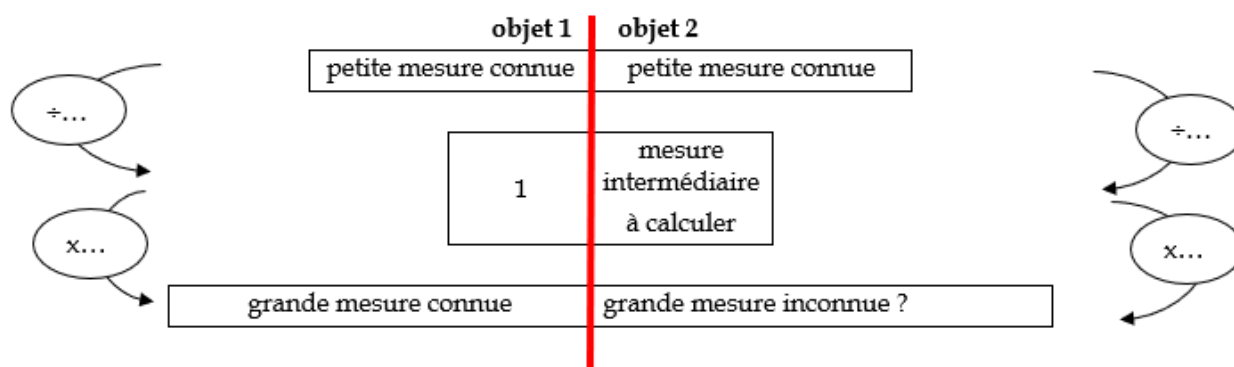
Petite mesure \times opérateur = grande mesure

2. Passage par l'unité

Pour résoudre certains problèmes, il est nécessaire de passer par l'unité.

Pour l'objet 1, on connaît la petite mesure, on calcule l'opérateur pour 1.

Puis on cherche l'opérateur pour passer de 1 à la grande mesure connue.



On utilise alors les deux mêmes opérateurs pour l'objet 2. On calcule d'abord la mesure pour 1 unité puis on calcule la grande mesure.

ANNEXE 2 : GRANDEUR, MESURE ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Annie NOIRFALISE
IREM de Clermont Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Motivations de ce texte

Ce texte a été proposé comme apport théorique dans le cadre du travail conduit autour de l'utilisation des représentations en barres comme aide à la résolution de problèmes arithmétiques à l'école primaire et au début du collège.

En cycle 2 et 3 les textes officiels évoquent explicitement l'utilisation des quatre opérations pour la résolution de problèmes portant sur les **grandeurs** et leur **mesure**²², dans ces mêmes textes la terminologie **modélisation arithmétique** est aussi utilisée.

Très vite, il est apparu que les représentations en barres modélisaient certaines des grandeurs qui sont en jeu dans le problème à résoudre et les manipulations qu'elles subissent dans le récit proposé dans le texte, (réunion, partage, ...), ceci en faisant abstraction de la nature de ces grandeurs. Les notions de grandeurs, d'opérations sur les grandeurs et de mesure des grandeurs sont au centre du travail de la modélisation à faire. Une clarification concernant ces notions a paru souhaitable aux membres du groupe.

Dans ce qui suit on trouvera des éléments concernant les grandeurs, lesquelles relèvent du monde sensible. La construction des opérations sur les grandeurs, utilisant des manipulations matérielles, sera évoquée ; elles vont permettre d'établir un pont entre le monde sensible et le monde mathématique, de montrer l'intrication des trois notions – grandeurs, mesures, nombres –, et d'aborder le problème de la modélisation arithmétique.

Ce texte semble aborder des sujets assez éloignés de la résolution de problèmes arithmétiques comme par exemple la construction de la quantité ou des nombres entiers. Néanmoins ces « détours » nous semblent utiles pour comprendre l'enjeu de la modélisation numérique et revenir sur la construction des quatre opérations. En cours de travail il est paru indispensable, pour que les représentations en barres puissent assurer une fonction efficace dans le choix d'une opération²³, de revenir sur des questions telles que : « une addition, une multiplication, une soustraction, une division, à quoi ça sert ? », y compris avec des élèves de cycle 3, ce qui a conduit les membres du groupe à revenir sur la construction des quatre opérations.

²² D'après le BOEN n° 31 du 30 juillet 2020 :

« **Programme du cycle 2 En vigueur à la rentrée 2020**

Résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul

- Résoudre des problèmes issus de situations de la vie quotidienne ou adaptés de jeux portant sur des grandeurs et leur mesure, des déplacements sur une demi-droite graduée, etc., conduisant à utiliser les quatre opérations :

- sens des opérations ;
- problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction) ;
- problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division).
- Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques :
- sens des symboles +, -, ×, : »

« **Programme du cycle 3 En vigueur à la rentrée 2020**

Modéliser

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.

- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité. »

²³ On parlera de fonction instrumentale des représentations en barres. Voir à ce sujet « Enjeux des représentations en barres », annexe 3 de ce document.

I - LES GRANDEURS

S'intéresser aux grandeurs permet de percevoir la fonction des nombres (et plus tard des mathématiques plus complexes) pour connaître le monde dans lequel nous vivons.

Les nombres servent à répondre à des questions que l'on peut se poser sur le monde qui nous entoure, essentiellement, dans un premier temps, des questions qui portent sur des **grandeurs** : qu'est-ce qui est aussi grand que ? Quelle quantité restera-t-il si j'enlève ça ? Quelle quantité j'aurai si je partage en plusieurs parties ? ... Et les nombres, entiers tout d'abord, décimaux et rationnels ensuite, sont de prodigieux outils pour évaluer et prévoir la valeur de grandeurs, soumises à des manipulations matérielles : partages, réunions, ..., sans avoir à faire effectivement ces manipulations. Dans les lignes qui suivent nous allons tenter, dans un premier temps, de préciser ce que l'on entend par grandeur. Dans un second temps nous reviendrons sur la mesure des grandeurs passant ainsi du monde matériel au monde mathématique, plus exactement numérique. Enfin nous reviendrons à des considérations plus didactiques.

1. Nature des grandeurs

Quand on parle de grandeurs, on s'intéresse à des éléments du monde sensible.

La notion de « grandeur » n'est pas simple à définir car elle renvoie à la prise en compte de données relevant du monde matériel, physique ou vivant, et fait intervenir des pratiques sociales en général implicites. Précisons :

- Des données de nature très différentes peuvent être impliquées : ainsi dira-t-on qu'il fait chaud ou froid dans une pièce, qu'une personne est plus ou moins aimable ou intelligente qu'une autre, qu'une valise est plus ou moins lourde qu'un sac, qu'un objet vendu est plus ou moins cher qu'un autre, qu'une distance est plus ou moins grande qu'une autre, qu'un chien est plus ou moins méchant que le mien, etc.
- Chacune des assertions précédentes porte implicitement sur une grandeur dont la nature relève d'un consensus social. En effet prononcer de telles assertions suppose qu'on a la possibilité de se centrer sur une caractéristique ou un comportement d'un élément du monde qui nous entoure, (objet matériel, phénomène physique, comportement d'être vivant, ...), en négligeant les autres attributs de l'élément auquel on s'intéresse et en étant compris de la communauté à laquelle on s'adresse. Il ne nous vient généralement pas à l'idée de comparer à la fois la masse d'un objet, par exemple d'un légume, et la température qui est la sienne dans le magasin qui le vend, parce nous avons appris à construire deux grandeurs différentes « masse » et « température », associées à un même objet, deux *grandeurs* qui ne sont pas *de même nature* et qui interviennent pour accomplir des tâches différentes. Ces apprentissages ne relèvent pas, pour la plupart, d'activités à intention didactique mais se font par imprégnation, par ajustement à des pratiques sociales fonctionnelles pour accomplir certaines tâches : la température pour s'habiller plus ou moins chaudement, l'amabilité pour choisir ses fréquentations,
- Chacune des assertions précédentes correspond à un jugement portant sur une grandeur d'une nature donnée. L'aptitude à porter un tel jugement suppose elle-même qu'on ait au préalable fréquenté des situations ou rencontré des phénomènes de même nature, possédant un caractère commun, afin de pouvoir comparer ce que l'on pourrait appeler, sur les exemples précédents, la température, l'amabilité, l'intelligence, la masse, le prix, la longueur, la méchanceté..., catégories que l'on désigne sous le terme de grandeurs. Si l'on s'intéresse à des grandeurs de même nature,

par exemple la température de deux pièces, alors il devient souvent possible de les comparer, donc de dire si elles sont égales, différentes, et parfois, dans un tel cas, de dire que l'une est plus grande ou plus petite que l'autre. Une telle comparaison peut être obtenue soit de manière subjective, à travers la perception du chaud ou du froid qu'une personne éprouve, soit de manière plus objective – mais néanmoins entachée d'une certaine incertitude, comme tout procédé physique d'évaluation –, par exemple à partir de la comparaison de la hauteur d'une colonne d'alcool dans un tube et de sa variation éventuelle d'une pièce à une autre.

Dans tous les cas, parler d'une grandeur à propos d'un élément du monde matériel, suppose un travail d'abstraction pour ne tenir compte que de certaines caractéristiques de cet élément et oublier les autres. On peut faire l'hypothèse que la construction de ce qu'est une *grandeur d'un type donné* se fait surtout dans des activités de comparaison de deux éléments relevant de cette grandeur où, par un effort d'abstraction, on est amené à sélectionner les caractéristiques pertinentes pour conclure.

2. Éléments sur la construction des grandeurs : activités de comparaison

2.1 De quoi s'agit-il ?

Dans une situation impliquant des tas de pommes, par exemple, on peut devoir comparer ces objets de multiples façons pour répondre à différentes questions que l'on peut se poser : on peut s'intéresser au volume occupé par chaque tas, à la masse des fruits dans chaque tas, au volume de jus que chaque tas pourra produire et au prix qu'on pourra en retirer... Ces activités de comparaison peuvent être accomplies avec des techniques relevant du monde sensible : on loge les pommes de chaque tas dans des caisses identiques, on place chacun des tas sur un plateau d'une balance de type Roberval, on presse les pommes de chaque tas et on recueille le jus dans des récipients identiques...

Dans chaque cas, on s'intéresse à une particularité des objets considérés, en faisant abstraction des autres, on ne se centre que sur une grandeur d'un type donné. Pour des particularités différentes on parle de grandeurs d'espèces différentes ou, dit autrement, de grandeurs de nature différente. Les manipulations que l'on accomplit pour comparer la « valeur » de cette particularité pour chacun des objets sont spécifiques de la particularité prise en compte et s'effectuent dans le monde sensible : on compare les « valeurs » d'une grandeur d'une espèce donnée.

Citons quelques techniques pour comparer, dans le monde sensible, les valeurs d'une grandeur d'une espèce donnée pour deux objets :

- *Comparer deux quantités* : on peut mettre côte à côte les éléments de deux collections pour comparer les quantités d'éléments de celles-ci ; ceci suppose, entre autres, que la personne (l'enfant) qui se livre à l'expérience réussisse certaines des tâches piagétienne de conservation des quantités, (quand on déplace une collection ou quand on modifie l'organisation de celle-ci, la quantité d'éléments qui la compose ne varie pas),
- *Comparer deux longueurs* : on peut superposer deux baguettes en les faisant coïncider à une extrémité pour comparer leur longueur ; remarquons que, faisant cela, on postule que la grandeur « longueur » attachée à l'objet est invariante lorsqu'on déplace l'objet,
- *Comparer deux masses* : on peut utiliser une balance à deux plateaux pour comparer les masses de deux objets ; ce qui revient à admettre que la grandeur « masse », attachée à l'objet, ne varie pas lorsqu'on déplace l'objet (ce qui d'ailleurs peut être faux en relativité restreinte).
- *Comparer deux aires* : on peut superposer, souvent après découpage, deux figures pour comparer leur aire ; ce qui présuppose aussi que la grandeur « aire », attachée à l'objet, est invariante lorsqu'on découpe l'objet et déplace les morceaux obtenus,

- *Comparer deux volumes* : on peut remplir un récipient de liquide et le transvaser dans un autre récipient pour comparer la contenance des deux récipients ; ce qui suppose peut-être encore que la personne ait au préalable réussi des tâches piagétienne de conservation des quantités,
- *Comparer deux durées* : on peut utiliser un sablier pour comparer la durée de deux événements ; ce qui revient à admettre que le temps s'écoule de la même manière en deux lieux distincts de l'espace (ce qui est plus complexe en relativité que ce que le sens commun nous porte à croire).

On voit donc que les techniques de comparaison des grandeurs de même espèce s'appuient souvent sur des implicites non questionnés. Leur validité sociale tient en leur efficacité et à leur précision... jusqu'à un certain point. Ce qui signifie que cet implicite se construit à travers la fréquentation sociale de nombreuses situations du même type, reproduisant des expériences équivalentes dont les résultats engagent les personnes à concevoir une certaine régularité des résultats obtenus sous des conditions données.

Ce qui contribue à une compréhension communément acceptable.

Néanmoins, on parvient à définir en mathématiques et de manière axiomatique, la notion de grandeur d'une espèce donnée. On peut munir l'ensemble des grandeurs d'une espèce donnée d'une structure algébrique. Nous n'explicitons pas la théorie mathématique assez délicate qui découle de cette axiomatique. Nous donnerons simplement ci-dessous, (paragraphe II-1), un aperçu de la construction des « opérations »²⁴ correspondantes et des éléments du travail fait en cycle 2 pour construire les opérations sur les nombres.

2.2 Éléments sur la construction de la quantité dans l'enseignement élémentaire

En maternelle et au C.P., la quantité est la première grandeur que l'on rencontre. S'intéresser à la **quantité d'éléments d'une collection**, (et bien avant de s'intéresser au « nombre d'éléments » de cette collection, donc à ce que l'on appellera plus tard son cardinal), nécessite, dans un premier temps, que l'on repère les particularités de cet objet « collection », particularités pertinentes pour évaluer sa grandeur.

Cela suppose, par exemple :

- que l'on soit en mesure d'identifier la collection comme un seul et même objet, constitué d'éléments, qui reste la même si on la déplace ou on modifie son organisation, en particulier si on veut comparer deux collections,
- que l'on néglige d'autres caractéristiques : la couleur, la forme, la taille, la place, ... des éléments qui la constituent.

C'est à travers de multiples tâches où la quantité d'éléments d'une collection est impliquée pour accomplir ces tâches, que l'on construit ce qu'on appelle grandeur d'une collection.

On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »²⁵, la description de situations d'apprentissage de la quantité. Il existe aussi des CD-Rom²⁶ présentant de telles situations, avec des commentaires pour les mettre en œuvre.

²⁴ Les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

²⁵ MARGOLINAS C., WOZNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 1 à 3, p. 11 à 36.

²⁶ BRIAND J., LOUBET M., SALIN M. H., *Apprentissages mathématiques en maternelle*, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

3. Objets de même valeur pour une grandeur de type donné :

Pour une grandeur d'une espèce donnée, il existe une multitude d'objets concrets qui sont équivalents au regard de cette grandeur : on imagine facilement qu'il existe des pommes ou d'autres fruits ou objets qui ont la même masse. Le passage des deux objets sur une balance à deux plateaux permet à la fois de signifier à quelle espèce de grandeur on s'intéresse, la masse, et de comparer leur « valeur » pour cette espèce de grandeur. Ce que nous nommons la « valeur » ou la grandeur pour une espèce de grandeur d'un objet n'est pas un nombre, c'est une notion abstraite qui correspond, en quelque sorte, à la famille de tous les objets qui sont équivalents à celui-ci pour cette espèce de grandeur. Cette famille ne peut pas être appréhendée de façon exhaustive. Elle sera repérée par sa mesure, (quand une mesure de cette espèce de grandeur pourra être et sera définie), mais elle existe en dehors de sa mesure. Des manipulations spécifiques permettent de repérer les objets ayant même valeur ou même grandeur pour le type de grandeur auquel on s'intéresse, (quelques exemples ont été évoqués précédemment « *Comparer deux ...* ») ; ce sont des représentants de cette grandeur. Tous les objets équivalents pour une grandeur d'un type donné définissent une même grandeur pour ce type : une masse, une longueur, une quantité d'objets, ...

Quand on s'intéresse à la quantité d'éléments d'une collection, tous les ensembles pouvant être mis en correspondance terme à terme ont une même valeur pour cette grandeur, que l'on appellera leur cardinal, chacun d'entre eux est un représentant de ce cardinal.

II - LA MESURE DES GRANDEURS

La construction des grandeurs décrite précédemment, celle de leur mesure que nous allons maintenant aborder, ne tiennent pas compte d'un quelconque contexte scolaire. Les élèves, quel que soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport à ces sujets. C'est à l'occasion d'activités que l'on pourra observer où ils en sont sur ce thème et expliciter les connaissances mises en jeu souvent de façon implicite. De plus les élèves doivent à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Nous reviendrons plus loin sur ce problème.

Nous allons passer ici du monde sensible au monde numérique

1. Grandeurs mesurables et les autres

1.1 Relation d'ordre sur les grandeurs d'une même espèce

On a rappelé précédemment qu'on peut comparer les grandeurs d'une espèce donnée attachées à deux objets en utilisant des techniques de comparaison directe ou faisant intervenir des *objets intermédiaires* relevant du « monde matériel » qui permettent d'agir sur des représentants de ces grandeurs :

- si on veut comparer les longueurs de deux tiges courbes on pourra faire coïncider une *ficelle* avec l'une de ces tiges et l'appliquer sur la seconde,
- pour comparer l'aire de deux figures de formes très différentes on pourra *découper deux figures identiques à chacune d'elles* dans un même carton épais et mettre chacun d'eux dans le plateau d'une balance.
- pour comparer, en début et en fin de saison, les quantités de têtes d'un troupeau, on peut créer une collection de cailloux de même grandeur que le troupeau en début de saison : on met un *caillou dans une boîte* pour chaque bête rentrant dans un enclos et on sort un caillou de la boîte pour chaque bête sortant en fin de saison.

La ficelle, les figures en carton, la collection de cailloux sont des objets intermédiaires permettant de garder en mémoire au cours d'un déplacement dans le temps ou dans l'espace, la valeur de grandeurs auxquelles on s'intéresse. On définit ainsi, pour des grandeurs d'une espèce donnée, une relation d'ordre entre ces grandeurs à partir de leurs représentants, de manipulations sur ces représentants et cela ne dépend pas

des représentants choisis : si deux collections ont la même quantité d'éléments, si une troisième collection a plus d'éléments que l'une d'elle, elle aura aussi plus d'éléments que l'autre. C'est bien une relation d'ordre entre grandeurs d'une espèce donnée qu'on définit ainsi, *relation d'ordre qui est totale*, (deux grandeurs d'une même espèce sont toujours comparables).

1.2 Opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce

Des techniques spécifiques à chaque espèce de grandeur peuvent aussi permettre de définir des « opérations » sur les grandeurs²⁷, de « additionner », de « soustraire » voire de « multiplier par un entier » des grandeurs de cette espèce par le biais de leurs représentants :

- on peut « additionner » deux longueurs en mettant bout à bout un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une longueur. Cette longueur ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, elle sera appelée « somme » des longueurs...
- on peut « additionner » deux aires en mettant côte à côte un représentant de l'une d'elle et un représentant de l'autre, on obtient un représentant d'une aire qui, là aussi, ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, ...
- on peut « additionner » deux quantités : en faisant la réunion de deux ensembles représentant chacun l'une d'elles, disjoints l'un de l'autre, on obtient un représentant d'une quantité qui ne dépend pas des deux représentants initialement choisis, appelé « somme » des deux quantités...

On imagine facilement, comment on pourra, (par le biais de représentants que l'on manipule), « soustraire », « multiplier par un entier », (par répétition d'« addition » d'une même grandeur), des longueurs, des aires ou des quantités.

1.3 Grandeurs mesurables, grandeurs repérables

On définit ainsi dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce des « opérations », comme pour les nombres !!! Nous verrons un peu plus loin que cette possibilité permet aussi, après avoir choisi une unité, de faire correspondre à chaque grandeur d'une même espèce, un nombre qui sera sa mesure. Dans cette correspondance la « somme » des grandeurs sera une grandeur dont la mesure sera la somme, (ici, somme de nombres), des mesures !!! La « soustraction » de deux grandeurs aura pour mesure la différence des mesures de ces grandeurs, de même pour le produit par un entier. Les grandeurs pour lesquelles la construction d'une telle correspondance numérique est possible sont dites des *grandeurs mesurables*.

Mais la démarche qui consiste à définir une « addition » (et donc une « soustraction ») et une « multiplication » par un entier n'est pas possible pour toutes les grandeurs.

Par exemple, considérons la grandeur « température ». En repérant la dilatation d'une colonne d'alcool dans un thermomètre placé dans deux pièces différentes, il est évidemment possible de comparer la température des deux pièces et donc de dire si elles sont à la même température ou si l'une est à une température inférieure à l'autre, la référence à un même objet se dilatant à la chaleur permet de repérer la température de tout élément où cet objet peut être immergé et ces températures peuvent être comparées sans que cette comparaison soit affectée par le choix fait des représentants. Les valeurs correspondant à la température peuvent ainsi être totalement ordonnées. Néanmoins si on ajoute ou soustrait deux températures, si on multiplie une température par un nombre on ne sait pas à quoi correspond le résultat dans le monde sensible. Si on a deux liquides de température différente, quelle sera la température de leur mélange ? On ne connaît pas de technique permettant de définir la « somme » de deux températures

²⁷ Comme nous l'avons dit plus haut, les opérations écrites entre guillemets sont des opérations dans l'ensemble des grandeurs d'une même espèce, sans guillemets il s'agit d'opérations dans des ensembles de nombres.

indépendamment des représentants choisis. On dit que la température est une *grandeur repérable* mais non mesurable. Il en est de même pour le temps, (mais les durées, elles, sont mesurables), pour l'altitude, (mais les dénivelés, eux, sont mesurables),

Notons que les différentes valeurs des grandeurs d'un type donné, qu'elles soient mesurables ou repérables, sont ordonnées : il est toujours possible de décider, de façon plus ou moins objective, par des manipulations spécifiques du type de grandeurs envisagées, sur des représentants de chacune d'entre elles, si elles sont égales ou quelle est la plus grande et quelle est la plus petite.

L'organisation du monde matériel que nous venons d'évoquer précédemment – à savoir le repérage sur les éléments auxquels on s'intéresse de particularités permettant de définir leur valeur comme grandeur d'un type donné, possibilité de mobiliser des représentants de cette même valeur, possibilité de comparer cet élément à des représentants d'autres valeurs pour le même type de grandeurs, possibilité de l'« additionner » ou la « soustraire », (sous certaines conditions), à une autre valeur du même type, possibilité de « multiplier par un entier » – prépare une modélisation numérique des grandeurs. Ceci prépare la construction du monde arithmétique, le passage du monde matériel au monde numérique. C'est cette modélisation que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

2. Mesure de grandeurs d'un type mesurable

2.1 De quoi s'agit-il ?

Comme nous l'avons expliqué précédemment pour des grandeurs mesurables d'un type donné, on peut définir des « opérations ».

Dans le document « Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège, Grandeurs et mesures au collège »²⁸, publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale, on trouve une illustration de telles constructions pour les longueurs :

« *Comparaison :*

Elle se fait à l'aide de segments qui les représentent. Une longueur a est inférieure à une longueur b si leurs représentants $[OA]$ et $[OB]$ sur une même demi-droite d'origine O sont tels que A appartient à $[OB]$.

Addition :

La somme des longueurs des segments $[AB]$ et $[CD]$ est celle du segment obtenu en mettant bout à bout deux segments respectivement équivalents à $[AB]$ et $[CD]$.

Une fois définie l'addition des longueurs, on peut définir la multiplication des longueurs par un entier (addition itérée), le produit de la longueur a par l'entier naturel n étant noté na .

Le problème de la division d'une longueur par un entier non nul est également abordé à l'école primaire par l'emploi du réseau de parallèles équidistantes (ou guide-âne). »

Pour des grandeurs mesurables, la construction de la réponse à la question : « combien de fois un représentant d'une grandeur est-il contenu dans un autre de même espèce ? » nous introduit dans le monde numérique de la mesure des grandeurs.

Mesurer une grandeur consiste à associer à cette grandeur un nombre exprimant un rapport entre cette grandeur et une grandeur de même espèce prise comme référence, celle-ci est l'unité de mesure ; c'est-à-dire un nombre tel qu'en « multipliant » cette grandeur de référence par ce nombre, on obtienne la grandeur en question.

²⁸ Ce document peut être téléchargé sur le site de l'Education Nationale, sous le titre « Grandeurs et mesures au collège ».

Ainsi, dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure une collection $\{c\}$ contenant un jeton, mesurer une collection C , c'est trouver le nombre par lequel il faut « multiplier » la collection $\{c\}$ pour obtenir une collection de même quantité que la collection C , (c'est-à-dire combien de collections à un élément il faudra réunir pour obtenir une collection ayant la même quantité d'éléments que C). C'est donc déterminer le nombre d'éléments de C !!! La mesure est ici toujours un entier.

La formulation adoptée « combien de fois », pourrait laisser penser que ce nombre est un entier, il n'en est rien.

On aura besoin des nombres décimaux : toujours dans le domaine des quantités, si je prends pour unité de mesure la collection $\{a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a\}$, la mesure de la collection $\{b, b, b, b, b, b, b, b, b, b, b\}$ est obtenue en réunissant la collection de référence et une collection obtenue en « divisant » cette collection de référence par 10, elle sera de 1,1.

On aura besoin des fractions non décimales : dans le domaine des longueurs, un guide-âne permet de « diviser » un segment S en 7 segments égaux, si je prends pour unité de mesure S , il faudra « multiplier » S par $1/7$ pour obtenir un des petits segments. Mais l'ensemble des fractions ne suffit pas pour répondre à la question du produit d'une longueur par un nombre. On sait bien que pour les longueurs, par exemple, le rapport entre le diamètre d'un cercle et sa circonférence est le nombre irrationnel π ; c'est à dire un nombre qui ne peut s'écrire sous la forme du quotient de deux entiers !!!

2.2 Deux remarques fondamentales

Ce qui vient d'être exposé montre que, si la définition des différentes valeurs d'une grandeur d'un type donné ne relève que du monde physique, le recours aux nombres, (munis de l'ordre et des quatre opérations), est incontournable pour définir une mesure et même pour définir certaines « opérations » dans l'ensemble de ces valeurs. L'**intrication de ces trois notions – grandeurs, mesures, nombres** – est une des principales difficultés pour introduire les nombres comme outil pour mesurer des grandeurs.

L'introduction des nombres et des opérations numériques s'appuyant sur les grandeurs et les « opérations » sur les grandeurs est extrêmement précieuse : elle permet d'élaborer des techniques numériques pour accomplir des tâches de comparaison de grandeurs, elle permet de prévoir la mesure de grandeurs obtenues par manipulations d'objets de mesures connues : réunion, partage, ... sans que les manipulations soient nécessaires, loin des objets auxquelles elles s'appliquent et même sans que ces objets existent réellement. Le recours à la mesure des grandeurs, réalise une simplification des techniques permettant comparaison, « addition » et « produit » d'une grandeur par un nombre. On **passé de manipulations effectives dans le monde sensible à des manipulations dans le monde mathématique ou plus exactement numérique** en attachant un nombre à une grandeur²⁹. Ainsi, par exemple, on saura que si on commande 100 madeleines pour une classe de 23 élèves, il n'y en aura pas une pour chaque

²⁹ Notre texte présente de façon succincte la construction des grandeurs puis de leur mesure en partant de manipulations dans le monde sensible et en supposant les nombres disponibles.

Les éléments évoqués ci-dessus constituent néanmoins un début d'environnement technologique pour une telle construction. Pour une construction plus précise et plus rigoureuse d'une théorie des grandeurs et de leur articulation avec les nombres, on pourra se référer à un des documents cités ci-dessous :

« Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, et 3^e du collège, *Grandeurs et mesures au collège* » publié en octobre 2007 par le ministère de l'éducation nationale et précédemment cité.

CHEVALLARD Y., BOSCH M., 2000, Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie I, Une Atlantide oubliée. *Petit x*, n° 55, pp. 5-32.

CHEVALLARD Y. BOSCH M., 2002, Les grandeurs en mathématiques au collège, Partie II, Mathématisations. *Petit x*, n° 59, pp. 43-76.

ROUCHE N., 2006, *Du quotidien aux mathématiques, nombres, grandeurs, proportions*, édition Ellipse.

élève, chaque jour, durant une semaine de 5 jours, il faudra prévoir une commande plus importante si on veut donner une madeleine à chacun, chaque jour... Les nombres et les calculs sur les nombres permettent de prévoir en l'absence des objets avec lesquels on travaille.

Néanmoins, il faut garder présent à l'esprit qu'une grandeur ne se réduit pas à sa mesure, donc ne se réduit pas à un nombre ; ce que le recours aux nombres pour les mesures des grandeurs incite souvent à oublier³⁰.

III - LES NOMBRES ET LES GRANDEURS : QUELQUES CONSIDÉRATIONS DIDACTIQUES

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté les grandeurs et leurs mesures comme si la connaissance des nombres et des opérations sur les nombres, les précédait. D'un point de vue épistémologique tel n'est pas le cas et, à l'école élémentaire, on se servira des grandeurs et de leurs mesures pour construire les ensembles de nombres, et munir ces ensembles des structures utiles pour « calculer » sur les grandeurs. Les élèves vont à la fois construire les différentes grandeurs, les nombres utiles à leurs mesures et les techniques de mesurage !!! Les interactions entre ces différents champs de connaissances ne doivent pas faire oublier que les objets auxquels elles se rattachent ne sont pas de même nature et que la différenciation s'impose.

Nous évoquons ci-dessous, succinctement, les activités qui permettront de construire, à l'école élémentaire, les nombres et les opérations sur les nombres.

1. Construction de la quantité

Dès le début de la scolarité les enfants vont construire une grandeur particulière : la quantité attachée aux collections.

C'est à travers de multiples tâches impliquant la quantité d'éléments d'une collection, que l'on construit cette grandeur. Comme nous le disions plus haut, « les élèves, quel que soit leur niveau, ne sont pas vierges par rapport aux nombres et aux grandeurs ».

La construction de la quantité passe par de multiples activités conduisant à la comparaison directe de collections puis à la comparaison de collections à l'aide de collections intermédiaires³¹.

La majeure partie des enfants connaissent une suite de mots-nombres, qu'ils ont appris souvent en dehors de l'école, énonçant avec quelques fois des oublis, des redites, les nombres à partir de un et pouvant aller très loin... Ils utiliseront la suite de mots-nombres comme collection intermédiaire pour comparer deux collections éloignées l'une de l'autre, pour construire, de façon différée, une collection ayant la même quantité d'objets qu'une collection qu'ils n'ont plus à leur disposition. Mais cela ne signifie pas que le dernier nombre énoncé est ce qu'on appellera le « nombre » d'éléments de la collection, son cardinal. La file numérique égrenée jusqu'à un certain nombre n'est qu'une collection transportable, qui peut voyager dans le temps et dans l'espace, (au même titre que les doigts des deux mains ou qu'un croquis représentant, par des croix, les éléments de la collection sur laquelle on travaille), que l'on peut mettre en correspondance terme à terme, (en pointant du doigt un élément tout en énonçant un nombre de la file), avec les collections auxquelles on s'intéresse. Pour que ce mot puisse représenter la quantité d'éléments

³⁰ Ce que rappelle PERRIN M. J. in « Actes de la XI^e école d'été de didactique des mathématiques » p. 303 : « Cependant, pour l'apprentissage, il est important de considérer les grandeurs d'un point de vue non numérique ».

³¹ On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la quantité, à l'ouvrage déjà cité : C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 1 à 3, p. 11 à 36, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : Apprentissages mathématiques en maternelle, J.Briand, M.Loubet, M.H.Salin, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

de la collection, il faudra que cette suite de mots-nombres soit invariable afin de rendre les comparaisons fiables³². Si, suivant les situations, l'ordre ou les mots énoncés ne sont pas les mêmes, le dernier mot énoncé ne correspondra pas à des collections de même valeur, elle ne sera pas un étalon fiable. Dans le cas contraire toutes les collections de même valeur pourront être mises en correspondance terme à terme avec les mots de la file numérique énoncée jusqu'au même mot, lequel pourra caractériser cette valeur.

2. Construction des nombres entiers naturels

Lorsqu'un élément de la file numérique est utilisé pour caractériser une quantité, il change de statut, il devient le nom d'une famille de collections, il devient le cardinal d'un quelconque représentant de cette quantité, il devient un entier naturel. Chaque nombre acquiert une existence propre en dehors de son appartenance à la suite de mot-nombre, une fonctionnalité : il désigne une grandeur particulière, la quantité dont un représentant, en quelque sorte emblématique, est la collection des mots-nombre énoncés dans la file numérique jusqu'à lui. Dans l'expression « cette collection possède n éléments », n est le cardinal de la collection, c'est un élément de l'ensemble des cardinaux ou de l'ensemble des entiers naturels.

Il est certainement important de faire apparaître la différence de statut entre un nombre inséré dans la file numérique et ce même nombre cardinal d'une collection.

C'est en s'appuyant sur cette genèse que l'on va pouvoir munir l'ensemble des entiers naturels de structures algébriques (ordre et opérations).

3. Ordre dans les nombres entiers

La suite de mots-nombres, apprise comme une comptine, est ordonnée, et à ce titre va servir de support pour *ordonner les nombres* c'est à dire définir sur l'ensemble des nombres entiers une relation d'ordre totale³³. L'assertion « le nombre n est plus petit que le nombre p » va se construire dans deux types de situations :

- des *situations liées à la construction de la quantité* : quand une collection ayant n éléments a moins d'éléments que celle qui a p éléments, (par correspondance terme à terme), on dira que n est plus petit que p , (et cela ne dépend pas des collections à n et p éléments choisies). Ici le nombre est considéré comme la mémoire d'une quantité,
- des *situations liées à la position*. Les nombres ne sont pas uniquement liés à la quantité mais aussi au repérage de la position d'un objet dans une collection rangée en ligne et, là encore, comme pour la construction de la quantité, on s'appuie sur la suite des mots-nombres pour construire la notion de position. Dans une collection rangée en ligne, (cela signifie qu'il y a un objet qui est « avant » tous les autres et qu'on peut parcourir la collection en allant, à partir de celui-ci de gauche à droite ou de haut en bas), si on s'intéresse à un objet particulier, le dernier mot-nombre énoncé quand on

³² Voir C. Margolinas, F. Wozniak, (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 1, paragraphes 4, p. 36 à 41.

³³ Une relation d'ordre totale dans un ensemble est une relation permettant de comparer deux éléments quelconques de cet ensemble, de décider quel est le plus grand et le plus petit des deux, en sachant que, si un élément est à la fois plus grand et plus petit qu'un autre, alors c'est qu'ils sont égaux, enfin telle que si un élément est plus petit qu'un autre, lui-même plus petit qu'un troisième alors le premier est plus petit que le troisième.

pointe l'objet désigné après avoir pointé tous ceux qui sont avant (en correspondance terme à terme avec la suite de mots-nombres), permet de garder en mémoire la position de cet objet. S'il désigne le cardinal de la collection qu'il constitue avec tous les objets qui sont avant lui, il désigne aussi la position de cet objet par rapport à un objet de départ, cet entier est alors un ordinal, (remarquons que la relation entre le rôle cardinal et le rôle ordinal d'un même entier doit être étudiée). Nous intéressent surtout ici aux grandeurs et à leurs mesures, nous ne détaillerons pas plus la construction de la notion de position. On pourra se référer aux ouvrages déjà cités précédemment pour trouver des activités sur ce sujet³⁴. Si l'objet situé en position n est avant l'objet situé en position p , si la collection des mots-nombres jusqu'à n a moins d'éléments que la collection des mots-nombres jusqu'à p , on dira que n est plus petit que p . Notons que cette façon de construire les entiers permet de parler de successeur d'un entier (le successeur de n n'est pas encore $n+1$!).

4. Opérations dans les nombres entiers

La construction de la mesure de la quantité commence implicitement lorsque la suite de mots-nombres, stabilisée, va être utilisée de la manière suivante pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection : « un et encore un ça fait deux et encore un ça fait trois, ... ». Dans le « projet de programme et recommandations école maternelle » de 2014³⁵, on parle d'« itération de l'unité ». Les gestes qui accompagnent ce discours correspondent à des réunions successives d'un ensemble avec un ensemble à un élément, le discours, lui, peut être entendu comme des « additions » successives de collections à un élément. Une unité est choisie et on la reporte.

Pour permettre la prévision de la mesure des quantités obtenues par manipulation de grandeurs, les entiers naturels doivent être munis d'opérations.

4.1 L'addition dans les nombres entiers

L'addition dans les nombres entiers doit être une opération (au sens : à deux nombres on fait correspondre un troisième), cohérente avec la réunion des collections disjointes (au sens : à deux nombres représentant deux quantités, (donc cardinal de ces deux quantités), on fait correspondre un nombre qui représentera la « somme » de ces deux quantités). Pour la définir on « transporte » en quelque sorte la réunion de collections. C'est « ça » que l'on nomme addition dans notre société.

En général, pour débiter l'étude de l'addition de deux entiers, on introduit le signe + dans des locutions verbales, utilisant des nombres, et qui gardent en mémoire la quantité d'objets de collections obtenues par réunion de deux collections dont on connaît les cardinaux. Dans un problème du type : « je sais que dans une section il y a 12 enfants dans l'autre il y a 15 enfants, si je veux réunir ces deux sections dans la salle de spectacle est-ce que j'aurai assez de chaises pour tous ? Il me faut 12 et encore 15 chaises, je vais noter ceci $12 + 15$ pour m'en souvenir tant que je n'ai pas accès à la salle ». Cette expression représente un nombre entier, puisque c'est le cardinal de la collection obtenue par réunion des deux sections, mais ce n'est pas encore un nombre entier ! C'est une façon de garder en mémoire les informations qui intéressent.

³⁴ On peut se référer, pour une description d'activités visant l'apprentissage de la position, à l'ouvrage déjà cité : MARGOLINAS C., WOSNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 3, p. 59 à 74, ou aux CD-Rom déjà mentionnés : BRIAND J., LOUBET M., SALIN M.H., *Apprentissages mathématiques en maternelle*, CD-Rom, 2004, Hatier Pédagogie.

³⁵Site internet consulté le 01/09/2014 :

http://cache.media.education.gouv.fr/file/Organismes/32/4/CSP- Proje_t_de_programme-recommandations_337324.pdf

Cette locution verbale permet toutefois de résoudre le problème de place, dès qu'on est dans la salle et avant que les enfants arrivent !

Pour construire l'addition il faudra décider quel est le troisième entier que l'on fait correspondre à deux entiers n et p , et que l'on appellera somme de n et de p : ce sera naturellement le cardinal de la collection obtenue par réunion d'une collection de n et d'une collection à p éléments. Avec de petits nombres d'abord, des collections disjointes, respectivement à n et p éléments étant données, on détermine par dénombrement direct le nombre d'éléments de la réunion. On décide alors que la somme de n et de p , aussi notée $n + p$ est cet entier. A ce niveau, on ne pose pas le problème de savoir si le résultat est indépendant du choix des collections à n et p éléments choisis, mais c'est évidemment le cas !!!

*Il est certainement important d'insister sur le fait qu'on **construit** ainsi **une opération sur les nombres** : à deux entiers n et p on fait correspondre l'entier qui est le nombre d'éléments de la réunion d'une collection à n éléments et d'une collection à p éléments.*

On aurait pu construire l'addition en utilisant la genèse ordinale des entiers : je suis sur la case n et j'avance de p cases, on décide que la somme de n et de p , notée $n + p$, sera le numéro de la case où je me trouve.

Quel que soit le type de situation utilisée pour construire l'addition – réunion de collections ou déplacement sur une file – le lien avec l'autre définition doit être travaillé, afin que dénombrement de réunion de collections et déplacement sur la file numérique deviennent des techniques alternatives, équivalentes, pour déterminer la somme de deux entiers.

Très vite on peut remplir une table d'addition à 9 lignes et 9 colonnes en remarquant que $n + p = p + n$, (issu de la propriété de la réunion), qu'ajouter 1 à un entier revient à prendre son successeur, (propriété issue de la définition ordinale des entiers), ...

Mais le dénombrement des collections, réunion de deux collections, ou de grands déplacements sur la file numérique, deviennent très vite difficiles et peu fiables. La poursuite de la construction de l'addition ou la conduite d'activités conduisant au dénombrement de grandes collections nécessiteront le recours à des algorithmes impliquant l'algorithme d'écriture des nombres dans notre système de numération. Nous y reviendrons plus loin, (paragraphe III 4.3).

Les activités de dénombrement, que ce soit pour déterminer la quantité d'éléments d'une collection ou celle de la réunion de plusieurs collections, nécessitent une technique fiable d'énumération de ces éléments. On trouvera dans l'ouvrage « Le nombre à l'école maternelle »³⁶ des activités pour enseigner l'énumération.

4.2 Les autres opérations dans les nombres entiers

La soustraction, et la multiplication seront définies comme des opérations cohérentes avec des manipulations de grandeurs :

- pour la soustraction, le nombre $n - p$ sera la mesure d'une collection obtenue en enlevant p éléments à une collection de n éléments, ou la mesure d'une collection à réunir avec une collection à p éléments pour obtenir une collection à n éléments.

- pour la multiplication, le nombre $n \times p$ sera la mesure d'une collection obtenue en réunissant p collections de n éléments chacune, ou la mesure d'une collection que l'on peut ranger en lignes de p éléments chacune.

La division euclidienne est une opération particulière puisqu'à deux nombres n et p elle fait correspondre deux autres nombres : le quotient q et le reste r . Le nombre q sera la quantité maximale de tas de p éléments que l'on peut faire avec une collection à n éléments et r ce qu'il reste après avoir fait cette répartition en tas (dit partage équitable).

³⁶ MARGOLINAS C., WOZNIAK F., (2012), *Le nombre à l'école maternelle*, Bruxelles, éd DE Boeck, chap. 4, p. 75 à 96.

4.3 Algorithme de calcul du résultat des opérations

Si les premiers résultats des opérations se font en transportant dans l'ensemble des nombres les résultats des « opérations » correspondant sur les grandeurs, et par dénombrement direct, d'autres techniques doivent être élaborées pour étendre le domaine de définition des opérations.

On sera amené à organiser les collections pour rendre fiable et simplifier le dénombrement : l'organisation par paquets de 10 permet de dénombrer les paquets de 10, puis les 10 paquets de 10 ...

On s'appuiera alors sur l'algorithme de l'écriture chiffrée des nombres dans notre système de numération pour l'écriture des quantités ainsi dénombrées.

Nous n'aborderons pas ici la construction des systèmes de numération. Nous l'avons vu précédemment, chaque nombre est un signe pour désigner une quantité. Ces signes sont écrits et oralisés pour faciliter la communication des informations qu'ils représentent, ils deviennent des mots.

Les écritures utilisées pour désigner une quantité relèvent de conventions sociales, ils constituent des systèmes de numération. Dans notre système de numération, appelée « *numération arabe* », ou « *système de numération de position à base 10* », nous travaillons avec des paquets de 10, donc nous utilisons 10 signes différents ; on parle de système numérique de position de base 10. L'écriture chiffrée des nombres que nous utilisons relève d'un algorithme, et donc fait apparaître des régularités, même si la lecture des nombres ne rend pas toujours audibles ces régularités.

Avec les écritures chiffrées des quantités, on construit des algorithmes pour calculer les sommes, les différences, les produits et les quotients de ces valeurs. Ce sont des techniques purement numériques : pour comparer, additionner, soustraire, multiplier et diviser deux nombres on s'appuie sur cet algorithme, mais aussi sur les propriétés des « opérations » sur les grandeurs. La connaissance du système de numération et son implication dans les techniques d'opérations posées concerne ainsi la problématique de la résolution de problème !!!

5. Interaction des notions grandeurs, mesure et résolution de problèmes

Le développement précédent montre la complexité de la situation à gérer : à l'école élémentaire, on se sert des grandeurs et de leurs mesures pour construire les ensembles de nombres. La mesure devient très vite un outil prodigieux pour parler de tous les objets de même valeur pour une grandeur de type donné, mais le nombre mesurant une grandeur n'est pas la grandeur. On s'appuie sur les « opérations » sur les grandeurs pour munir les ensembles de nombres des structures algébriques utiles pour prévoir le résultat de manipulations sur les grandeurs, mais la connaissance des opérations sur les nombres n'est pas la connaissance du champ de problèmes que ces opérations peuvent modéliser.

En matière de résolution de problème, l'enseignant doit **organiser le passage des élèves du problème initial**, portant sur une expérience matérielle, **à un autre problème**, portant quant à lui sur une expérience numérique. Il s'agit donc d'un changement de cadre correspondant au **passage du système étudié à son modèle arithmétique**.

L'organisation didactique qui permet de mettre en place un tel changement de cadre doit amener les élèves à **se détacher du contexte du problème initial à résoudre** mais en sélectionnant les éléments matériels pertinents et à **identifier la catégorie de problèmes auxquels il appartient** afin de choisir les outils numériques pour calculer sur les mesures donc sur les nombres. Les caractéristiques des champs de problèmes ayant permis de construire les opérations seront en cause.

Les représentations en barres sont des modélisations intermédiaires dont les collègues se sont servis pour accompagner ce changement de cadre. L'analyse des fonctions de ces outils sera proposée par ailleurs ³⁷. Elles ont été à la fois une aide pour travailler sur les caractéristiques des situations à modéliser, une première modélisation de la situation matérielle et en quelque sorte un fil rouge pour les apprentissages en matière de résolution de problèmes.

³⁷ Voir à ce sujet : « Enjeux des représentations en barres », annexe 3 de ce document.

ANNEXE 3 : ENJEUX DES REPRESENTATIONS EN BARRES

Annie NOIRFALISE

I.R.E.M. de Clermont Ferrand
annie.noirfalise@free.fr

Position du problème

Issues de pratiques d'enseignement à Singapour, avec en toile de fond les performances très intéressantes des élèves Singapouriens à des tests internationaux, (PISA, TIMSS, ...), les « représentations en barres » ont suscité depuis quelques années un certain intérêt en France auprès des enseignants, mais aussi de la presse spécialisée et des décideurs (rapport de Villani et Torossian).

Quelles peuvent être les fonctions de ces représentations ?

En matière de résolution de problèmes arithmétiques, l'élève est face à un récit qui évoque des manipulations du monde matériel : partage ou réunion de longueurs, de collections, de masses, etc... Donc des manipulations de grandeurs décrites en gestes spécifiques au type de grandeurs concernées. Une ou plusieurs questions lui sont posées sur certains éléments de cette situation auxquelles il doit répondre à partir des mesures des grandeurs qui lui sont données.

Pour cela, il sait que certaines des quatre opérations, (addition, soustraction, multiplication et division), lui seront utiles, il doit choisir ces opérations (tâche de type T1), puis effectuer les calculs correspondants (tâche de type T2). Il semble que les tâches de type T1 soient les plus problématiques. Il s'agit d'un travail de *modélisation arithmétique* du problème posé.

La méthode dite de « Singapour » propose des *modélisations intermédiaires* dont la principale, et la plus aboutie, est la modélisation en barre.

Le recours à ce type de modélisations n'est pas nouveau. Il était systématiquement mobilisé dans les ouvrages du début du siècle dernier pour la résolution de problèmes d'arithmétique (cf. M. Royer et P. Court, Arithmétique, cours élémentaire, 1926, librairie Armand Colin ou CF M. Delfaud et A. Millet, Arithmétique, cours supérieur 1^{ère} et 2^{ème} année, 1933, Hachette), et pour l'introduction à l'algèbre jusque dans les années 60, (cf. H. Schaeffer et J. Lebaile, Mathématiques, classe de cinquième, 1954, librairie Delagrave).

Le recours à ces modélisations intermédiaires peuvent-elles permettre de construire des techniques pertinentes et efficaces pour les tâches de type T₁, dans le cadre de l'enseignement *en France* en 2020 ? En d'autres termes, peut-on imaginer outiller l'élève de techniques pour accomplir ces genres de tâches et quels éléments technologiques peut-on avancer pour justifier le recours à ces représentations intermédiaires lors de la modélisation de problèmes arithmétiques ?

L'analyse didactique³⁸ d'une collection d'ouvrages français³⁹ utilisant ces représentations a été riche d'éléments réflexifs sur l'utilisation de ces modélisations.

³⁸ Dans le présent document nous utilisons des éléments de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) comme aide à l'analyse des situations didactiques évoquées. Rappelons, comme le fait Y. Chevallard dans la séance 5 de l'« Humble séminaire 2019-2020 », « Les modèles élaborés par la TAD ne sont nullement *normatifs*. Ils ne disent pas ce qui *devrait* être, mais ce qui *pourrait* être ». Notre objectif est essentiellement de pointer certains gestes didactiques afin de s'interroger sur leur remplacement par d'autres gestes.

Pour une présentation d'éléments de la TAD on pourra se référer à l'article : Yves Chevallard, « Analyse des pratiques enseignantes », dans *Recherche en Didactique des mathématiques*, vol 19/2, Grenoble, La Pensée Sauvage, éditeur, 1999.

³⁹ Les ouvrages de la collection intitulée « Maths, Méthode de Singapour », du CP au CM2, proposés par La Librairie des Ecoles, éditeur.

Dans le texte qui suit nous nous appuyons sur ces éléments, qui nous ont servi d'alerte. Les représentations sont analysées à l'aide d'une modélisation issue de l'approche anthropologique⁴⁰. Elle nous a permis d'avancer des éléments technologiques concernant les représentations repérées dans les ouvrages de la collection analysée. Les choix faits par les collègues dans la gestion de leur classe ont été très largement guidés par ce travail.

I - ANALYSE DES REPRESENTATIONS INTERMEDIAIRES

L'analyse des représentations intermédiaires que nous avons faite s'appuie sur les travaux de M. Bosch et Y. Chevallard⁴¹. Nous revenons rapidement sur leurs apports ci-dessous, après avoir donné un exemple d'analyse de ce type.

1. Un exemple d'analyse de représentation intermédiaire

Au préalable, afin de mieux comprendre ce dont nous parlons, nous donnons un exemple d'analyse de représentation intermédiaire couramment utilisée en cycle 1 et cycle 2 de l'école primaire :

On demande à un élève de grande section d'aller chercher en une fois dans la réserve une poupée et une seule pour chaque élève de la petite section. Il a à sa disposition du papier et des crayons. Familier avec ce type de tâches, il va :

- sur une feuille faire une marque, une croix par exemple, pour chaque élève de petite section (quand ils sont assis et ne bougent pas) en ayant soin d'aligner ses croix,
- il se rendra dans la réserve et posera une poupée en face de chaque croix et ramènera les poupées ainsi sélectionnées.

Les croix sur le papier constituent un modèle de la collection d'enfants. C'est un exemple de représentation intermédiaire, nous parlerons plus loin d'ostensif, utilisée pour accomplir la tâche demandée. Nous attirons l'attention sur deux points :

- l'élaboration de cette représentation correspond à un travail d'abstraction : l'élève ne prend en compte, pour la produire, que la grandeur de la collection des enfants de petite section. Les croix ne se distinguent pas les unes des autres, il prend soin de se trouver en situation de faire une croix et une seule croix par élève de petite section, ceci grâce à une technique fiable de correspondance terme à terme. La *signification des gestes* pour produire cette représentation et le *sens de la représentation*, ont dû être construits, entre autres, à travers de nombreuses manipulations directes de collections. Il s'agit de reconnaître celles qui ont la même quantité d'éléments donc la même grandeur, avec des techniques et un discours justifiant ces techniques partagées par la classe. L'élève a compris qu'il s'agit d'une tâche du type : constituer une collection ayant la même grandeur qu'une collection donnée. *Associée* à un discours technologique maintes fois évoqué, la technique utilisée a été reconnue dans ce milieu, comme une représentation « *fiable* » de la collection en jeu, *au regard de la tâche à accomplir*. Ce que nous évoquons ici c'est la *valeur sémiotique de cet ostensif* dans cet environnement ; ostensif représentant la grandeur d'une collection, qui est une notion non ostensive, (nous revenons dans le paragraphe suivant, I - 2, sur la terminologie « ostensif / non ostensif »).
- l'élève constitue certes une collection de même grandeur mais aussi transportable et en prenant soin d'aligner les croix sur le papier. Il garde ainsi en mémoire la caractéristique de la collection d'élèves

Une autre collection se réfère à la méthode de Singapour : « Les Maths avec Léonie », éditions Bordas. Lors de l'écriture de ce texte, seuls les ouvrages s'adressant au CP et au CE1 sont disponibles. Nous ne les avons pas analysés en détail.

⁴⁰ Op. cit.

⁴¹ MARIANNA BOSCH et YVES CHEVALLARD, « La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique », dans *Recherches en didactique des mathématiques*, vol. 19/1, Grenoble, La Pensée Sauvage, éditeur, 1999. p. 77-124.

appropriée à la tâche, elle centre l'élève sur la caractéristique pertinente de la collection étudiée. Il prépare aussi le travail pour constituer une collection de poupées de même grandeur que la collection de croix : sa représentation en ligne facilite l'énumération de la collection qu'il faudra mettre en correspondance terme à terme avec la collection de poupées à sélectionner. Cette représentation est *un instrument de travail permettant d'avancer dans la tâche à accomplir*. Ici aussi, c'est à travers de nombreuses manipulations de collections, en ordre et en désordre, que des techniques d'énumération et un discours justifiant ces techniques ont été rencontrés. Le résultat du travail de cet élève est reconnu comme une représentation « efficace » de la collection en jeu, au regard de la tâche à accomplir. Ce que nous évoquons ici c'est *la valeur instrumentale de cet ostensif*.

2. Apports de M. Bosch et Y. Chevallard : objets ostensifs et non ostensifs dans le travail mathématique

Citons M. Bosch et Y. Chevallard⁴² :

« l'activité mathématique est conditionnée par les instruments matériels, visuels, sonores et tactiles qu'elle met en jeu.... »

Nous parlerons *d'objet ostensif* – du latin *ostendere*, « montrer, présenter avec insistance » – pour nous référer à tout objet ayant une nature sensible, une certaine matérialité, et qui, de ce fait, acquiert pour le sujet humain une réalité perceptible. Ainsi en est-il d'un objet matériel quelconque et, notamment, de ces objets matériels particuliers que sont les sons (parmi lesquels les mots de la langue), les graphismes (parmi lesquels les graphèmes permettant l'écriture des langues naturelles ou constitutifs des langues formelles), et les gestes.

Les objets *non ostensifs* sont alors tous ces « objets » qui, comme les idées, les intuitions ou les concepts, existent institutionnellement – au sens où on leur attribue une existence – sans pourtant pouvoir être vus, dits, entendus, perçus ou montrés par eux-mêmes : ils ne peuvent qu'être *évoqués* ou *invocés* par la manipulation adéquate de certains objets ostensifs associés (un mot, une phrase, un graphisme, une écriture, un geste ou tout un long discours). »

Pour ce qui nous concerne, les représentations ou modélisations intermédiaires sont des ostensifs au même titre que l'écriture $3 + 11$. L'addition des entiers, elle, ne peut-être qu'évoquée par la manipulation d'une écriture numérique du type précédent, d'une représentation en barres, d'un tout et de deux de ses parties ou d'autres objets ostensifs, verbaux par exemple. Toutefois, l'émergence de ces ostensifs et des non ostensifs qui leur sont associés est simultanée. *Ces ostensifs deviennent les signes de l'addition qui en constitue le sens*. Dans toute activité mathématique il y a co-activation d'ostensifs et de non ostensifs aussi bien au plan de la technique que de son environnement technologico-théorique.

Dans une écriture du type :

« $127 + 48 = (100 + 20 + 7) + (40 + 8) = 100 + 20 + 40 + 7 + 8 \dots$ », il y a manipulation d'ostensifs écrits (parenthèses, nombres, signes arithmétiques). Toutefois, cette manipulation est guidée par des non ostensifs parmi lesquels il y a l'addition, le système décimal de position, les propriétés de l'addition des entiers, etc.

Donnons un exemple cité par M. Bosch et Y. Chevallard⁴³:

« Considérons ainsi, par exemple, le problème suivant extrait d'un *Précis d'arithmétique pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème* du début du siècle⁴⁴:

⁴² Ibid., p. 90

⁴³ Ibid., p 97-98.

⁴⁴ CHENEVIER, (1926).

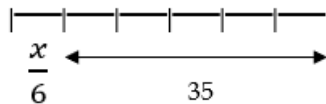
« Dites le nombre qu'on diminue de 35 en le divisant par 6. »

Remarquons que la formulation du problème « Dites... » témoigne clairement du caractère oral des tâches mathématiques de l'ancienne arithmétique. Dans ce cas, la technique de résolution proposée se matérialise en fait dans le *discours* suivant :

Le quotient du nombre inconnu par 6 est le sixième de ce nombre. Par suite ce quotient est le nombre diminué des 5/6 de ce nombre. Les 5/6 du nombre cherché valent 35, le nombre cherché est les 6/5 de 35, c'est-à-dire 42.

Il faut bien sûr imaginer que la solution est produite oralement, selon une technique discursive bien structurée, et que les calculs sont faits mentalement, avec un faible recours au registre de l'écrit (mobilisé cependant, lors du calcul mental, par la visualisation de l'écriture chiffrée des nombres).

Une autre technique de résolution pourrait consister en la production d'un petit modèle *graphique*, en forme de segment divisé en 6 parties égales :



Une fois le schéma construit, il ne reste plus qu'à produire un discours comme le suivant :

« Nous avons un segment divisé en 6 parties égales. Si les 5 parties de droite mesurent 35, alors chaque partie mesure $35 : 5 = 7$ et le nombre cherché est $7 \times 6 = 42$ ». Registre graphique et registre oral s'articulent ici clairement par le biais d'une *deixis* gestuelle qui gère la correspondance entre les deux registres. On peut d'ailleurs imaginer que la solution effectivement produite aurait pu consister en un discours plus simple, moins détaché du geste de la main : « Ça c'est 35, ça c'est x sur 6, donc ça c'est 7 et le tout 42 ».

On peut finalement confronter ces deux activités avec la mise en œuvre d'une technique algébrique élémentaire qui consisterait essentiellement en des manipulations écrites comme les suivantes :

« Soit x le nombre cherché. On a : $x - 35 = \frac{x}{6}$; $\frac{5x}{6} = 35$; $x = \frac{35 \times 6}{5} = 42$ »

Remarquons ici que l'écrit, bien que dominant, n'est pas le seul registre activé. Il y a aussi, d'une part, la réalisation d'un discours intérieur, parfois silencieux mais indispensable au déroulement de la tâche, (« Soit x le nombre cherché, on a x moins 35 égale x sur 6 », etc.). Et, d'autre part, l'effectuation de ces gestes particuliers qui consistent à « faire passer un terme d'un membre à l'autre de l'égalité », puis devant l'égalité $\frac{5x}{6} = 35$, à « faire des produits en croix ». »

Dans chacun des cas, les ostensifs utilisés sont des instruments pour accomplir une certaine tâche, (ici portant sur une situation de partage d'un tout en parties de valeurs identiques), et mener à bien un certain travail. Ces ostensifs permettent d'agir et de travailler. C'est cela qui leur confère une *valeur instrumentale*. Mais c'est leur engagement dans un ensemble de techniques institutionnellement déterminées, en vue d'accomplir des tâches déterminées, qui en fera un instrument concrètement défini et permettant l'avancement de tâches à accomplir.

Dans chacun des cas, les ostensifs utilisés sont des signes qui évoquent des complexes d'objets ostensifs et non ostensifs (mesures de grandeurs en jeu, relations algébriques entre ces mesures de grandeurs, ...), évocations qui doivent être partagées pour qu'une *valeur sémiotique* leur soit conférée, dans un cadre institutionnel donné.

Les trois techniques de résolution évoquées plus haut, appellent clairement des arguments technologiques relevant d'institutions différentes.

Dans chacun des cas, les ostensifs utilisés (discours, écritures algébriques ou représentations graphiques) ne sont pas auto-justifiées. Leur fonction n'est pas évidente et doit être justifiée afin de légitimer leur participation à une technique pertinente pour la tâche à accomplir, dans une institution donnée.

Les ostensifs auxquels nous nous intéressons – représentations en barre – doivent être le signe de manipulations sur les grandeurs : « partage ou réunion de longueurs, de collections, de masses, etc. »⁴⁵. Leur utilisation doit permettre de faire avancer le choix d'une ou plusieurs opérations (+, -, ×, ÷) conduisant à une arithmétisation du problème. Il est donc nécessaire de construire des liens entre ces ostensifs et chacune des quatre opérations afin qu'ils deviennent des instruments de l'activité de modélisation arithmétique.

Dans notre exemple de représentation intermédiaire en maternelle, la mobilisation de cet ostensif suppose la co-activation de nombreux non-ostensifs qui conditionnent la réalisation de la tâche : comme la notion de grandeur d'une collection, l'invariance de la grandeur dans un déplacement des objets, etc... Cela suppose que la justification et l'explication d'actions analogues à celles décrites aient été données à l'occasion de nombreuses tâches du même type, participant à la construction de la notion de grandeur d'un ensemble.

Les représentations intermédiaires auxquelles nous nous intéressons ne sont pas auto-justifiées. Un travail est nécessaire pour qu'elles acquièrent du sens et deviennent efficaces dans les travaux de modélisation arithmétique demandés aux élèves. Il ne suffit pas de montrer une représentation en barres aux élèves pour qu'ils l'associent spontanément aux grandeurs en jeu dans le problème à résoudre, aux manipulations des grandeurs évoquées, et in fine à telle ou telle opération arithmétique. Ces gestes se construisent.

Un travail important sur les notions de grandeurs, mesure et sur les opérations sur les grandeurs a paru indispensable⁴⁶.

Il nous a semblé aussi indispensable, pour notre travail, de revenir sur l'émergence des quatre opérations dans l'enseignement actuel. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

Nous analyserons en parallèle la progression proposée et les ostensifs utilisés par les auteurs des ouvrages utilisant les représentations en barre⁴⁷.

Avant d'aller plus loin, remarquons que l'introduction des quatre opérations se fait en C.P.

Elle s'adresse donc à des élèves qui, grâce à de nombreuses manipulations de collections, viennent juste d'apprendre à associer un élément de la comptine numérique (son cardinal) à une collection pour caractériser sa grandeur⁴⁸. La seule propriété de ces cardinaux qui ait été construite est la relation d'ordre, avec comme support la comptine numérique.

Les nombres ne sont pas encore, pour la plupart des élèves de C.P., des entités mathématiques à part entière dont on peut étudier les propriétés « numériques » entre autres.

La construction des quatre opérations sera une étape importante dans cette perspective.

A la fin de chacun des paragraphes concernant l'addition et la soustraction d'une part, la multiplication et la division d'autre part, nous formulerons les enseignements que nous pouvons tirer des analyses faites.

⁴⁵ Cf. plus haut

⁴⁶ Voir à ce sujet l'annexe « Grandeurs, mesure et résolution de problèmes »

⁴⁷ Op. cit. « Maths, Méthode de Singapour ». Librairie des Ecoles

⁴⁸ On pourra à ce sujet se référer à : Margolinas C. et Wozniak F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle*. Bruxelles : De Boeck. pp. 36-40.

II - ÉMERGENCE DES QUATRE OPERATIONS

1. L'addition et la soustraction

1.1 L'addition

Classiquement, l'addition est introduite en CP à l'occasion d'activités où deux collections sont mises ensemble pour en constituer une troisième. Donc deux grandeurs discrètes G_1 et G_2 se composent en une troisième G . Le dénombrement direct de G_1 , G_2 et G permet de déterminer trois nombres m_1 , m_2 et m (mesures de ces grandeurs). Et on écrit « $m_1 + m_2 = m$ » en accompagnant cette écriture mathématique d'un discours du type : « m_1 objets et encore m_2 objets ça fait m objets ». Cette écriture devient très vite : « m_1 et m_2 font m », puis « m_1 plus m_2 égal m ». L'écriture « $m_1 + m_2 = m$ » est souvent présentée comme "la manière de noter en « mathématique » m_1 et encore m_2 , ça fait m ».

A ce stade, chacune de ces petites phrases est un compte-rendu numérique⁴⁹ d'une manipulation matérielle faite (mise ensemble de deux grandeurs, dénombrement des trois grandeurs en jeu) permettant de garder en mémoire certaines caractéristiques de la situation.

Ces ostensifs ne sont pas équivalents :

- le premier « m_1 objets et encore m_2 objets ça fait m objets » porte sur les grandeurs, leur mesure et l'opération effectuée sur les grandeurs, à savoir la réunion de ces grandeurs,
- le second « m_1 et m_2 font m » ne retient que des nombres. Les grandeurs, leur mesure et l'opération réunion sont sous-jacentes. L'ostensif précise que, dans certaines conditions, les trois nombres vérifient une relation ternaire,
- le troisième « m_1 plus m_2 égal m » et le quatrième « $m_1 + m_2 = m$ » se détachent un peu plus du monde matériel. Il précise aussi que les trois nombres vérifient un lien relationnel en utilisant ici le vocabulaire d'arithmétique : *plus*, $+$, *égal*, $=$.

On construit ainsi une technique pour produire un lien relationnel entre trois nombres entiers en s'appuyant sur un lien relationnel entre trois ensembles dont la mesure de la grandeur correspond à ces nombres. Le vocabulaire utilisé évoque un chantier pour construire une entité mathématique (une opération, l'addition) mais ceci n'est jamais précisé en ces termes. C'est un chantier car le fait de produire des liens relationnels associé au vocabulaire additif entre certains triplets d'entiers ne suppose pas encore le concept d'addition⁵⁰.

⁴⁹ En référence à une terminologie utilisée par H. Lebesgue à propos des nombres. Il disait aux futurs professeurs que « un nombre est le compte-rendu complet de l'action qui le produit [...] le reste est métaphysique » et il déclarait en conclusion de son cours sur « La mesure des grandeurs » que l'étude des mathématiques élémentaires était essentielle pour leur enseignement : cette étude permettait par exemple de comprendre qu'un nombre est le résultat d'une expérience particulière sur une grandeur. Il travaillait pour que, peut-être, les professeurs au fait de ce qu'est la mesure des grandeurs envisagent leur enseignement sur les systèmes de nombres comme portant sur les manières de *produire des mesures* par un algorithme vérifié ou des dispositifs validés, selon les cas, et *d'en rendre compte par un nombre*, que l'on considérerait alors comme le compte-rendu d'une *expérience de mesure*. » Pour notre part, nous parlons de compte-rendu d'actions ou d'activités.

⁵⁰ Dans un autre domaine, et pour éclairer notre propos donnons un exemple cité par Y. Chevillard dans le cours EE16 - Cours & TD - YC et al - v5, intitulé « *L'évolution du paradigme scolaire et le devenir des mathématiques : questions vives et problèmes cruciaux* » :

Au collège, à un nombre $x \geq 0$ est associée sa racine carrée \sqrt{x} , sans qu'on dise rien encore sur la fonction « racine carrée ». Ceci ne suppose pas encore le concept de fonction, mais seulement, si l'on peut dire, celui de « lien fonctionnel » (entre x et $y = \sqrt{x}$) qui, à une valeur x , associe une valeur \sqrt{x} , sans qu'on puisse encore attribuer de

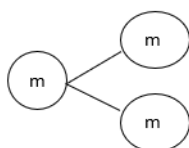
Notons que :

- *les éléments pertinents des situations matérielles mobilisées pour produire de tels liens relationnels ne sont que partiellement précisés*. En fait les propriétés ensemblistes des collections considérées G_1 et G_2 doivent être disjointes. G est obtenue par réunion de G_1 et G_2 .

On ne s'intéresse qu'à la mesure de ces grandeurs.

Dans certains ouvrages⁵¹, en plus d'expressions verbales spécifiques, une représentation graphique est associée à ces situations, pointant certains des éléments de la situation matérielle pris en compte.

On parle de « *parties et de tout* », de « *famille de nombres* » et on utilise le schéma suivant, appelé « *schéma de lien entre les nombres* » :



Ces éléments sont des ostensifs verbaux et graphiques. Leur production suppose le repérage « *de deux parties et d'un tout* » donc une centration sur des notions de relations ensemblistes spécifiques pour guider le choix des éléments sélectionnés dans la situation matérielle évoquée même si ce n'est pas précisé verbalement, (ensembles disjoints, réunion, etc.) ; la production d'une « *famille de nombres* » renvoie à la centration sur la mesure des ensembles sélectionnés ; notions ensemblistes, mesure de grandeurs sont des non ostensifs qui règlent la production des ostensifs verbaux ainsi que la production des « *schémas de lien entre les nombres* », lesquels rassemblent tous les éléments sélectionnés, et représentent spatialement les attributs du tout et des deux parties (fonction sémiotique).

Dans le premier ouvrage cité en référence⁵², les élèves s'entraînent sur des dessins représentant des situations concrètes, à repérer une collection et deux sous collections de celle-ci, à associer à ces situations des familles de trois nombres qu'ils rassemblent dans des schémas de liens entre les nombres, il n'y a pas d'autres enjeux que la production de familles de nombres et de schémas numériques, à la demande de l'enseignant. La tâche à accomplir ne correspond pas à une question sur la situation matérielle, (qui ne sert qu'à des activités de dénombrement), ni à un problème numérique.

Les types de tâches évoluent :

- au début, la collection est représentée de telle façon que la détermination des deux sous collections soit graphiquement repérable, et il s'agit de trouver m_1 , m_2 et m et de produire la famille de nombre et/ou le schéma numérique associé, les auteurs parlent d'« *histoires de nombres* » à raconter pour cette tâche de description numérique,

- on passe ensuite à des collections sans sous-ensembles repérables, on donne m_1 et m_2 et il faut trouver m , ou on donne m et m_1 et il faut trouver m_2 . Pour accomplir de telles tâches, les élèves sont amenés à constituer un tout ou des sous collections avec du matériel proposé par le maître, essentiellement des

propriétés à cette « association ». Ce n'est que plus tard qu'on verra qu'on peut définir une telle fonction de façon à ce qu'elle soit continue, ...

⁵¹ « Maths. Méthode de Singapour », CP, fichier 1 et Guide pédagogique, Librairie des écoles, Paris, 2016.

« Les Maths avec Léonie », CP fichier 1, éditions Bordas, 2019.

⁵² « Maths. Méthode de Singapour », CP, fichier 1 et Guide pédagogique, Librairie des écoles, Paris, 2016.

cubes emboîtables, afin de produire des triplets, (m_1, m_2, m) correspondant à un schéma numérique. Ce n'est qu'après de nombreuses activités de ce type que les expressions « m_1 et m_2 font m », « m c'est m_1 et m_2 » ou « m_1 et m_2 est une famille de m » sont introduites, à partir de là, les tâches sont numériques et consistent à trouver le troisième élément d'un triplet de nombres (m, m_1, m_2) où m_1 et m_2 font m . On voit ainsi apparaître une première fonction instrumentale du « schéma de lien entre les nombres » : la position des trois nombres dans le schéma prépare l'expression « m_1 et m_2 font m » : on part de trois grandeurs – G, G_1 et G_2 avec $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ et $G = G_1 \cup G_2$ –, on se centre sur leur mesure, m, m_1 et m_2 , on remplit un « schéma de lien entre les nombres » et ce schéma montre la symétrie des rôles joués par m_1 et m_2 et le rôle prépondérant joué par m . Cette symétrie sera utilisée plus loin pour montrer que $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$.

Des situations simples de changement d'état et de composition d'état⁵³(situations partie-tout) sont alors proposées. Le signe + ainsi que le terme addition est introduit : quand « m_1 et m_2 font m », on écrit « $m_1 + m_2 = m$ », « on utilise l'addition pour raconter l'histoire » correspondante. On peut noter que le discours utilisé suppose que l'addition est un objet qui existe par ailleurs, et est familier aux élèves. Ces nouveaux ostensifs sont associés à la notion d'« histoires d'additions ». Toutefois l'expression « somme » de deux entiers n'apparaît qu'en CE 2, lors de l'introduction des « représentations en barres ». Dans cet ouvrage, dans le guide pédagogique, à propos des situations de changement d'état on parle d'état initial et d'état final, il est précisé « que..., on exprime l'état final (6) en connaissant le changement positif (on ajoute 2) de l'état initial (4) » ; ces situations sont ramenées à des situations de composition d'états⁵⁴ : « dans les deux cas on réunit des parties pour faire un tout ». Toutefois, dans le fichier élève, au niveau du CP, on ne trouve aucun élément permettant de caractériser les différents types d'« histoires d'addition ». Les élèves sont amenés à créer des « histoires d'additions », à partir de dessins représentant des situations extra mathématiques de changement d'état et de composition d'état, qu'ils doivent traduire sous la forme « $m_1 + m_2 = m$ ». Le lien entre « famille de nombres », « schémas de lien entre les nombres » et l'addition est fait ; les élèves sont alors amenés à associer « histoires d'additions », « famille de nombres », « schémas de lien entre les nombres », et expression de la forme « $m_1 + m_2 = m$ » pour répondre à une question portant sur des situations de composition d'état ou de changement d'état.

- *la fonctionnalité d'attacher ainsi un nombre m à deux autres nombres m_1 et m_2 n'est pas évoquée à ce stade.* Toutefois dans de nombreux ouvrages, comme dans celui cité précédemment, les élèves vont s'entraîner à produire des triplets (m_1, m_2, m) tels que « m_1 et m_2 font m », à partir de la donnée de deux des nombres. Voire, pour un même m , tous les triplets (m_1, m_2, m) tels que « m_1 et m_2 font m ». C'est une tâche numérique.

Les élèves manipulent des nombres même si pour accomplir cette tâche, ils sont amenés à travailler avec une situation matérielle (qui leur est précisée ou qu'ils créent) et à utiliser le dénombrement. Ils travaillent sur la production de décompositions additives des nombres.

On peut faire l'hypothèse que le graphisme associé à la notion de « schémas de lien entre les nombres »⁵⁵, est un ostensif utile pour outiller une recherche exhaustive des décompositions additives de chaque nombre m de 0 à 10, (raison d'être) : le nombre apparaît dans le cercle de gauche, pour avoir toutes ses décompositions, il suffit de remplir les cercles de droite en commençant par 0 jusqu'à m pour le cercle du haut et en complétant de façon pertinente le cercle du bas. Cet ostensif acquiert ainsi une valeur instrumentale, mais ceci n'est pas précisé.

⁵³ En référence à la terminologie utilisée par Gérard Vergnaud, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, 1990, vol 10(2-3).

⁵⁴ Op. cit.

⁵⁵ Ibid.

- dans la plupart des ouvrages, *la terminologie addition apparaît subrepticement*. Les élèves rencontrent et produisent des triplets m , m_1 et m_2 réputés s'écrire $m_1 + m_2 = m$, sans que la nature de l'objet addition soit précisée. *Tout se passe comme si cet objet était familier à tout le monde*.

L'addition est une application de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ dans \mathbf{N} , qui à deux nombres entiers quelconques fait correspondre un troisième nombre, leur somme⁵⁶, définissant ainsi une relation ternaire.

Cette relation est un objet mathématique qui a des propriétés (commutativité, associativité...) permettant de modéliser des situations concrètes. Par exemple, connaître la mesure d'un tout à partir de la mesure de deux parties disjointes qui recouvrent ce tout, sans avoir à mesurer ce tout, en particulier lorsque le tout est inaccessible. Comme nous le disions plus haut, cette entité mathématique est bien différente d'un triplet voire même d'un ensemble d'entiers (m_1, m_2, m) liés par la relation $m_1 + m_2 = m$.

Dans la majorité des ouvrages (avec ou sans le vocabulaire et le schéma associé évoqués plus haut) comme nous l'avons dit précédemment, les élèves s'entraînent à produire des relations du type $m_1 + m_2 = m$:

- soit connaissant m_1 et m_2 trouver m ,

- soit connaissant m et m_1 ou m_2 , trouver m_2 ou m_1 ,

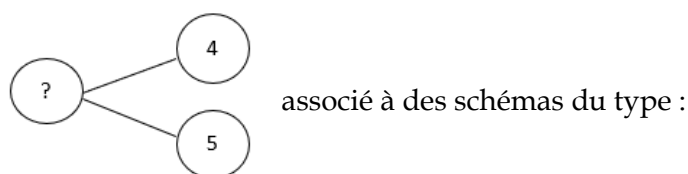
ceci par dénombrement direct de collections ou déplacement sur une file numérique (technique qui revient à un dénombrement des cases parcourues à partir du plus grand nombre).

Des « décompositions additives » de nombres entiers (en général de 0 à 10) sont ainsi produites, sans qu'aucune fonctionnalité de ces activités ne soit donnée. Le chantier de construction de l'addition se poursuit.

Dans la plupart des ouvrages on élabore une table d'addition (10 x 10).

Au cours de cette progression, dans la collection de la Librairie des Écoles⁵⁷, de nouvelles représentations intermédiaires sont utilisées :

Associé à $4 + 5 = ?$ on voit apparaître le schéma suivant :

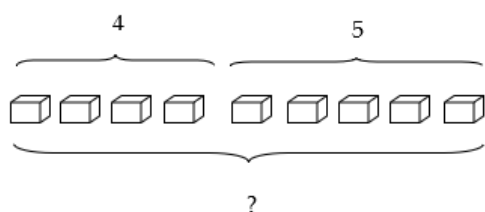


⁵⁶ En fait, dans ce qui suit, nous confondons *somme de deux cardinaux* et le nombre, écriture de cette somme en système décimal de position et résultat de l'*addition des deux nombres correspondant à l'écriture des deux cardinaux en système décimal de position*, comme c'est le cas dans tous les ouvrages de l'enseignement primaire. A ce sujet on pourra se rapporter à l'ouvrage suivant :

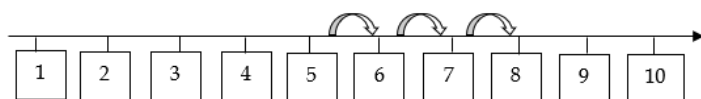
Vergnaud G. (1981). *L'enfant la mathématique et la réalité* (1985 éd.). Berne Peter Lang. p. 109-112.

⁵⁷ Ibid.

ou avec des « trains numériques » ou « trains de cubes »



Ces ostensifs montrent le tout dont on cherche la mesure et les parties dont on connaît la mesure. Ils reprennent le schéma support des décompositions additives pour l'un et permettent le dénombrement pour les autres, elles pointent clairement la donnée inconnue. Ils centrent les élèves sur les éléments pertinents de la situation pour accomplir la tâche, (fonction sémiotique) et constituent un instrument de travail pour avancer dans la tâche à accomplir, par exemple un dénombrement, (fonction instrumentale). Il en est de même de l'ostensif suivant, support à la technique d'addition par avancement sur la droite numérique à partir du plus grand nombre. Associé à $5 + 3 = ?$, on voit apparaître :



Tous ces ostensifs sont utilisés dans un premier temps pour produire des triplets « additifs », donc manipuler des nombres, puis en fin d'unité pour modéliser des situations simples extra mathématiques de composition d'état. Dans le Guide pédagogique, sur un exemple, les auteurs définissent les différentes « représentations qui composent le problème » : « une image pour illustrer la situation problème », « des phrases en français pour exprimer la question », « une phrase mathématique pour écrire l'addition ». Dans le fichier élève, on trouve une représentation supplémentaire : un schéma du type précédent, avant la « phrase mathématique ». Dans le Guide pédagogique, il est précisé que ces ostensifs participeront à la construction des représentations en barres, introduites en CE2, pour modéliser des situations concrètes.

A partir de la table d'addition, la relation sera étendue à un ensemble de plus en plus grand de triplets. Il s'agit bien de la construction de l'ensemble de tous les triplets d'entiers vérifiant cette relation ternaire (même si ce n'est pas dit) en s'appuyant :

- sur ce qui fait sa raison d'être à savoir lier la mesure d'un tout et la mesure de deux parties disjointes et qui recouvrent le tout,
- sur des propriétés des grandeurs,
- et sur l'algorithme d'écriture chiffrée des nombres⁵⁸.

Plus précisément :

- recours à la signification des chiffres dans l'écriture des nombres en système décimal de position,
- recours à la définition de l'addition : $m_1 + m_2$ est la mesure m d'une grandeur G obtenue par réunion de deux grandeurs G_1 et G_2 de mesures respectives m_1 et m_2 donc 4 unités + 5 unités = 9 unités (car, dans la table d'addition $4 + 5 = 9$),

⁵⁸ On voit bien là que l'algorithme d'addition de deux cardinaux construit correspond à la détermination de leur somme écrite dans le système de numération décimal de position.

- recours aux propriétés des opérations sur les grandeurs : pour réunir deux grandeurs G_1 et G_2 on peut opérer dans n'importe quel ordre. L'opération réunion d'ensembles est commutative. $G_1 \cup G_2$ ayant même grandeur que $G_2 \cup G_1$, on aura $m_1 + m_2 = m_2 + m_1$.

On obtient un ensemble de même grandeur en mettant ensemble G_1 et G_2 puis en adjoignant G_3 ou en mettant ensemble G_2 et G_3 puis en y adjoignant G_1 . L'opération réunion d'ensembles est associative. On aura $(m_1 + m_2) + m_3 = m_1 + (m_2 + m_3)$.

Les propriétés correspondantes pour l'addition, commutativité et associativité, sont très rarement évoquées.

L'étude de techniques pour trouver tous les triplets (a, b, c) tels que tel que $a + b = c$ est engagée et se poursuivra jusqu'à la technique de l'addition posée avec retenue.

Celle-ci permettra potentiellement de calculer la somme de deux entiers quelconques. Cela se poursuit jusqu'en cycle 3. Les élèves sont progressivement outillés pour accomplir des tâches de type T2.

A ce point de la progression, qu'en est-il des tâches de type T1 ?

Les élèves sont-ils outillés pour décider, face à une situation matérielle où une question se pose, que c'est l'addition qui permettra d'y répondre ?

Au cours de cette progression, nous avons noté l'absence de reconnaissance de l'addition comme objet mathématique en cours de construction ayant une fonctionnalité.

Les raisons d'être de cet objet ne sont pas évoquées.

Dans les situations matérielles mobilisées pour cette construction, impliquant des grandeurs G_1 , G_2 et G , on ne pointe pas ce qui doit être retenu pour permettre de dire que « m_1 et m_2 font m » ou « $m_1 + m_2 = m$ » pour les mesures correspondantes, afin que la fonctionnalité de l'addition soit respectée.

Toutes ces situations ont des caractéristiques communes :

- deux grandeurs de même nature disjointes,
- un tout réunion des deux grandeurs.

On ne s'intéresse qu'à la mesure des grandeurs en jeu, réunion et mesures obtenues par des techniques propres aux grandeurs manipulées (collections qu'on réunit sans chevauchement, longueurs qu'on met bout à bout, ..., dénombrement, détermination d'une unité de mesure et mesurage, ...).

La somme $m_1 + m_2$, obtenue par addition des nombres m_1 et m_2 , sera le nombre m mesure de toutes les grandeurs G obtenues par réunion de deux grandeurs quelconques, G_1 et G_2 de mesures respectives m_1 et m_2 .

Les situations de composition d'états⁵⁹ (deux parties et un tout) ont été largement fréquentées. Toutefois, dans la plupart des ouvrages, la question des éléments les caractérisant, à savoir les propriétés communes à toutes ces situations, n'est pas abordée.

Dans leur classe, les collègues ont multiplié les occasions de rencontre avec de telle situations, en utilisant des ostensifs de différentes natures, s'inspirant de ce qui a été évoqué précédemment : verbale (introduction du vocabulaire partie, tout), gestuelle (on rassemble les parties en un tout), cubes emboîtables, ...⁶⁰

On peut imaginer que ces activités participent à la construction du sens des représentations en barres.

⁵⁹ Op. cit..

⁶⁰ On pourra se référer au chapitre « Mise en place » de ce document, paragraphe I « Lexique Tout et Parties » et paragraphe II « Justification des quatre opérations »

1.2 La soustraction

Dans de nombreux ouvrages, l'introduction de la soustraction se fait uniquement dans le domaine numérique : « $c - a$ c'est le nombre b qu'il faut ajouter à a pour faire c ».

Comme pour l'addition, et en général en parallèle, après avoir trouvé b pour de petits nombres ($c \leq 10$) par dénombrement, la soustraction sera étendue en s'appuyant sur la signification des chiffres dans l'écriture des nombres en système décimal de position.

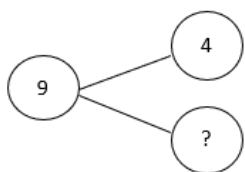
Dans la collection de la Librairie des Écoles⁶¹, l'introduction de la soustraction se fait à l'aide de situations de changement d'état où on « *retranche* » des éléments : huit personnes, cinq s'en vont, « *on peut utiliser la soustraction pour raconter cette histoire* », on écrit la phrase mathématique « $8 - 5 = 3$ » et on la lit « *8 moins 5 égal 3* » ; le discours tenu suppose implicitement que la soustraction existe avant que les élèves rencontrent de telles situations.

Dans cet ouvrage, dans le guide pédagogique, à propos de ces situations, (comme pour les situations de changement d'état où on « *ajoute* » des éléments), on parle d'état initial et d'état final. Il est précisé qu' « *on exprime l'état final connaissant le changement négatif (on soustrait) de l'état initial* », mais il n'existe pas de trace de ce discours dans le fichier de l'élève ou dans la synthèse de la leçon correspondante.

On revient très vite aux situations de composition d'état où on utilise la soustraction pour calculer m_1 ou m_2 connaissant m et m_2 ou m_1 , mais le lien entre les deux types de situations n'est pas précisé.

Les ostensifs utilisés sont du même type que ceux utilisés pour l'addition :

Associé à $9 - 4 = ?$, on voit apparaître le schéma suivant :



ou des schémas du type :



ainsi que la représentation de déplacements « *à rebours* » sur la droite numérique.

Comme pour l'addition, ces ostensifs montrent le tout et la partie dont on connaît les mesures et la partie dont *on* cherche la mesure. Ils reprennent le schéma support des décompositions additives pour l'un et permettent le dénombrement pour les autres, ils pointent clairement la donnée inconnue. Ils centrent les élèves sur les éléments pertinents de la situation pour accomplir la tâche, (fonction sémiotique) et constituent un instrument de travail pour avancer dans la tâche à accomplir, par exemple un dénombrement (fonction instrumentale).

Signalons, dans les leçons consacrées aux longueurs, l'usage de cubes emboîtés pour effectuer des soustractions et des additions.

⁶¹ « Maths. Méthode de Singapour », CP, fichier 1 et Guide pédagogique, Librairie des écoles, Paris, 2016.

A partir du CE1⁶², parallèlement au développement des techniques d'additions et de soustractions posées, un entraînement est proposé pour analyser les énoncés sur des situations de composition d'états : « demander aux élèves ce qui, dans ce problème est recherché et les informations que l'on nous donne pour le trouver. Nous connaissons le nombre de voitures que possède Ali et David (les parties) et nous devons trouver le nombre total de voitures (le tout) », pour le second problème : « demander aux élèves ce que nous connaissons grâce à l'énoncé (le tout, une partie ou les deux parties ?). Ce qui est connu : le total (le nombre de voitures qu'ils ont tous ensemble) et une partie (le nombre de voitures que possède Ali). Demandez-leur comment il faut procéder pour retrouver le nombre manquant, soit le nombre de voitures appartenant à David. ». Dans le Manuel de cours, on trouve, ce qui pourrait être une synthèse de ce travail : « Pour trouver le tout on additionne. Pour trouver une partie on soustrait. »

De même pour les situations de comparaison : à propos d'une situation où deux rangées de jetons sont représentées, « dans quelle rangée il y a le plus de jetons ? Combien y en-t-il de plus ? Dans quelle rangée il y a le moins de jetons ? Combien de moins ? Il s'agit de trouver la différence entre 10 et 6 ... » et cette différence peut s'exprimer de différentes façons : « 10 c'est 4 de plus que 6, 6, c'est 4 de moins que 10, 4 de moins que 10 c'est 6, 4 de plus que 6 c'est 10, la différence entre 10 et 6, c'est 4 »⁶³.

Ce discours n'apparaît pas explicitement dans le Manuel de mathématiques destiné aux élèves, nous ne savons pas comment les enseignants l'utilisent, mais de la lecture du guide pédagogique nous pouvons retenir que :

- dans une situation de composition d'état, les relations ensemblistes doivent être repérées : le tout et les deux parties ; les mesures connues de ces éléments et celle qui est inconnue ; puis « Pour trouver le tout on additionne. Pour trouver une partie on soustrait. »

- dans une situation de comparaison, la plus grande des grandeurs doit être repérée, soit directement à partir de la représentation des grandeurs, et là il s'agit de relation d'ordre entre deux grandeurs, soit à partir des mesures de ces grandeurs, et là il s'agit de relation d'ordre entre deux entiers.

En CE1, alors que la construction de l'addition et de la soustraction avance, les élèves sont amenés à résoudre de nombreux exercices mettant en jeu des situations des deux types. On ignore si les techniques décrites précédemment sont verbalisées et utilisées.

C'est en CE2⁶⁴ que les « représentations en barres » sont introduites, en même temps que les termes « somme » et « différence » :

■ Les termes « somme » et « différence » sont introduits, conformément aux usages en mathématiques : « de façon générale, quand une loi de composition interne associative et commutative sur un ensemble E est notée additivement, le composé $a + b$ de deux éléments a et b de E est appelé somme des termes a et b ». « Si l'équation $a + x = c$ admet une solution unique dans E , elle est notée $c - a$ et appelée différence entre c et a . »⁶⁵.

Dans le guide pédagogique, ils sont introduits ainsi : « quand on additionne deux nombres, on obtient la somme de ces deux nombres », avec comme support une manipulation de cubes : deux parties (5 et 3 cubes) et un tout (8) ; « pour trouver la différence entre deux nombres, on effectue une soustraction », avec comme support la manipulation de deux barres de cubes de longueurs inégales, (5, 3) « combien la plus longue a-t-elle de cubes en plus ? ».

⁶² Maths. Méthode de Singapour, CE1 Manuel de cours et Guide pédagogique, Librairie des écoles, Paris, 2017.

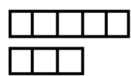
⁶³ Maths. Méthode de Singapour, CE1, Guide pédagogique, page 38, Librairie des écoles, Paris, 2014

⁶⁴ Maths. Méthode de Singapour, CE2, Guide pédagogique, avant-propos pages vi et vii et page 21, Manuel de mathématiques, page 18, Librairie des écoles, Paris, 2013 et 2014

⁶⁵ A Bouvier, M. George, F. Le Lionnais, *Dictionnaire des mathématiques*, édition PUF, 1993

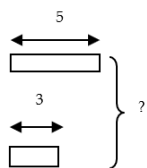
■ Les « représentations en barres » sont introduites en parallèle, en utilisant les ostensifs déjà utilisés :

* avec comme support deux collections, (5 et 3 cubes), représentées en ligne, l'une en dessous de l'autre, alignées à gauche.

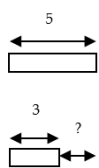


associé à la somme : $3 + 5 = ?$ ou à la différence : $5 - 3 = ?$

On représentera chaque collection par une barre, les deux barres situées l'une en dessous de l'autre, alignées à gauche :



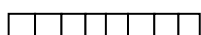
pour la
pour la différence



somme

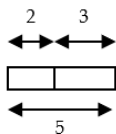
C'est cette représentation qu'on utilisera pour comparer deux nombres : « de combien 5 est-il plus grand que 3 ? »

* si les deux collections en jeu, (par exemple des cubes emboîtés), sont représentées en ligne, l'une à côté de l'autre, on représente chaque partie par une barre et le tout par la barre obtenue en les mettant bout à bout :

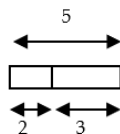


associé à la somme : $5 + 3 = ?$ ou la différence : $8 - 3 = ?$

On représentera chaque collection par une barre, les deux barres situées bout à bout,

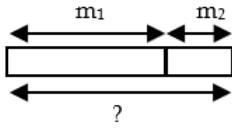


ou

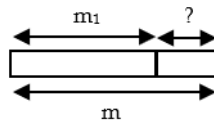


Dans cette partie, les différentes représentations sont associées à des données numériques, à l'addition, à la soustraction, à la « somme » et à la « différence » de deux nombres, même si des cubes emboîtés servent de support :

- représentation avec deux barres mises bout à bout :



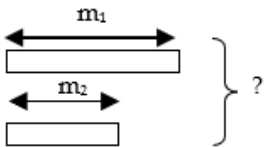
On additionne $m_1 + m_2$
ce schéma représente
une somme.



On soustrait $m_2 - m_1$
ce schéma représente une
différence.

- représentation avec deux barres l'une sous l'autre, alignées à gauche ; on repère le nombre le plus grand, il sera représenté par la barre la plus longue, située en haut, on associe alors les opérations à la question posée :

✓ recherche de la somme de deux nombres :



On additionne $m_1 + m_2$.

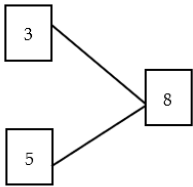
✓ comparaison de deux nombres : recherche de combien m_1 est plus grand que m_2 ou de combien m_2 est plus petit que m_1



On soustrait $m_1 - m_2$.

L'introduction des représentations en barres et de cette nouvelle terminologie se fait sur des situations numériques ; les élèves doivent accomplir des tâches du type : deux nombres étant donnés trouver leur somme ou leur différence ; compte tenu des nombres choisis, (les élèves savent très bien effectuer directement les additions ou soustractions correspondantes), l'enjeu est certainement de s'entraîner à l'usage des termes somme et différence, et à la construction des modèles en barres correspondants : les élèves s'entraînent à associer une opération à un type de représentation. On assure une valeur instrumentale à ces représentations intermédiaires.

Dans le guide pédagogique deux exemples sont traités, la somme des chiffres 3 et 5 puis la différence de 8 et 3 : on revient aux « schémas de lien entre les nombres » représentant deux parties connues et un tout qu'on recherche ou un tout et une partie connue, l'autre partie qu'on recherche,



- on associe des cubes emboîtés à ces schémas numériques, on rappelle la position de la mesure du tout et des deux parties dans le schéma, dans chaque cas on écrit la phrase mathématique correspondante et on effectue l'opération,

- on construit le modèle en barre correspondant.

A ce point du travail on construit la valeur sémiotique des représentations en barre en s'appuyant sur les outils déjà utilisés : les éléments pris en compte dans les schémas de lien entre les nombres et les représentations en barre correspondantes sont les mêmes, (relations ensemblistes entre partie et tout, mesure de deux parties réunies en un tout et mesure du tout), avec des similitudes quant à la représentation spatiale. Ces deux ostensifs pointent clairement la donnée inconnue par un « ? ». Ils centrent les élèves sur les éléments pertinents de la situation pour accomplir la tâche.

Comme nous l'avons dit plus haut, la relation entraînée entre les différents types de représentations en barre et les sommes et les différences, donc l'addition et la soustraction, assure la dimension instrumentale de ces représentations.

Des situations-problèmes sont ensuite proposées, reprenant les différents types rencontrés en CE1, (changement d'état, réunion de deux collections, comparaison de collections : en plus, en moins), ainsi que l'analyse des énoncés qui en avait été faite :

- « *Qu'est-ce qu'il faut trouver ?* »
- « *De quelle information disposons-nous ?* »
- « *Est-ce que nous connaissons le total ? Ou l'une ou l'autre des parties ?* »
- « *Est-ce que nous connaissons les deux parties ? Quelle est la plus grande ?* »
- « *Doit-on comparer deux nombres ? Lesquels ? Lequel est le plus grand ?* »

Les réponses données sont articulées à la construction d'un « *modèle en barre* » de la situation.

Au début c'est le maître qui construit le modèle pour chacune des situations étudiées, en commentant son élaboration en fonction des réponses aux questions posées : par exemple, si on connaît le total on le représente par une barre et on note sa valeur au-dessus, si on connaît une partie on sépare la barre du total en deux et on écrit dessous la valeur de la partie connue et un point d'interrogation sous la partie inconnue. Comme en CE1, le discours est différent suivant le type de situation traité, (changement d'état, réunion de deux collections, comparaison de collections : en plus, en moins). La fonction sémiotique de la représentation en barres s'enrichit des informations saisies à travers cette lecture de l'énoncé centrée sur la détermination des parties, du tout, des mesures connues et de la mesure inconnue.

Donc l'enseignant montre et décrit une technique pour passer d'une situation problème à sa représentation par un modèle en barre.

On a donc toutes les étapes pour passer d'une situation problème à l'opération permettant de répondre à la question posée :

- situation problème,
- analyse de l'énoncé en terme de partie/tout et mesures connues /mesures inconnues,
- construction d'une modélisation en barres articulée sur l'étape précédente,

- reconnaissance de la représentation d'une somme ou d'une différence,
- détermination de l'opération à effectuer.

Les élèves s'entraînent sur de nombreux exemples (situations de comparaison et situations de composition d'état).

La dernière séance de cette partie est consacrée à un début d'étude des « *problèmes à deux étapes* ». Un exemple est traité collectivement sous la conduite du maître, la représentation en barres est donnée dans le manuel de cours et ainsi que les opérations correspondantes. De nombreux exercices d'entraînement sont proposés, dans le texte chacune des deux étapes est précisée. Certains doivent être résolus collectivement en élaborant la représentation en barres et en précisant les différentes étapes.

Quels enseignements pouvons-nous tirer de ces analyses ?

- ✓ Dans les ouvrages que nous connaissons, il est à noter que, lors de l'introduction de **l'addition et de la soustraction**, les élèves ne rencontrent aucune raison d'être de ces opérations, aucune **tâche constitutive de ces objets**, que ce soit sous forme d'un discours évoquant des pratiques sociales ou à travers de situations fondamentales⁶⁶ motivant leur étude.

Des situations simples peuvent être proposées aux élèves.

- Pour l'addition, on demande à un groupe d'élèves de mettre dans une *boîte* opaque une collection d'objets après l'avoir dénombrée en secret, un autre groupe d'élèves fait de même avec une autre collection d'objets, les élèves de la classe doivent deviner combien d'objets sont finalement dans la boîte. Il s'agit d'un jeu où les élèves proposent un nombre en évaluant leur chance de deviner juste pour les motiver, puis vérifient dans la boîte. Ils comprennent vite que le nombre de chaque sous collection est nécessaire pour gagner. Le jeu change, chaque groupe annonce le nombre d'objets mis dans la boîte. Il s'agit alors de construire une stratégie pour connaître le nombre d'objets en tout, sans avoir accès à la collection finale, connaissant le nombre d'objet de chaque partie. On peut faire varier les cardinaux des collections afin de montrer les limites des stratégies à la disposition des élèves, (certainement dénombrement sur des représentations intermédiaires), on pourra remarquer que seul le nombre d'objets de chaque partie intervient, et annoncer la construction d'une façon de connaître le nombre d'objets d'une collection obtenue en réunissant deux collections disjointes dont ne connaît que le nombre d'éléments, ceci quel que soit la grandeur des collections en jeu.

- Pour la soustraction même principe : on met une collection d'objets de cardinal inconnu dans une boîte opaque et on en enlève une poignée, il s'agit de savoir combien il en reste. Comme précédemment les élèves font des propositions, après quelques essais infructueux, ils comprennent qu'il faut connaître le nombre d'objets en tout et le nombre d'objets de la partie retirée. Il s'agit alors de construire une technique pour connaître le nombre d'objets de l'autre partie. Si aucun élève ne pense à avoir recours à une addition à trou, on peut montrer les limites des stratégies utilisées en agissant sur les cardinaux des collections engagées, (certainement dénombrement sur des représentations intermédiaires), remarquer que seul les nombres d'objets du tout et de la partie retirée interviennent, et annoncer la construction d'une façon de connaître le nombre d'objet qu'il reste dans une collection quand on retire une partie dont on connaît le nombre d'objet, quelle que soit la grandeur des collections en jeu.

⁶⁶ Nous faisons référence aux travaux de G. Brousseau.

On pourra se référer à ce sujet à une présentation détaillée d' « Une ingénierie de dévolution à propos de la soustraction » dans Brousseau G. *Théorie des situations didactiques*, page 304 à 310, La pensée sauvage éditeur, 1998.

Si de telles activités peuvent être l'occasion d'annoncer et motiver l'ouverture d'un chantier pour la construction de chacune des deux opérations en annonçant la nature du travail à conduire, elles peuvent aussi être reprises en cours de chantier en agissant sur les cardinaux des collections en jeu afin de soutenir l'avancée du travail et franchir des étapes (cardinaux au-delà de la dizaine...). C'est de plus important pour rappeler la nature des situations matérielles modélisables à l'aide des objets mathématiques en construction, donc pour outiller les tâches de type T1.

- ✓ Dans les ouvrages de La Librairie des Écoles **une succession d'ostensifs** sont introduits du CP au CE2, témoins d'un travail important pour aider les élèves au cours du chantier entrepris. Toutefois leurs fonctions sémiotique et instrumentale ne sont pas toujours explicitées dans les documents que nous avons à notre disposition. Les situations proposées plus haut pour introduire le chantier ont été l'occasion de pointer le rôle des deux parties, du tout et de leur mesure, mais les relations ensemblistes liant les trois parties ne sont pas précises.

Parallèlement au signe +, nous retiendrons l'introduction, dès le début du travail, des « *schémas de lien entre les nombres* ». Ils permettent de montrer les mesures connues, de pointer la mesure inconnue et de lui associer une addition ou une soustraction suivant sa place dans le schéma. De plus, ils peuvent être un outil utile pour organiser la recherche des décompositions additives d'un entier.

Les représentations linéaires (avec des étoiles dans le texte ci-dessus) où apparaissent à la fois des grandeurs et leur mesure connues et l'inconnue, informées au cours de l'analyse d'une situation, préparent aux représentations en barre.

L'introduction des *représentations en barre*, comme des « *schémas de lien entre les nombres* », se fait sur des données numériques pour représenter des sommes et des différences ou comparer deux nombres.

Ces ostensifs sont ainsi associés à une des deux opérations. Nous avons évoqué plus haut leur valeur sémiotique et leur valeur instrumentale progressivement construites en s'appuyant sur des ostensifs graphiques, discursifs et scripturaux.

Enfin, notons le *discours pour analyser une situation* qui est proposé progressivement : il s'appuie sur les ostensifs introduits et permet d'informer un schéma de lien entre les nombres ou de construire une représentation en barres :

- « *Qu'est-ce qu'il faut trouver ?* »
- « *De quelle information disposons-nous ?* »
- « *Est-ce que nous connaissons le total ? Ou l'une ou l'autre des parties ?* »
- « *Est-ce que nous connaissons les deux parties ? Quelle est la plus grande ?* »
- « *Doit-on comparer deux nombres ? Lesquels ? Lequel est le plus grand ?* »

L'introduction de **situations additives variées**, (en référence à la typologie de G. Vergnaud⁶⁷), l'analyse de ces situations pour les ramener à une situation « fondamentale » de partie/tout, l'élaboration dans chaque cas d'un « *schémas de lien entre les nombres* » et d'une représentation en barres pour choisir une opération est certainement important.

⁶⁷ Vergnaud (G.), *L'enfant, la mathématique et la réalité : problèmes de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*, Berne, Peter Lang, 1981.

On pourra aussi se référer au fichier pédagogique, cycle 3 du « Moniteur de Mathématiques : Résolution de problèmes », rédigé par Brégeon (JL.), Huguet (F.), Péault (H.), Dossat (L.), Myx (A.), éditeur Nathan, Paris, 1997, collection : le Moniteur de Mathématiques.

On peut donc résumer le travail face à une situation problème de la façon suivante :

- analyse de l'énoncé en terme de partie/tout et mesures connues /mesure inconnues,
- construction d'une modélisation par un schéma de lien entre les nombres puis/ou avec une représentation en barres articulée sur l'étape précédente,
- reconnaissance de la représentation d'une somme ou d'une différence,
- détermination de l'opération à effectuer.

- ✓ La reprise du chantier peut se faire à de multiples niveaux en choisissant une situation adaptée au niveau auquel on s'adresse. Ceci en mettant en évidence les éléments fondamentaux d'une situation additive : deux grandeurs G_1, G_2 qui se composent en une troisième G . Deux des mesures de ces grandeurs sont connues, la troisième est inaccessible et doit être déterminée. En variant les variables des situations (type de grandeurs, ordre de grandeur des mesures en jeu, type de situation additive, ...), on pourra faire le point sur ce qui est familier aux élèves et ce qui doit encore être construit.

1.3 La multiplication et la division

Classe de C.P.

Actuellement au niveau du CP les instructions officielles préconisent un travail sur :

« des problèmes du champ multiplicatif en une étape (recherche d'un produit ou recherche de la valeur d'une part ou du nombre de parts dans une situation d'un partage équitable). Les écritures mathématiques avec les symboles \div et \times ne sont pas attendues. »⁶⁸

Dans la plupart des ouvrages, concernant la multiplication, diverses activités sont proposées :

- dénombrement de collections rangées en tas identiques
- partage de collections en un nombre connu de tas identiques ou en tas de grandeur connue sans reste.

Ces types de tâches, déjà rencontrées en grande section de maternelle, peuvent être résolues soit par manipulation effective des éléments (dénombrement direct ou distribution) soit en ayant recours à l'addition et peut-être à la soustraction. Mais ce n'est pas explicite pour cette dernière. Ces activités à ce niveau ne font pas référence à la multiplication ou à la division. Nous ne trouvons pas d'activités de dénombrement de collections rangées en lignes et colonnes régulières.

Dans la collection de la Librairie des École, au CP⁶⁹, contrairement à l'addition et à la soustraction, le travail débute par des situations problèmes : collections rangées en tas identiques, combien y a-t-il d'objets en tout ? ou collection dont on connaît le nombre d'objets, combien de tas de valeur donnée peut-on faire, ou si on répartit en un nombre donné de tas, combien d'objets y aura-t-il dans chacun des tas ? Pour accomplir ces tâches, dans un premier temps, le dénombrement est attendu pour les premières, une répartition effective pour les autres.

Un travail est fait sur le vocabulaire : dans les premières situations distinction entre le nombre de groupes et le nombre d'objets dans chaque groupe. En augmentant le nombre de groupes et le nombre d'objets dans chaque groupe, les auteurs pensent invalider la technique de dénombrement au bénéfice

⁶⁸ Attendus en fin d'année de CP, annexe 2 mathématiques, EDUSCOL, Ministère de l'éducation et de la jeunesse.

⁶⁹ « Maths. Méthode de Singapour », CP Fichier 2, Exercices et Guide pédagogique, Librairie des écoles, Paris, 2016.

de l'addition réitérée : on passe alors du dénombrement effectif à l'écriture « $2 + 2 + 2 = 6$ » et « 3 groupes de 2 = 6 ». Dans l'écriture de l'addition réitérée, on repère le nombre de groupes et la valeur de chaque groupe. Quelques situations sont proposées où les groupes égaux sont représentés en colonnes et lignes comportant le même nombre d'objets, la collection est de fait rangée en ligne et colonnes régulières.

L'introduction du signe \times , dans cette collection se fait en CP et se justifie « *par souci d'efficacité* », on remplace « *le dénombrement et l'écriture sous forme d'addition répétée par une nouvelle opération qui s'appelle la multiplication* » ; « 3 groupes de 2 » devient « $3 \times 2 =$ » ; « *dans une addition réitérée, il peut y avoir trop de nombres, le calcul est long. Avec la multiplication, il n'y a que deux nombres, le calcul est bien plus rapide* ». Une nouvelle opération est annoncée, permettant de calculer le nombre d'éléments d'une collection constituée de « *groupes égaux* », mais comment se conduit le calcul ? On est toujours dans l'ambiguïté : est-ce qu'on construit une nouvelle opération, (première phrase ci-dessus), ou est-ce que cette opération existe par ailleurs : « *La multiplication permet de calculer le nombre total d'objets d'une collection disposés en groupes égaux. Quand je multiplie, je dois compter le nombre d'objets par groupe et le nombre (total) de groupe* ».

On peut noter que « 3×2 » est un compte-rendu d'une manipulation, (réunion de trois groupes de deux objets), et un nombre entier (celui qui correspond à l'addition répétée). Les élèves s'exercent à représenter des multiplications par des matrices rectangulaires afin de « *visualiser les additions répétées cachées dans la multiplication et commencer à comprendre la commutativité de la multiplication* ».

Le signe \div n'est pas introduit à ce niveau.

Classe de C.E.1

C'est en CE1 que le signe \times doit être introduit. En fin de CE1, dans les textes précisant les attendus, on trouve parlant de l'élève :

« *Il connaît le sens du signe \times .*

Il résout des problèmes multiplicatifs qui mettent en jeu un produit.

Il résout des problèmes à deux étapes mixant additions, soustractions et/ou multiplications.

Il résout des problèmes de partage (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs). »⁷⁰

La rencontre avec la **multiplication** dans l'enseignement primaire se fait classiquement à partir de situations appartenant à l'une des deux grandes classes de *situations multiplicatives* que nous allons présenter ci-dessous.

- La **première classe** est constituée de situations du type suivant :

« Une équipe gagne 5 enveloppes contenant chacune 6 jetons. Combien de jetons cette équipe a-t-elle gagnés ? »

Donc : « *Dans une situation où plusieurs quantités (ou valeurs) identiques sont réunies, déterminer la quantité (ou la valeur) totale, ...* »⁷¹

C'est ce type de situations que les élèves ont rencontré en CP.

⁷⁰ Attendus en fin d'année de CE1, annexe 4 mathématiques, EDUSCOL, Ministère de l'éducation et de la jeunesse.

⁷¹ B. O. n° 1 du 14 février 2002, page 53 et B. O. n°5 du 12 avril 2007, page 62.

Pour accomplir ce type de tâches, on peut utiliser une technique de dénombrement effectif de la collection totale, par sur comptage par exemple, ou bien une technique numérique d'additions répétées, comme cela a été vu en CP.

On introduit en général la multiplication avec un discours du type : « il y a 5 fois 6 jetons. On écrit : 5×6 . Compter 5 paquets de six jetons, c'est l'opération la plus courte. Elle s'appelle la multiplication. On peut dire 5 fois 6 ou bien 6 multiplié par 5 »⁷² ou encore « la multiplication est une façon plus simple d'écrire cette addition répétée ».

Le discours tenu sous-entend que la multiplication est connue par ailleurs (c'est l'opération la plus courte) ou que c'est une façon d'écrire, en abrégé, le résultat d'additions répétées.

En général l'attention est attirée sur le fait que l'objet de la recherche porte sur le cardinal d'un ensemble de jetons.

Dans l'égalité qui s'en suit : $5 \times 6 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6$, le 5 et le 6 ne réfèrent pas à des objets de même nature. En effet, 5 est le nombre qui répète le nombre de jetons et 6 est un nombre de jetons de même que 30. Donc le résultat est bien 5×6 ou 5 fois 6 et non pas 6×5 ou 6 fois 5⁷³.

L'écriture $a \times b$ et l'expression a fois b sont des ostensifs qui représentent la somme de a nombres égaux à b et donc permettent d'associer aux deux entiers a et b une addition répétée, voire le résultat de cette addition.

Cette définition a l'avantage d'établir un lien direct avec l'addition : la multiplication résume une addition répétée. La filiation ainsi établie permet de disposer d'une gamme étendue de techniques de calcul du produit. Par contre, elle a l'inconvénient de rendre difficile la justification (c'est-à-dire le discours technologique) de certaines propriétés essentielles de cette opération comme découlant de sa définition. Il n'y a en effet aucune raison pour que le nombre de jetons de l'ensemble constitué par le contenu de 5 enveloppes contenant chacune 6 jetons soit le même que celui d'un ensemble de jetons constitué par le contenu de 6 enveloppes contenant 5 jetons chacune.

- La **seconde classe** de situations multiplicatives est constituée de situations du type suivant :

« Julie a trois tee-shirts et quatre pantalons différents. De combien de manières différentes peut-elle s'habiller avec un tee-shirt et un pantalon ? ». On accompagne ce texte d'un tableau à double entrée avec 4 colonnes (une par pantalon), et 3 lignes (une par tee-shirt) qui sert d'outil pour la technique de dénombrement à mettre en œuvre. Les éléments du tableau sont des tenues toutes différentes.

Donc : « Dans une situation où des objets sont organisés en rangées régulières, déterminer le nombre total d'objets, ... »⁷⁴.

A ce nombre on associe une écriture multiplicative, 3×4 ou 4×3 dans le cas de l'exemple précédent, gardant en mémoire le nombre de lignes et le nombre de colonnes du tableau. Pour trouver le nombre total d'objets on utilise une technique de dénombrement ou une technique de calcul numérique en décomposant le tableau en lignes ou colonnes, et en effectuant des additions répétées, correspondant à la réunion des lignes ou des colonnes. On prend soin de remarquer que la connaissance du nombre de lignes et du nombre de colonnes renseigne, à eux seuls, sur le nombre de cases.

On débute ainsi la construction d'un lien relationnel entre trois entiers : a, b et le nombre d'éléments d'un tableau à a lignes et b colonnes qu'on note $a \times b$ ou $b \times a$.

⁷² Adaptation du texte extrait de « Archimaths », CE1 guide pédagogique, page 134, Editions Magnard, 2017.

⁷³ Ce point important s'éclaire davantage si l'on abandonne les cardinaux pour travailler avec des grandeurs continues, comme dans le problème suivant : « on a un ruban constitué de 5 morceaux de 6 cm chacun, combien mesure ce ruban ». G. Vergnaud, parle alors **d'opérateur scalaire** dans la classification qu'il fait des structures multiplicatives en théorie des champs conceptuels.

⁷⁴ B. O. n° 1 du 14 février 2002, page 53 et B. O. n° 5 du 12 avril 2007, page 62.

Certains ouvrages introduisent le terme de « produit de a et b » pour le troisième terme.

Cette définition cohérente avec la définition ensembliste de la multiplication⁷⁵ a l'avantage de rendre facilement intelligibles les propriétés de la multiplication c'est-à-dire de produire un discours technologique. En effet, la représentation s'appuyant sur des tableaux aux dimensions appropriées permet de justifier par simple visualisation la commutativité et l'associativité : un tableau à 3 lignes et 4 colonnes a le même nombre de cases qu'un tableau à 4 lignes et 3 colonnes.

Il en est de même pour la distributivité simple, du type $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$, ou double, du type $(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$, par découpage et reconstitution double ou simple de tableaux.

Dans tous les ouvrages, on introduit très vite des situations de la classe qui n'a pas été support de la première rencontre. Si le signe \times a été introduit avec des situations où plusieurs quantités identiques sont réunies, face à une situation où des objets sont organisés en rangées régulières on interprète le tableau comme réunion des objets de chaque colonne. Si le signe \times a été introduit avec des situations où des objets sont organisés en rangées régulières, face à une situation où plusieurs quantités identiques sont réunies, on constitue un tableau en alignant sur une même colonne les objets de chaque quantité.

On a donc très vite la possibilité de construire un lien relationnel entre trois entiers, a, b, et $a \times b$.

L'ostensif $b \times a$ représente un compte-rendu de manipulation (a tas de b objets – ou b tas de a – objets réunis ensemble) ou d'organisation d'une collection (en a lignes et b colonnes – ou b lignes et a colonnes). Il représente aussi un entier, résultat d'un dénombrement ou de la somme de a nombres égaux à b – ou de b nombres égaux à a –, égal au cardinal des collections évoquées précédemment.

On construit progressivement une table de multiplication, en général jusqu'à 5 à ce niveau, à l'aide d'additions répétées et en utilisant la commutativité. Des calculs sont faits. Ils impliquent des nombres plus grands pour lesquels on s'appuie sur la signification des chiffres dans l'écriture des nombres en système décimal de position et sur la distributivité.

Dans la collection de la Librairie des Ecoles, on l'a dit plus haut, l'introduction de la multiplication débute dès le C.P. On parle d'une nouvelle opération, permettant de calculer le nombre d'éléments d'une collection constituée de « groupes égaux », plus rapide que l'addition répétée, car elle ne met en jeu que deux nombres : le nombre de groupes et la valeur de chaque groupe. En C.E.1 le calcul de la

⁷⁵ Précédemment nous avons rappelé qu'un entier est le cardinal de tous les ensembles équipotents entre eux, le produit de deux cardinaux, donc de deux entiers naturels, est défini comme étant le cardinal de l'ensemble produit ; ce dernier est encore appelé **produit cartésien** de deux ensembles. Précisons : étant donnés deux ensembles *finis* A et B, on appelle produit cartésien de A et B, et on note $A \square B$, l'ensemble de tous les couples (x, y), où x est un élément de A et y un élément de B. Par exemple, avec $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$, le produit cartésien de A et de B est l'ensemble des couples : $\{(a,1), (a,2), (a,3), (a,4), \dots (c,3), (c,4)\}$, ensemble qui peut être représenté dans un tableau ayant en ligne tous les couples de première élément a, b ou c et en colonnes tous les couples de second élément 1, 2, 3 ou 4 ; ici card. (A) = 3 et card. (B) = 4 et card. ($A \square B$) = 12 donc par définition $3 \square 4 = 12$. L'opération qui, à deux entiers naturels associe leur produit, est appelée **la multiplication** des entiers naturels, ou encore la multiplication dans **N**.

valeur du « tout » constitué de « parties équivalentes » par additions répétées est repris ainsi que son écriture sous forme multiplicative. Les élèves sont invités à ranger de telles collections en colonnes, (ou rangées), de même hauteur ou même longueur, et apprennent à associer dans l'écriture $a \square b$, a ou b au nombre de colonnes ou au nombre de lignes. Avec de nombreux exercices, ils s'entraînent à écrire sous forme multiplicative et à calculer le nombre d'éléments de collections soit constituées de groupes égaux soit en rangées et colonnes de même longueur, par dénombrement ou additions répétées. L'égalité des nombres correspondant à $a \times b$ et $b \times a$ est réaffirmée. On débute la construction de la relation ternaire entre les trois entiers a , b et $a \times b$, évoquée plus haut.

Le terme de *division* et le symbole associé ne sont pas utilisés. Les ouvrages proposent très peu de problèmes de partage. Comme en C.P. ils doivent être résolus par manipulation effective, en ayant recours à des additions répétées ou, ce qui est nouveau par rapport au C.P., à une multiplication à trou : connaissant la valeur du tout c , on cherche combien de tas de b objets on peut faire, donc l'entier a tel que $a \times b = c$, ($? \times b = c$), ou on cherche la valeur d'un tas si on répartit le tout en a tas donc l'entier tel que $a \times b = c$, ($a \times ? = c$).

Dans la collection de la Librairie des Écoles, les problèmes de partage avaient aussi été abordés en C.P., avec les deux types de situations : à partir d'une collection dont on connaît le nombre d'objets, combien de tas de valeur donnée peut-on faire, ou quelle sera la valeur de chaque tas si on répartit les éléments en un nombre donné de tas ? Pour accomplir ces tâches, dans un premier temps, le dénombrement est attendu pour les premières, une répartition effective pour les autres. Ces situations sont reprises en C.E.1.

Dans le Guide pédagogique la terminologie « *division par nombre de groupes* » est employée pour les premières situations, « *division par nombre d'unités par groupe* » pour les secondes situations ; dans le manuel élève le symbole \div est introduit : « *le symbole utilisé pour la division est \div* », « *$12 \div 3 = 4$, signifie : 12 objets divisé en 3 groupes donne 4 objets dans chaque groupe* ». A ce niveau c'est un compte- rendu de manipulation. De nombreux exercices d'entraînement sont proposés dans lesquels une collection est représentée organisée en b groupes, le nombre total d'objets, a , est donné ; il s'agit de compléter ou produire une écriture de la forme $a \div b = ?$, et une phrase de la forme « *partager a objets en b groupes, ça fait ... objets par groupe* ». Toutes les données numériques sont fournies par la représentation.

La terminologie « *division par nombre d'unités par groupe* » est employée pour les secondes situations. Partant d'une division « *$8 \div 2 = 4$* », l'enseignant précise qu'on « *utilise également la division lorsqu'on connaît le total et le nombre d'unités, d'éléments ou d'objets dans chaque groupe. L'inconnu est le nombre de groupes nécessaires. $8 \div 2 = 4$ peut signifier 8 divisé en groupes de 2 donne 4 groupes* »⁷⁶.

Ici aussi de nombreux exercices d'entraînement sont proposés dans lesquels une collection est représentée organisée en groupes de b éléments, le nombre total d'objets, a , est donné ; il s'agit de compléter ou produire une écriture de la forme $a \div b = ?$, et une phrase de la forme « *partager a objets en groupes de b objets, ça fait ... Groupes* ». La représentation donne le nombre de groupes, donc il s'agit de s'entraîner à utiliser les ostensifs verbaux associés l'écriture numérique $a \div b = c$.

Ensuite, à partir de représentations de collections de a éléments, réparties en b groupes équivalents de c éléments chacun, les élèves s'entraînent à trouver deux histoires de divisions et deux histoires de multiplications :

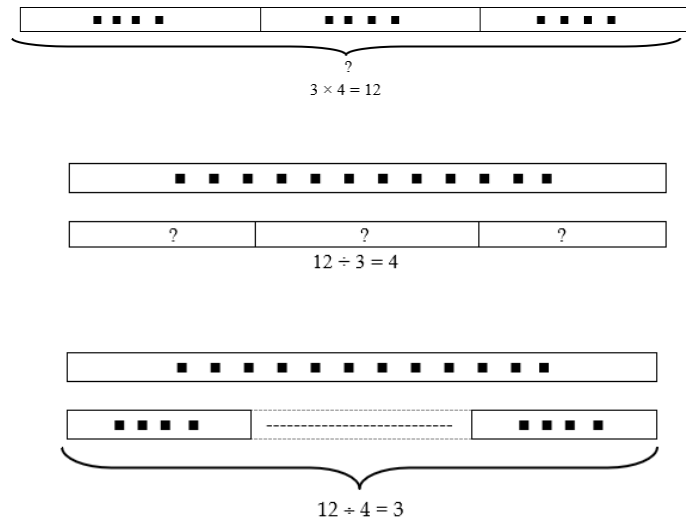
- on divise a éléments en b groupes équivalents, il y aura : $a \div b = c$ éléments dans chaque groupe,

⁷⁶ « Manuel de mathématiques. Méthode de Singapour », CE1, Manuel de cours, Cahier d'exercices A et Guide pédagogique, Librairie des Écoles, Paris, 2008.

- on divise a éléments en groupes de c éléments, il y aura : $a \div c = b$ groupes,
- on a b groupes de c éléments chacun, on a : $b \times c = a$ éléments en tout,
- on a c éléments dans chacun des b groupes, on a $c \times b = a$ éléments en tout.

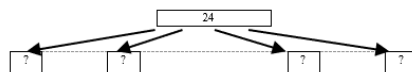
Un travail sur le lien entre multiplication et division débute.

Dans le guide pédagogique, en plus de la représentation du tout et des parties en bulles, on introduit une représentation linéaire des situations en représentant les objets du tout par des cubes (ici on met des ■) :

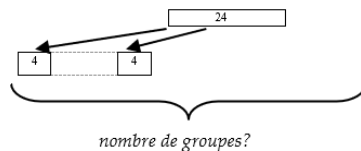


Ces schémas évoquent les représentations en barres qui seront introduite en C.E.2, mais on ne sait pas comment ces ostensifs sont utilisés avec les élèves.

A partir de là on commence à construire des relations numériques : multiplication et division par 2 et par 3, en comptant de deux en deux, puis de trois en trois ; construction des tables de multiplication par 2 et par 3 ; multiplication et division par 4 par dénombrement avec des cubes emboîtables ; multiplication et division par 5 en comptant de 5 en 5 ; multiplication et division par 10. Dans chaque cas on complète la table de multiplication et la division est liée à la multiplication, (« pour trouver le résultat d'une division par b de a il faut penser au nombre qui, multiplié par b, permet d'obtenir a », donc une technique de multiplication à trou est encouragée). Dans le guide pédagogique, à propos du lien division / multiplication, les termes parties et tout et des « schémas de lien entre les nombres » sont mobilisés :



pour le tout divisé par le nombre de groupes égaux ; associé à $24 \div 4$ et $6 \begin{matrix} \xrightarrow{\times 4} \\ \xleftarrow{\div 4} \end{matrix} 24$



pour le tout divisé en groupes égaux.

Dans les leçons correspondant les élèves résolvent de nombreuses situations multiplicatives des quatre types.

Classe de C.E. 2

En fin de CE2, dans les textes précisant les attendus on trouve, parlant de l'élève :

« Il connaît le sens des signes $-$, $+$, \times et \div .

Il résout des problèmes de partage et de groupement (ceux où l'on cherche combien de fois une grandeur contient une autre grandeur, ceux où l'on partage une grandeur en un nombre donné de grandeurs). »

Pour la **multiplication**, dans la plupart des ouvrages, après un rappel rapide des situations ayant permis l'introduction du signe \times en C.E.1, le chantier de calcul des produits $a \times b$ se poursuit. La table de multiplication est complétée jusqu'à 10. Les produits d'un entier par plusieurs centaines, la technique de la multiplication posée par un nombre à un chiffre puis à deux chiffres sont étudiés. Quelques problèmes multiplicatifs sont proposés en application mais on se centre surtout sur les techniques de calcul.

A propos de problèmes de partage, le terme **division** apparaît en titre de leçon dans la grande majorité des ouvrages mais aucun ouvrage n'envisage la division comme une opération qui à deux entiers a et b fait correspondre un entier q , voire deux entiers q et r , tels que $a = b \times q + r$.

Le signe \div n'apparaît que dans de très rares ouvrages⁷⁷.

Dans plusieurs ouvrages, à propos de l'étude de quelques activités de partage de collections, en un nombre connu de tas identiques ou en tas de grandeur connue, le terme de « reste après partage » est employé voire celui de quotient et de diviseur. Si, dans les situations de partage traitées, on trouve encore des répartitions effectives, elles servent d'élément technologique pour utiliser des soustractions répétées ou des familles de multiples :

- pour fabriquer 6 colliers avec 54 perles, on utilise d'abord une perle pour chacun des colliers, il reste $54 - 6 = 48$ perles, ..., on utilise 7 perles, il reste $54 - 42 = 12$ perles, on utilise 8 perles, il reste $54 - 48 = 6$ perles donc on peut mettre 9 perles dans chaque collier.
- on partage un paquet de 24 cartes équitablement entre 4 enfants, au premier tour de distribution on a donné $4 \times 1 = 4$ cartes, au deuxième tour on a donné $4 \times 2 = 8$ cartes, ... au sixième tour on a donné $4 \times 6 = 24$, au septième tour on donnerait $4 \times 7 = 28$, ce n'est pas possible.

Dans les instructions officielles de 2002, il était attendu en fin de C.E.2, que les élèves sachent :

« Dans une situation de partage équitable, connaissant la quantité, (ou la valeur), totale a et le nombre de parts b , calculer :

- le montant de chaque part q ,
- la quantité, (ou la valeur), restante après partage r . »

et :

« Dans une situation de regroupements identiques, connaissant la valeur, (ou la quantité), totale a et la valeur, (ou la quantité), de chaque parts b , calculer :

- le nombre de parts q ,
- la valeur, (ou la quantité), restante après partage r . »⁷⁸

⁷⁷ « Au rythme des maths », CE2, édition Bordas, Paris 2015.

⁷⁸ B.O. n° 1 du 14 février 2002, page 53.

Dans les instructions officielles de 2008, la division était présentée comme une nouvelle opération en C.E.2. A ce niveau les élèves devaient :

« Connaître une technique opératoire de la division et la mettre en œuvre avec un diviseur à un chiffre. »⁷⁹ Les définitions de quotient et de reste étaient données et un travail d'approche de l'algorithme est entrepris : « la division s'avère un outil efficace pour résoudre les problèmes de partages ou de regroupements ayant précédé sa définition, et il devient intéressant d'améliorer la rapidité des calculs. »

Dans les programmes actuels, ces apprentissages sont repoussés au cours moyen.

Dans la collection de la Librairie des Écoles, les tables de multiplication par 2, 3, 4, 5 et 10, vues en C.E.1, sont retravaillées : entraînement à compter de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, de 5 en 5 et de 10 en 10 ; entraînement à reconnaître les nombres appartenant aux différentes tables. Comme en C.E.1, à partir d'une représentation d'une collection en tas identiques ou en tableau rectangulaire quatre problèmes correspondant à deux divisions et deux multiplications sont énoncés. Enfin la multiplication par zéro et la division de zéro par un entier sont traitées à partir de collections sans éléments.

De nombreux exercices impliquant la multiplication ou la division sont résolus. Dans le Guide pédagogique, comme en C.E.1, les expressions « *division par nombre de groupes* » et « *division par nombre d'unités par groupe* » sont employées mais on ne sait pas l'usage qui en est fait avec les élèves.

Les représentations en barres sont alors introduites.

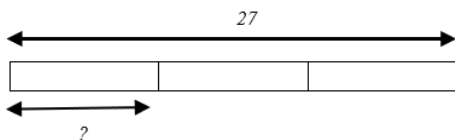
Un exemple de chacune des situations multiplicatives, (produit, « *division par nombre de groupes* » et « *division par nombre d'unités par groupe* ») est traité au tableau par le maître sous forme de questions/réponses en s'appuyant sur les ostensifs verbaux déjà rencontrés, (valeur du tout, nombre de parts, valeur d'une part, ...) :

- on connaît le nombre de parts, (4), et la valeur d'une part, (3€) ; on cherche la valeur du tout :



représentation associée à : « 1 part = 3€ ; 4 parts = $3€ \times 4 = 12€$ ».

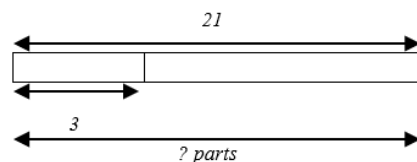
- on connaît la valeur du tout, (27), et le nombre de parts, (3) ; on cherche la valeur de chaque part :



représentation associée à : « 3 parts = 27 ; 1 part = $27 \div 3 = 9$ ».

- on connaît la valeur du tout, (21), et la valeur d'une part, (3) ; on cherche le nombre de parts

⁷⁹ B.O. n° 3 du 19 juin 2008, p. 38.



représentation associée à : « $21 \div 3 = 7$ ».

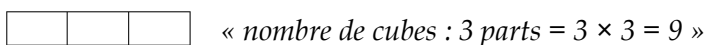
Les élèves doivent ensuite « schématiser » un nombre important de problèmes de ces différents types, puis les résoudre.

Un travail analogue est fait pour les situations de comparaison. Les élèves ont déjà utilisé les représentations en barres pour comparer la valeur de deux collections (« en plus », « en moins »), impliquant l'addition ou la soustraction. Ici une des deux collections est un nombre entier de fois plus grande que l'autre. Un exemple est traité par le maître en utilisant une collection de jetons, (3), et une collection de cubes, (9). Les jetons et les cubes sont représentés au tableau :



« Une part c'est 3 jetons ». « Il y a trois fois plus de cubes que de jetons, les parts de cubes sont trois fois plus nombreuses que celles de jetons ».

On associe le modèle en s'appuyant sur le discours :



A partir de là, d'autres questions sont posées :

-« nombre de parts correspondant au nombre total d'objets ? », « nombre total d'objets ? », « combien les cubes ont-ils de parts de plus que les jetons ? »

Les élèves doivent ensuite « schématiser » un nombre important de problèmes de ce type puis les résoudre.

Ils résolvent ensuite des problèmes multiplicatifs et des problèmes à deux étapes impliquant les quatre opérations.

Quels enseignements pouvons-nous tirer de ces analyses ?

- ✓ Dans tous les ouvrages consultés, si les termes multiplication et division sont utilisés, ils évoquent une opération qui serait connue par ailleurs. Les écritures $a \div b$ et $a \times b$ sont introduites dans tous les ouvrages comme compte-rendu d'une manipulation et/ou comme une écriture abrégée d'additions répétées pour $a \times b$ ou un nombre c tel que $b \times c = a$.
Les nombres attachés à ces ostensifs permettent de débiter la construction de deux relations ternaires $(a, b, a \times b)$ et $(a, b, a \div b)$.
- ✓ Si la première rencontre avec les écritures $a \div b$ et $a \times b$ se fait lors de la résolution d'une situation problème, ces situations ne justifient pas la construction d'une nouvelle opération, les outils à la disposition des élèves suffisent pour accomplir les tâches demandées. Comme pour l'addition et la soustraction, des situations simples peuvent être proposées aux élèves pour motiver la construction

d'un outil d'évaluation des grandeurs plus efficace que l'addition répétée ou la répartition effective, par exemple en jouant sur les variables numériques :

On veut que les élèves de C.P., (23 élèves), C.E.1, (21 élèves), et C.E.2, (25 élèves), assistent à un spectacle dans la salle municipale. Dans cette salle il y a 6 rangées de 15 sièges chacune. Tous les élèves pourront-ils *s'asseoir*?

Les élèves de C. E.1, (21 élèves), ont collecté des bouchons pour les envoyer à une association. Chaque élève rapporte une enveloppe avec 6 bouchons. Il faut avoir 100 bouchons pour faire un envoi, peut-on faire un envoi ?

Les élèves de C.E.1 ont collecté des bouchons pour les envoyer à une association. Les bouchons sont en vrac dans une caisse, ils doivent être mis dans des enveloppes de 6 bouchons, combien faut-il prévoir d'enveloppes ?

De telles activités peuvent être l'occasion d'annoncer et de motiver l'ouverture d'un chantier pour la construction de chacune des deux opérations en annonçant la nature du travail à conduire. C'est de plus important pour rappeler la nature des situations matérielles modélisables à l'aide des objets mathématiques en construction, donc pour outiller les tâches de type T1.

- ✓ Dans les ouvrages de la Librairie des Écoles, les ostensifs utilisés pour construire les valeurs sémiotiques et instrumentales des représentations en barre pour l'addition et la soustraction sont repris, adaptés à des situations d'un tout réunion de plusieurs parties de même grandeur.

III - ENSEIGNEMENTS TIRÉS DE CETTE ÉTUDE

Les éléments d'analyses retranscrits ci-dessus laissent à penser que l'étude de l'arithmétique à l'école primaire pourrait être améliorée :

- ✓ Tout d'abord ne peut-on pas mettre les élèves devant de vraies questions nécessitant d'élaborer une technique ? Plutôt que de leur demander devant une collection de 9 jetons à laquelle on ajoute effectivement 5 jetons, combien en a-t-on ? On peut bloquer la possibilité d'accéder au résultat par simple dénombrement en cachant la collection finale. La question n'est plus combien a-t-on de jetons mais comment trouver le résultat ? En effet, par exemple, l'enjeu de la construction de l'addition n'est pas d'associer, au cas par cas, à deux entiers a et b un troisième entier donnant la mesure de la réunion d'un ensemble de mesure a et d'un ensemble de mesure b , mais de construire une technique qui permettra de le faire pour tout couple d'entiers. C'est l'occasion de préciser une raison d'être de cet objet mathématique, et ceci, pour les quatre opérations.
- ✓ L'élaboration de cette technique justifie des étapes. Ces étapes sont celles franchies classiquement dans les ouvrages scolaires, mais celles-ci sont rarement présentées comme participant à un même chantier, à la construction d'un même objet mathématique. Chaque étape est l'occasion de rappeler l'enjeu poursuivi.

- ✓ L'analyse de la progression proposée dans la collection de la Librairie des Écoles permet d'envisager un travail nécessaire pour que les représentations intermédiaires que sont les représentations en barres acquièrent une valeur sémiotique et une valeur instrumentale et permettent un discours technologique dans l'activité d'arithmétisation des problèmes additifs ou multiplicatifs.

Nous le disions plus haut : « *les représentations intermédiaires auxquelles nous nous intéressons ne sont pas auto-justifiées. Un travail est nécessaire pour qu'elles acquièrent du sens et deviennent efficaces dans les travaux de modélisation arithmétique demandés aux élèves.*

Il ne suffit pas de montrer une représentation en barres aux élèves pour qu'ils l'associent spontanément à telle ou telle opération : cela se construit. »

Table des matières

INTRODUCTION	9
I - LES REPRESENTATIONS EN BARRES.....	9
1. De quoi s'agit-il ?.....	9
2. Quelle(s) fonction(s) peuvent avoir les représentations en barres dans la résolution des problèmes d'arithmétique ?	11
II - ORGANISATION DU DOCUMENT.....	12
LEXIQUE TOUT - PARTIES ET SENS DES QUATRE OPERATIONS.....	13
I - LEXIQUE TOUT ET PARTIES	13
1. Réunion de deux Parties pour trouver le Tout.....	13
2. Dissociation du Tout pour trouver l'une des deux Parties.....	15
II - JUSTIFICATION DES QUATRE OPERATIONS.....	17
1. L'addition.....	17
1.1 Emergence des représentations de élèves	17
1.2 Représentation d'un problème avec de petites mesures schématiquement représentables.	17
1.3 Représentation d'un problème avec de grandes mesures (pour les élèves de CM).....	22
1.4 Institutionnalisation	23
2. La soustraction	23
2.1 Emergence des représentations des élèves.....	23
2.2 Représentation d'un problème avec de petites mesures schématiquement représentables	24
2.3 Représentation d'un problème avec de grandes mesures (pour les élèves de CM).....	27
2.4 Institutionnalisation	28
3. La multiplication.....	29
3.1 Emergence des représentations des élèves.....	29
3.2 Justification de la multiplication.....	29
3.3 La commutativité.....	31
3.4 Institutionnalisation	32
4. La division	32
4.1 Emergence des représentations des élèves.....	32
4.2 Justification de la division	32
4.3 Recherche de la mesure d'une PARTIE : division partition.....	33
4.4 Première institutionnalisation : division partition.....	34
4.5 Recherche du nombre de PARTIES : division quotient	35
4.6 Deuxième institutionnalisation : division quotient	36
CHAMP ADDITIF	37
I - PROBLEMES DITS DE « COMPOSITION D'ETAT ».	37
1. Préambule : de quoi s'agit-il ?	37
2. Problèmes nécessitant une addition.....	38
2.1 Recherche du Tout : Premier problème	39
2.2 Recherche du Tout : Deuxième problème	41

2.3	Institutionnalisation	43
2.4	Entrainement	44
3.	Problèmes nécessitant une soustraction	45
3.1	Problème	46
3.2	Institutionnalisation	47
3.3	Entrainement	48
4.	Institutionnalisation pour les problèmes additifs et soustractifs	49
5.	Entrainement	50
II -	PROBLEMES DITS DE « COMPARAISON »	52
1.	Préambule : de quoi s'agit-il ?	52
2.	Recherche de la comparaison ou écart	53
2.1	Recherche de comparaison : Premier problème	53
2.2	Recherche de comparaison : Deuxième problème	54
2.3	Institutionnalisation	56
3.	Recherche de l'un des états	56
3.1	Recherche de la Mesure la plus petite	56
3.2	Recherche de la Mesure la plus grande	58
3.3	Institutionnalisation	59
4.	Institutionnalisation pour les problèmes de comparaison	60
5.	Entrainement	62
III -	PROBLEMES DITS DE « TRANSFORMATION D'ETAT »	63
1.	Préambule : de quoi s'agit-il ?	63
2.	Proposition de résolution	65
2.1	Recherche de l'état final et résolution par une addition	65
2.2	Recherche de l'état initial et résolution par une soustraction	66
2.3	Recherche de la transformation : l'état final est plus grand que l'état initial	68
2.4	Recherche de la transformation : l'état final est plus petit que l'état initial	69
2.5	Recherche de l'état initial et transformation positive	70
2.6	Recherche de l'état initial et transformation négative	71
3.	Quelques problèmes particuliers	72
3.1	Problèmes d'ascenseur	72
3.2	Déplacement sur des cases	72
IV -	PROBLEMES A DEUX ETAPES	74
1.	Définition	74
1.1	Exemple	74
1.2	Mise en œuvre 1	74
1.3	Mise en œuvre 2	75
2.	Entrainement	76
	CHAMP MULTIPLICATIF	78
I -	MULTIPLICATION : RECHERCHE DU TOUT	78
1.	Prélèvement des informations permettant de trouver la réponse	78
2.	Matérialisation du problème avec des cubes	79

3.	Explicitation des choix	79
4.	Représentation.....	79
5.	Résolution du problème	81
6.	Remarque importante avant de passer à l'institutionnalisation	82
7.	Institutionnalisation	82
8.	Entraînement.....	84
9.	Recherche de la mesure d'un Tout organisé en colonnes et lignes régulières	84
II -	DIVISION.....	86
1.	DIVISION PARTAGE ou DIVISION PARTITION : recherche de la mesure d'une Part	86
1.1	Prélèvement des informations	86
1.2	Matérialisation du problème.....	86
1.3	Explicitation des choix	86
1.4	Représentation.....	87
1.5	Résolution du problème.....	88
1.6	Entraînement	88
2.	DIVISION QUOTITION : recherche du nombre de Parts	89
2.1	Prélèvement des informations	89
2.2	Matérialisation du problème.....	89
2.3	Explicitation des choix	89
2.4	Représentation.....	90
2.5	Résolution du problème.....	91
3.	Institutionnalisation	91
4.	Entraînement.....	92
III -	MULTIPLICATION ET DIVISION : N FOIS PLUS, N FOIS MOINS	93
1.	Activités préparatoires.....	93
1.1	L'opérateur	93
1.2	Activités de représentation.....	95
2.	Recherche de la grande mesure	96
2.1	Prélèvement des données pertinentes	96
2.2	Représentation.....	97
2.3	Résolution du problème.....	97
3.	Recherche de la petite mesure.....	97
3.1	Prélèvement des données pertinentes	97
3.2	Représentation.....	98
3.3	Résolution du problème.....	98
4.	Recherche de l'opérateur	98
4.1	Prélèvement des données pertinentes	98
4.2	Représentation.....	98
4.3	Résolution du problème.....	99
5.	Institutionnalisation	99
6.	Entraînement.....	100
IV -	PROPORTIONNALITE	101

1.	Activités préparatoires.....	101
1.1	Compter de 5 en 5, de 6 en 6... ..	101
1.2	Réviser la notion d'opérateur.....	101
1.3	Définition d'une situation de proportionnalité	101
1.4	Situation de proportionnalité et représentation en barres.....	102
1.5	Activités préparatoires avant d'utiliser un tableau de proportionnalité.....	102
1.6	Construction et lecture d'un tableau de proportionnalité	103
1.7	Reconnaitre des situations de proportionnalité	105
1.8	Lecture de graphiques.....	107
1.9	Construction de graphiques de proportionnalité	107
1.10	Exercices d'entraînement.....	110
2.	Représentation en barres adaptée à des problèmes de proportionnalité	111
2.1	Exemple 1.....	111
2.2	Exemple 2.....	112
2.3	Institutionnalisation	113
2.4	Entraînement	113
3.	Proportionnalité : passage par l'unité.....	114
3.1	Exemple 1.....	114
3.2	Exemple 2.....	115
3.3	Autres problèmes.....	116
3.4	Institutionnalisation	117
3.5	Entraînement	117
V -	LES POURCENTAGES.....	119
1.	Les pourcentages : qu'est-ce que c'est ?.....	119
1.1	Activités préparatoires.....	120
1.2	Exercices d'application.....	121
2.	Représentation des problèmes de pourcentages.....	124
2.1	Type 1 : le complément à 100	125
2.2	Type 2 : calculer le pourcentage	126
2.3	Type 3 : appliquer le pourcentage.....	128
3.	Exercices d'entraînement (à faire faire par les élèves).....	131
VI -	LES PROBLEMES A DEUX ETAPES.....	132
	CONCLUSION.....	133
	ANNEXE 1 : TRACES ECRITES POUR LES ELEVES.....	135
	ANNEXE 2 : GRANDEUR, MESURE ET RESOLUTION DE PROBLEMES.....	140
	ANNEXE 3 : ENJEUX DES REPRESENTATIONS EN BARRES.....	154

AUTEURS : Les membres du groupe de recherche sur la modélisation de problèmes au cycle 3 : Aulagner Jean-Claude, Métais Josette, Noirfalise Annie

TITRE : La représentation en barres comme aide à la résolution de problèmes aux cycles 2 et 3

EDITEUR : IREM de Clermont-Ferrand

DATE : 8 mars 2023

PUBLIC CONCERNÉ : Enseignants de cycles 2 et 3

RESUMÉ :

Cette brochure présente des propositions d'aide à la résolution de problèmes.

Les auteurs se sont notamment appuyés sur les représentations en barres. Cette brochure est un guide pédagogique au service des enseignants. Les auteurs ont testé l'efficacité de ces outils auprès de leurs élèves.

MOTS CLÉS : résolution de problèmes, problèmes additifs, problèmes multiplicatifs, représentation en barres, méthode de Singapour, proportionnalité, pourcentages

FORMAT A4 : Nombre de pages : 188