Thème n°10 :

Prévision des éclipses :
de la machine d'Anticythère aux ordinateurs actuels.

(math/HG/ français en bonus ; Mr **Grenier** et Mme Boyer)

Partie 1 : Prévision des éclipses : de la machine d'Anticythère aux ordinateurs actuels.

I – définition et historique

II- Utilisation de la machine d'Anticythère

III- Prévision des éclipses par les ordinateurs : l'IMCCE

IV : Bonus pour une matière supplémentaire : français

Partie mathématique au thème n° 10

I- De l'algorithme d'Euclide aux fractions continues finies

II- Fractions continues et nombres réels

III- Application : Mise en place d'un algorithme pour trouver les nombres du cycle de Saros :

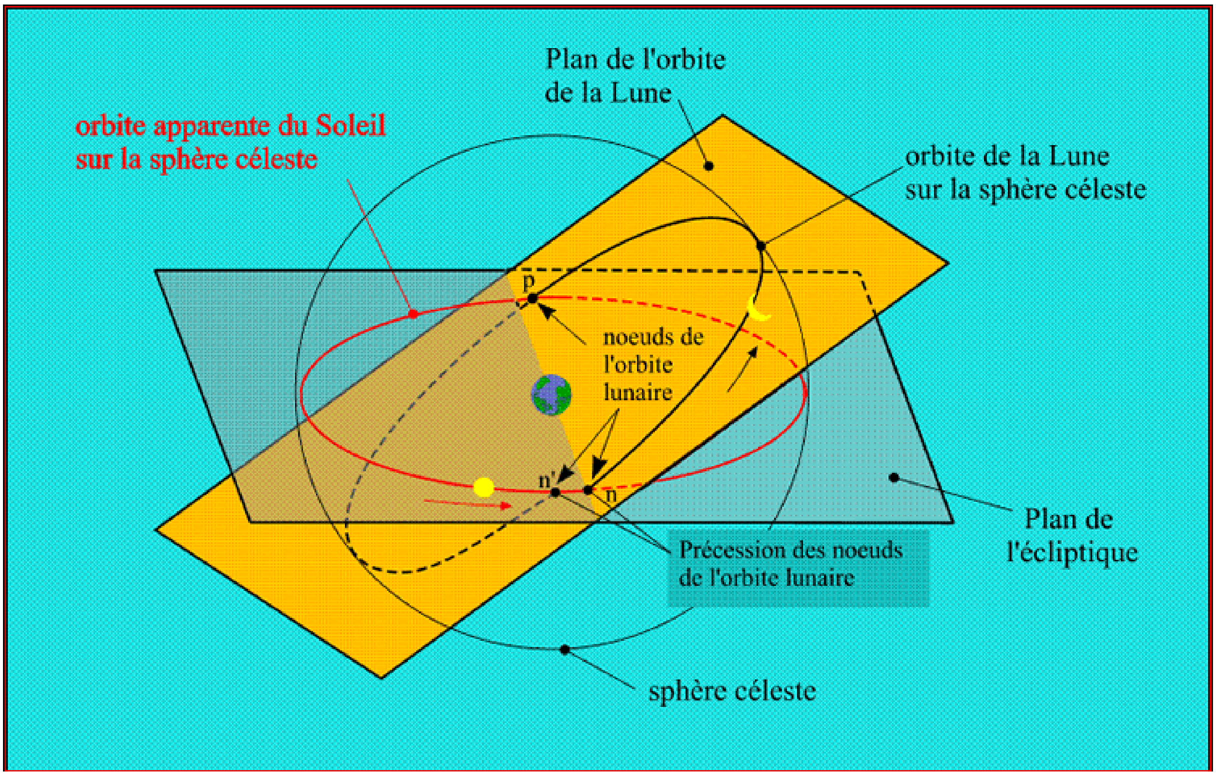
Prévision des éclipses : de la machine d'Anticythère aux ordinateurs actuels.

Se reporter aux sites généraux et au livre : « clés de voûte » disponible au CDI

Et surtout à la conférence de vulgarisation: http://www.canal-u.tv/video/cerimes/les_eclipses.13194

I – définition et historique

1) Expliquer quelle est la différence entre une éclipse de lune et une éclipse de Soleil (2 phrases et deux schémas)
2) Pourquoi, vu de la Terre, ces éclipses ne peuvent se produire que pendant la « pleine lune » ou la « nouvelle lune » ? (se déduit des schémas)
3) Pourquoi n'y a-t-il pas d'éclipses à chaque pleine lune et à chaque nouvelle lune, tous les 29,5 jours , c'est-à-dire à chaque lunaison (appelée révolution synodique de la Lune) ? (deux lignes) et comprendre le schéma de la ligne des nœuds :



http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages3/386.html#Para019
http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages3/333.html
http://www.imcce.fr/langues/fr/ephemerides/phenomenes/eclipses/soleil/chap01.php#Para015

4) Donner quelques observations historiques d'éclipses de Soleil et de légendes associées. (10 lignes)
http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages4/468.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89clipse_solaire#.C3.89clipses_historiques

II- Utilisation de la machine d'Anticythère

1) Faire une présentation de la machine d'Anticythère (HG) à partir du questionnaire sur le documentaire.
2) Etude du cycle de Saros : http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages3/333.html
http://fr.wikipedia.org/wiki/Saros

Essayer de comprendre à l'aide du schéma de la ligne des nœuds et des liens ci-dessus, ce qu'est la révolution « draconitique » de la Lune (celle-ci est égale à 27.2122208 jours).

Ainsi pour retrouver les positions du Soleil, de la Lune et de la Terre au même endroit (ou à peu près) , il faut un laps de temps égal à un nombre entier de révolutions synodiques et un autre nombre entier de révolutions draconitiques. Ce laps de temps est appelé cycle de Saros donc si la date d'une éclipse est connue, alors une éclipse presque identique se produit un saros plus tard.

On doit donc déterminer deux nombres entiers x et y tel que x.G=y.L avec L la lunaison (29,53) et G la révolution draconitique (27,21)

a) A l'aide d'un algorithme identique à celui fait dans le questionnaire et en le programmant sur la calculatrice, retrouver les deux nombres x et y.
b) A l'aide de cet extrait du livre « la saga des calendriers » pages 49 à 56 et des sites évoqués ci-dessus, comprendre la méthode de la décomposition en fractions continues et retrouver les deux nombres x et y par cette méthode. (Essayer de programmer cette méthode sur votre calculatrice).
c) Conclusion pour x et y. A combien d'années solaires correspond un cycle de Saros ?
d) Ces nombres se retrouvent-ils dans les engrenages de la machine d'Anticythère ?

e) Bonus de recherche : fouiller sur internet pour obtenir un modèle de la machine d'Anticythère et situer les engrenages correspondant à l'étude faite précédemment. Expliquer.

III- Prévision des éclipses par les ordinateurs : l'IMCCE

a) Présenter l'IMCEE http://www.imcce.fr/langues/fr/
http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages2/216.html
b) Trouver sur le site les éclipses de soleil visibles en France (anciennes et à venir)
http://www.imcce.fr/fr/grandpublic/systeme/promenade/pages3/386.html#Para019
c) Trouver sur le site la prochaine éclipse de soleil, la détailler, d'où est-elle visible ?
http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/phenomenes/eclipses/2000_2050/html/liste.php#Éclipses totales et mixtes entre 2000 et 2025
d) Expliquer ce qu'est une éclipse annulaire, et trouver pour quelle raison, à long terme, il n'y aura plus d'éclipse totale de Soleil sur Terre. http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_eclipses-soleil/introduction-types-eclipses.html
e) Après avoir parcouru les sites suivants : http://www.imcce.fr/fr/ephemerides/phenomenes_celestes.php et http://media4.obspm.fr/public/AMC/pages_stlp/introduction-stlp.html :
Construire un questionnaire avec des questions à poser au responsable du calcul des éphémérides que l'on enverra à l'observatoire de Paris.

f) Bonus de recherche : expliquer pourquoi, vu de la Terre, il y a au moins deux éclipses de soleil et deux éclipses de Lune par an.

IV : Bonus pour une matière supplémentaire : français

Lire la nouvelle de Kepler : « le songe ou l'astronomie lunaire », l'étude de cette nouvelle est aussi proposée dans le thème n° 12 (première partie).

1) Pourquoi dans le titre : astronomie lunaire ? (comprendre les associations des noms donnés dans le texte)
2) Essayer de décortiquer les résultats donnés par Kepler et retrouver des nombres que vous avez étudiés dans les parties précédentes.
3) Demander aux élèves en charge du thème n°12 comment on peut resituer cette nouvelle dans son contexte historique.

Partie mathématique au thème n° 10

I- **De l'algorithme d'Euclide aux fractions continues finies :**

1) **Décomposition d'un nombre rationnel $\frac{p}{q}$ en fractions continues**

Une fraction continue finie est une fraction itérée du genre : $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$	La forme générale étant : $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_{N-1}+\cfrac{1}{a_N}}}}}$

où les a_i sont les quotients successifs de l'algorithme d'Euclide utilisé en troisième pour la recherche du PGCD.

On convient de noter $R_n = \frac{p_n}{q_n}$ = **[a_0, a_1, a_2, …. , a_n]** . Ce quotient s'appelle la **réduite d'ordre n** et est une approximation du quotient $\frac{p}{q}$ connu initialement. (lorsque le reste est égal à 0 il y a égalité avec $\frac{p}{q}$)

2) **exemple : on veut trouver les fractions continues égales à $\frac{97}{42}$:**

Etape 1 : on calcule les restes et quotients successifs avec l'algorithme d'Euclide (Idem PGCD)

a	b	r	q	Egalité successives
97	42	13	2	97 = 2 × 42 + 13
42	13	3	3	42 = 3 × 13 + 3
13	3	1	4	
3	1	0	3	

Etape 2 : Ecriture conventionnée : On a donc $\frac{97}{42}$ = [2 ; 3 ; 4 ; 3] soit $\frac{97}{42} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}$

Etape 3 : Calculs des réduites successives et calcul de l'erreur commise :

- On a $R_0 = 2$ et $\quad\frac{97}{42} - R_0 \approx$
- On a $R_1 = 2+\frac{1}{3} =$ $\quad\frac{97}{42} - R_1 \approx$
- On a $R_2 = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}} =$ $\quad\frac{97}{42} - R_2 \approx$
- On a $R_3 = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}$ $\quad\frac{97}{42} - R_3 = 0$

Méthode pratique du calcul des réduites (résultats dans un tableau)

Quotient a_i			2	3	4	3
p_i	0	1	2 × 1 + 0 = 2	3 × 2 + 1 = 7	4 × 7 + 2 = 30	3 × 30 + 7 = 97
q_i	1	0	2 × 0 + 1 = 1	3 × 1 + 0 = 3	4 × 3 + 1 = 13	3 × 13 + 3 = 42
Réduite			$R_0 = 2$	$R_1 = \frac{7}{3}$	$R_2 = \frac{30}{13}$	$R_3 = \frac{97}{42}$

3) A vous de jouer !

a) Déterminer la fraction continue égale à $\frac{1789}{1515}$; les réduites successives et les erreurs commises.

b) Déterminer la fraction continue égale à $\frac{223{,}5}{112{,}2}$; les réduites successives et les erreurs commises.

II- **<u>Fractions continues et nombres réels</u>**

Utilisons une méthode analogue pour approcher des nombres réels par des fractions. Cette méthode est décrite dans l'extrait du livre : *La Saga des Calendriers* de Jean Lefort disponible au CDI.

a) **Comprendre la méthode** décrite dans le document ci-dessous:

Document :

2. Développement d'un réel en fraction continue

Afin de mieux comprendre la suite, commençons par étudier l'algorithme d'Euclide, une méthode simple pour trouver le plus grand diviseur commun (PGCD) de deux nombres entiers x_0 et x_1. On commence par diviser x_0 par x_1, et l'on note le quotient q_0 et le reste x_2 : soit $x_0 = q_0 \times x_1 + x_2$. On divise ensuite x_1 par le reste x_2, et l'on note le nouveau reste x_3, etc. La suite des entiers x_i étant décroissante, on arrive tôt ou tard à $x_n = 0$, c'est-à-dire $x_{n-2} = q_{n-2} \times x_{n-1}$. Donc x_{n-1} divise x_{n-2}, et, par récurrence, tous les x_i, dont x_0 et x_1, les deux nombres de départ, dont il est le PGCD.

Considérons à présent un nombre réel r strictement positif, et remplaçons les deux entiers x_0 et x_1 de l'algorithme d'Euclide par $a_0 = [r]$, la partie entière de r, et $b_0 = r - a_0$, la partie décimale de r. Nous allons définir à partir de r deux suites (a_n) et (b_n) en calculant successivement :

$r = a_0 \times 1 + b_0$

Exprimons 1, le facteur de a_0, en fonction de b_0 :

$1 = a_1 \times b_0 + b_1$

Exprimons b_0, le facteur de a_1, en fonction de b_1 :

$b_0 = a_2 \times b_1 + b_2$

Etc. . . . .

$b_{i-2} = a_i \times b_{i-1} + b_i$

. . . .

Dans cette liste, tous les a_i sont des entiers positifs et les b_i se succèdent dans l'ordre décroissant $0 \leq b_i < b_{i-1}$. Le procédé est analogue à l'algorithme d'Euclide, mais dans ce dernier, on s'arrêtait quand on obtenait un reste nul. Ici, on n'obtient un b_i nul, dans le cas général, que si r est rationnel. Dans tous les autres cas, les suites (a_n) et (b_n) sont infinies. Nous nous placerons dans cette situation.

La suite d'égalités précédente, après quelques réarrangements, s'écrit aussi sous la forme :

$$r = a_0 + b_0 = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{b_1}{b_0}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{b_0}{b_1}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{b_2}{b_1}}}$$

On dit qu'on a développé r en *fraction continue*. Les fractions intermédiaires :

$$a_0,\ a_0 + \frac{1}{a_1},\ a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \ldots$$

sont nommées les *réduites* successives de r, qui s'écrit alors $r = [a_0 ; a_1, a_2, a_3, \ldots]$. On notera que a_0 joue un rôle particulier, d'où sa séparation par un « ; » du reste de la suite.

b) **Comprendre la suite d'égalités** ci-dessous et compléter le tableau d'à côté en prenant pour nombre de départ le rapport : années/ mois lunaires, pour retrouver les nombres du cycle de Méton.

r est un nombre réel quelconque

Et a_0 est le plus grand nombre entier plus petit que r, on l'appelle Partie Entière de r et on note : $a_0 = \mathrm{Ent}(r)$.

r a b

$r = a_0 \times 1 + b_0$

$1 = a_1 \times b_0 + b_1$

$b_0 = a_2 \times b_1 + b_2$

$b_1 = a_3 \times b_2 + b_3$

$b_2 = a_4 \times b_3 + b_4$

à cette étape :

$a_4=$ et $b_4=$

etc …

On prendra donc : r = 365,25/29,53 et donc $a_0=$ et $b_0=$

puis on recommence :

Comme dans l'algorithme d'Euclide, on divise ………… par ……. Mais on prend la Partie Entière du résultat donc $a_1 =$ et $b_1=$

Compléter le tableau suivant :

Etape	r	a	b	Fractions intermédiaires
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				

c) Quelle colonne du tableau permet de trouver les *réduites successives* de r ?

d) Rajouter une colonne au tableau dans laquelle vous mettrez les *fractions continues intermédiaires* obtenues à chaque étape, le résultat sera donné sous forme d'une fraction irréductible obtenue avec la calculatrice…

e) Que remarque-t-on à l'étape 4 ? Quelle est l'écart entre la fraction continue obtenue à l'étape 4 et r ? Conclusion ?

III- Application : Mise en place d'un algorithme pour trouver les nombres du cycle de Saros :

Ces calculs fastidieux peuvent être faits directement par la machine en utilisant un programme.

Langage Courant	Langage TI

Saisir R (nombre initial)
Saisir N (rang de la réduite)
La variable X prend la valeur R
La variable A prend la valeur 1
La variable B prend la valeur 0
La variable C prend la valeur partie entière de X
La variable D prend la valeur 1
La variable Q prend la valeur partie entière de X
La variable G prend la valeur X – Q
La variable X prend la valeur (1/G)
Afficher « R0 = » , Q (première réduite)
Pause
    Pour K allant de 1 à N – 1
    La variable Q prend la valeur partie entière de X
    La variable G prend la valeur X – Q
    La variable E prend la valeur QC + A
    La variable F prend la valeur QD + B
    La variable A prend la valeur C
    La variable B prend la valeur D
    La variable C prend la valeur E
    La variable D prend la valeur F
    La variable X prend la valeur (1/G)
    Afficher Q
    Pause
    Afficher (E/F) en fraction
    Pause
    Fin
Fin	

Indication partie entière de x : ipart(X) dans MATH NUM 3

a) Traduire ce programme en langage TI.
b) Appliquer le programme au nombre π (pour N = 6) puis vérifier sur le site.
   http://www.dcode.fr/fractions-continues
   Calcule ensuite les fractions intermédiaires et l'erreur commise.
c) Appliquer le programme au nombre $\sqrt{5}$ (pour N = 5).
   Calcule ensuite les fractions intermédiaires et l'erreur commise.

d) Retrouver les valeurs des nombres du cycle de Méton et du cycle de Saros en utilisant l'algorithme.
   Calcule ensuite les fractions intermédiaires et l'erreur commise.

e) Bonus :
   Comment le modifier pour faire apparaître l'écart entre les fractions continues partielles obtenues à chaque étape et la valeur initiale ?

BRAVO : Vous êtes arrivés à faire ce que Mr Laskar attendait de vous !