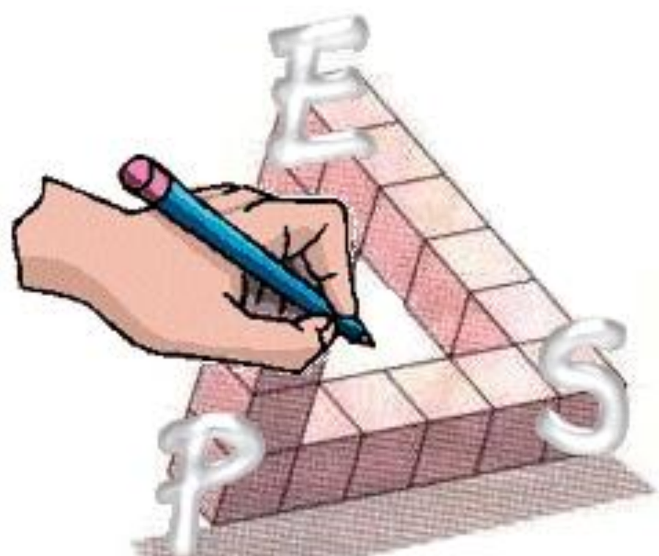
IREM Clermont-Ferrand

Les distances inaccessibles :

:

un parcours de cycle 4



- Juin 2017 -

LES AUTEURS

Groupe Permes de Clermont Ferrand

Auteure principale : Laure Guérin

Cottin Audrey	Collège Constantin Weyer	Cusset
Covinhes Stéphanie	Collège La Fayette	Brioude
De Susanne d'épinay	Collège du Beffroi	Billom
Douce-Boularand Valérie	Collège Gérard Philippe	Clermont-Ferrand
Gilbert Vincent	Collège Gordon Bennet	Rochefort Montagne
Giraudet Lydia	Collège Marcel Bony	Murat le Quaire
Guérin Laure	Collège Jean Rostand	Bellerive sur allier
Noirfalise Annie	Université	Clermont-Ferrand
Noirfalise Robert	Université	Clermont-Ferrand
Perrin Gaetan	Collège Jean Villar	Riom
Sartre Alexandre	Collège Albert Camus	Clermont-Ferrand
Saunier Nicolas	Collège Marcel Bony	Murat le Quaire
Sauvage Mélanie	Collège Blaise Pascal	Saint-Flour
Vallé Michèle	Collège les Célestins	Vichy

PRÉFACE

Le programme de mathématiques est rédigé pour l'ensemble du cycle, soit trois années consécutives de la 5e à la 3e pour ce qui concerne le cycle 4. La mise en place de ces nouveaux programmes doit permettre de développer les six compétences de l'activité mathématique répertoriées par l'institution : chercher, modéliser, représenter, raisonner, calculer, communiquer. Elles mettent en avant la place importante de la résolution de problèmes qu'ils soient internes aux mathématiques, issus de la vie quotidienne ou issus d'une autre discipline. Nous vous présentons dans ce document la façon dont nous envisageons de faire vivre au sein de la classe la résolution de problèmes, sous la forme d'un *parcours d'étude et de recherche* (Chevallard) décliné ici en un parcours de géométrie pour le cycle 4.

Le principe est de motiver la géométrie des programmes du cycle 4 par l'étude et la recherche d'une « grande question », suffisamment « ouverte » pour qu'elle puisse impliquer d'autres sous-questions et par la suite générer des savoirs et savoir-faire (cf partie 1) mathématiques inscrits dans le programme du cycle 4.

Nous avons choisi de débuter le parcours par cette interrogation sur le monde :

« Comment les hommes font-ils pour déterminer des distances inaccessibles ? Quels outils ont-ils ? »

Nous essayons alors ensemble, professeur et élèves, d'apporter des éléments sérieux de réponses à cette enquête.

Dans un premier temps, l'étude nous amène à rencontrer des usages de topographes et des calculs de largeurs de rivières, mobilisant la construction de triangles. Dans un deuxième temps d'autres pratiques nous amènent à envisager les triangles semblables, les homothéties, certaines transformations du plan, le théorème de Thalès ou encore les rapports trigonométriques à travers le calcul de la distance Soleil - Vénus…autant de notions qui font partie du programme 2016. Nous espérons à travers cette démarche ancrée dans la pédagogie de l'enquête répondre à certains questionnements de la profession. Tout d'abord les activités proposées sont à mettre en place sous la forme de démarche d'investigation, la plupart sous la forme de travaux de groupes. Les élèves sont invités à chercher, sans que le professeur ne donne au départ d'indications. Il s'agit là d'un véritable changement de posture pour le professeur qui n'est plus celui qui « donne et transmet le savoir » mais celui qui « guide vers le savoir » ou encore « un directeur d'étude ». En effet, la responsabilité des élèves devant le savoir doit être engagée. Trop souvent certains contenus scolaires paraissent aux yeux de nos élèves comme dépourvus de sens et déconnectés du monde réel. Les professeurs enseignent le théorème de Thalès parce que cela fait partie de la tradition et de l'héritage scolaire. Nous essayons donc à travers la problématique de détermination de distances inaccessibles de retrouver les raisons d'être des savoirs, perdues dans le système scolaire actuel, et qui permettent de donner du sens aux apprentissages.

Cette recherche ne saurait se priver de moyens pour réaliser cette étude. L'utilisation de médias tels que documents-papiers, magazines, livres, sites internet, forums, vidéos …constitue une ressource idoine à notre enquête. Si traditionnellement les élèves doivent résoudre des problèmes avec leurs seules connaissances, au contraire, dans ce que nous proposons les élèves peuvent utiliser toute sorte de ressources. De plus le parcours qui suit est à comprendre comme un fil directeur s'étalant sur 3 ans et non comme un chapitre. Il peut cependant être exploité partiellement année par année.

A l'intérieur de chaque année scolaire, l'élaboration d'une réponse ne peut pas être réalisée en une heure de cours ou encore en deux ou trois semaines. Elle nécessite une gestion du temps différente de celle habituellement pratiquée. Elle amène à plusieurs notions mathématiques et permet de « spiraler » les contenus et les apprentissages. La progression dans le temps qui en découle est nécessairement changée. Notre choix s'est porté sur **une alternance** :

- de temps longs qui peuvent s'étaler sur plusieurs séances
  Il s'agit de recherches de situations en rapport avec notre problématique (voir les détails des séquences : partie 2).
- de temps courts matérialisés par l'institutionnalisation des savoirs et des savoir-faire (partie 3 et 4) mathématiques qui découlent des situations traitées (partie 2) ainsi que du travail de la technique répétée. Elle est mise en œuvre sous la forme d'acquisitions d'automatismes et de routines favorisant l'échange et le travail de l'oral ou sous la forme d'exercices à rédiger (partie 4).

De surcroit, la première partie vous permettra d'approfondir quelques points sur lesquels nous aimerions attirer votre attention.

Pour plus d'informations, vous pouvez contacter le groupe PERMES, Irem de Clermont-Ferrand.
laure-catherine.guerin@ac-clermont.fr

BY NC ND

Table des matières

Partie 1 : Repères pour la mise en œuvre

Les parcours sont construits à partir d'une question suffisamment ouverte pour que la réponse ne soit pas immédiate. L'objectif de la classe est donc d'apporter collectivement des réponses à cette question.

C'est grâce à la dynamique créée que les élèves s'engagent dans les recherches. Ils rassemblent des éléments de manière à construire une réponse qui sera analysée et reprise par la classe.

La mise en œuvre du parcours amène les élèves à être curieux et à adopter une attitude réflexive sur les sujets traités.

Etre proactif

« …, face à une question Q donnée, une personne peut se placer (de manière soit délibérée, soit spontanée) dans l'un ou l'autre de deux *modes d'étude* distincts. Le premier, approprié à l'activité d'enquête, est le mode d'étude *proactif*, qui suppose une tension *procognitive*. Dans ce mode, rappelons-le encore, on ne suppose nullement connues à l'avance, même partiellement, les réponses $R^{\cdot}$ à la question Q existant dans la culture : l'enquête consiste d'abord à les *rechercher*, à les identifier, à les analyser de façon appropriée. Or l'observation et l'analyse cliniques montrent que l'activation du mode proactif rencontre un immense obstacle, constitué par la prégnance du second mode d'étude évoqué, le *mode d'étude rétroactif*, qui a partie liée avec le règne, dans l'éducation scolaire et universitaire, et cela jusqu'à aujourd'hui, de ce que nous nommerons l'*essayisme dissertationnel*. Dans le mode rétroactif, en effet, il s'agit, pour l'élève ou l'étudiant, non de se mettre en quête de réponses qui seraient *à découvrir*, mais de construire un discours – une « dissertation » – en rapport avec la question posée en y intégrant des matériaux issus des discours sur cette question qu'il aura *préalablement rencontrés*. Dans le mode rétroactif dissertationnel tel que nous pouvons l'observer, il ne s'agit nullement de *présenter* des réponses $R^{\cdot}$, d'en *rendre compte*, ni à plus forte raison de les *analyser*. Il s'agit bien plutôt de *parler* – en usant de ce que l'on connaît ou a connu – de ce qui, alors, n'est plus véritablement une *question*, mais devient un *« sujet »*. Dans le vocabulaire de l'essayisme dissertationnel, on n'apporte pas réponse à une question ; on *« traite un sujet »*.

C. Ladage et Y. Chevallard (2011) Enquêter avec l'internet : études pour une didactique de l'enquête, in Education & Didactique n°5.2 https://educationdidactique.revues.org/1266?lang=en

Organisation mathématique : Type de tâches, technique, technologie et théorie

Dans les séquences suivantes, nous appuyons nos propos sur la Théorie Anthropologique du Didactique introduite par Yves Chevallard.

Dans ce cadre, la notion de *praxéologie* permet de fournir une description des connaissances, savoirs et savoirs-faire impliqués. Etudier une question dans le cadre de l'école, c'est recréer une réponse déjà produite dans une institution, autrement dit élaborer une organisation praxéologique. On peut définir cette notion grâce au modèle praxéologique, c'est-à-dire au modèle du quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$. A la racine, on trouve les tâches que l'on regroupe en types de tâches T, comme saluer un voisin, développer une expression littérale, diviser un entier par un autre. La notion de *type de tâches* suppose un objet relativement précis. Par exemple « Calculer la valeur d'une expression contenant la lettre x quand on donne à x une valeur déterminée » est un type de tâches alors que « Calculer » ne l'est pas. Il s'agit d'un genre de tâches.

CC BY NC ND

A chacune de ses tâches, on peut associer une ou plusieurs façons de l'accomplir, que l'on nomme technique τ. La composante praxis $[T, \tau]$, type de tâches et technique, de la praxéologie, correspond au bloc pratico-technique, communément appelé savoir-faire. Notons qu'une technique peut être *supérieure* à une autre. Ainsi évaluer les techniques revient à se poser la question de la pertinence des techniques ainsi que celle de leurs portées, les unes par rapport aux autres pour un type de tâches fixé. Dans une institution donnée il n'existe en général qu'une seule technique reconnue, la technique institutionnelle. Le deuxième bloc $[\theta, \Theta]$ est la composante *logos* appelé bloc technologico-théorique, qui est ordinairement identifié au savoir. Le symbole θ désigne la technologie, c'est-à-dire un discours rationnel tenu sur la technique. Elle a pour but premier de justifier τ, de la rendre intelligible et compréhensible. Elle permet aussi de produire des techniques. A son tour la technologie contient des assertions plus ou moins explicites qu'il convient de justifier par la théorie Θ. Ainsi *l'approche anthropologique modélise le savoir en termes d'objets et d'interrelations entre objets* (Bosch et Chevallard, 1999).

Organisation didactique

L'organisation didactique participe à l'analyse du processus didactique. Elle permet de mettre en évidence la manière dont un type de tâches a été mis en œuvre dans une classe. Les fonctions de l'étude susceptibles d'être réalisées sont au nombre de six, modélisées par les moments de l'étude.

On considère un type de tâches T auquel est associé le quadruplet $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

- La première fonction de l'étude est le *moment de première rencontre* avec T. Il s'agit du début du processus de l'étude de T c'est-à-dire de l'identification de T comme type de tâches problématique.

Notons que cela ne signifie pas forcément une première rencontre au sens chronologique. De plus, un type de tâches peut être à nouveau revisité et faire ainsi l'objet d'une nouvelle première rencontre.

- La deuxième fonction de l'étude consiste à explorer le type de tâches T au travers de plusieurs spécimens. On le nomme *moment exploratoire*.
- La troisième fonction de l'étude est constituée de la *constitution du bloc technologico-théorique*. Elle permet de justifier, produire ou encore permettre de donner du sens à la technique grâce à la technologie, qui à son tour est justifiée par la théorie.
- La quatrième fonction de l'étude est appelée *moment de travail de l'organisation mathématique*. Ce moment est souvent réalisé sous la forme de résolution d'exercices.
- Le *moment d'institutionnalisation*, cinquième moment de l'étude, permet de mettre en forme l'organisation mathématique : travail de synthèse et formulation de l'organisation mathématique.
- Le sixième moment est *le moment d'évaluation*.

Le questionnement au cœur des recherches.

Comment faire vivre au sein de la classe la phase de questionnement ?

Les parcours sont jalonnés par de multiples interrogations. Ce questionnement permet de faire vivre l'ensemble des techniques et technologies étudiées.

La question étant posée et écrite au tableau, les élèves ont dans un premier temps des réponses spontanées et naïves. Prenons un exemple.

En début de cycle, à la question « Comment déterminer la distance AB sachant que la droite (AB) traverse un cours d'eau ? », les élèves répondent :

- A la nage
- Avec un mètre-laser
- Avec une grue
- Avec une corde.

Parmi toutes ces réponses, il arrive aussi que certains amènent des réponses pertinentes voire la réponse attendue sur le savoir que l'on souhaitait introduire.

Lors de cette étape, il est important d'alimenter le doute autour de **toutes** les réponses.

On poussera donc les élèves à lever le doute grâce à des justifications d'ordre mathématiques.

Ainsi il est important dans la classe que la réponse soit juste, non pas parce que le professeur l'affirme, ni parce que la majorité des élèves la pense vraie mais parce que les mathématiques nous permettent de prouver sa véracité.

Un outil utile : le carnet de bord ou port-folio

Le carnet de bord, constitué par un porte-vues permet de structurer le parcours. Il permet de garder en mémoire l'état des recherches et l'arborescence du parcours.

Il contient :

- **Des cartes heuristiques des parcours**
  Les questions et sous-questions sont déployées sou formes de « bulles » que l'on complète au fur et à mesure de l'avancée du parcours.
  Elles permettent à l'élève d'avoir une vision d'ensemble du questionnement et de garder une trace écrite du fil directeur.

- **Des traces écrites des activités d'études et de recherches des parcours** :
  Questions /Réponses et recherches/Bilan
  Le carnet de bord contient les recherches, les essais et les erreurs des élèves mais aussi la réponse institutionnellement attendue sous forme de synthèses par exemple.

- **Des œuvres propres à l'élève (ses productions)**

  La dynamique d'étude amène les élèves à s'interroger sur des sujets dont la réponse n'est pas immédiate.
  Il est important que les élèves aient la liberté de se poser des questions et d'y répondre.

  Cette réponse pourra être prise en charge de deux façons différentes :

- collectivement : par le groupe classe ou par un groupe d'élèves de la classe
  ou
- individuellement
  Par exemple, lors d'un travail sur le système solaire, un élève demande « Quelle est la taille de l'univers ? » Le professeur l'invite à utiliser les ressources au CDI (livres, internet) en dehors de la classe pour trouver une réponse. Cette question ne sera pas posée à la classe entière.

CC BY NC ND

Partie 2 : Détails des séquences

Trame des séquences : questions et sous- questions

Les séquences suivantes sont issues d'une reprise et adaptation du Parcours d'Etude et de Recherche de l'équipe PERMES de Marseille sur les triangles semblables.

L'objectif du parcours est d'apporter des éléments de réponses à la question suivante, question centrale qui motivera notre étude mathématique :

Comment déterminer une distance inaccessible ? (hauteur d'un arbre ; largeur d'une rivière ; distance entre un élève de la classe ou le coin du bureau et un arbre dans la cour, les deux rives d'une rivière…)

L'étude de cette première question conduit en étudier d'autres :

Partie A : début de cycle

Vers les triangles égaux

1) Etant donné un triangle, quelles données (en termes d'angles et de longueurs de côtés) suffisent pour construire un triangle qui lui soit superposable (égal ou isométrique) ?
2) Si on donne 3 longueurs de côtés au hasard, peut-on toujours construire le triangle ?
3) Si on donne la longueur d'un côté et les deux angles dont l'un n'est pas adjacent au côté, peut-on construire le triangle ?

Partie B : milieu de cycle

Vers les triangles semblables

1) Peut-on déterminer les côtés d'un triangle connaissant ses 3 angles ?
2) Un triangle dont les 3 angles sont donnés est-il unique ?
3) Un triangle dont 2 angles sont donnés est-il unique ? Et avec un angle ?
4) Lorsque deux triangles, qui ont des angles égaux chacun à chacun sont « emboités » l'un dans l'autre en faisant coïncider un des angles, les droites formées par les 3^{e} côtés sont-elles parallèles ?
5) Deux triangles de mêmes formes ont-ils des côtés proportionnels ?
6) Deux triangles de mêmes formes étant donnés, peut-on toujours les emboiter l'un dans l'autre ? Comment ?
7) Comment calculer une distance dans le cas particulier d'un agrandissement de coefficient 2 ?
8) Retour et résolution de la question initiale.
9) Comment écrire une distance inaccessible ? (Puissance et écriture scientifique)

Partie C : fin de cycle
À l'assaut de la trigonométrie

1) Quelle(s) transformation(s) permet(tent) de passer d'un triangle semblable à un autre, et plus particulièrement dans une configuration de Thalès ?
2) Comment démontrer que deux droites sont parallèles ?
3) Comment calculer une distance dans un agrandissement – réduction ?
4) Comment déterminer une distance à partir de la donnée d'angle et d'une longueur dans un triangle rectangle ?

Présentation des logos dans la suite du texte

Un problème étant posé, les élèves doivent comprendre qu'il est indispensable de s'engager dans l'étude et la recherche de solutions ou d'éléments de solution. La responsabilité n'est plus du seul côté de l'enseignant. Le risque est que les élèves attendent docilement la réponse du professeur.

Activité à dévoluer aux élèves, au risque de passer à côté de l'objectif visé !

…. Variables, nombres à ne pas changer au risque de changer la nature ou les obstacles de l'activité !

Travail de groupes ; activité ou exercice qu'il serait préférable de traiter en en groupes.

Pré-requis. Types de tâches et techniques qu'il est nécessaire d'avoir stabilisés avant de commencer une activité.

Activité à insérer dans le carnet de bord.

Extraits des programmes 2016 de cycle 4

Espace et géométrie

Attendu de fin de cycle : « Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer »

Caractérisation angulaire du parallélisme : angles alternes-internes

Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalités des triangles

Triangle semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus ; cosinus ; tangente)
Théorème de Thalès et réciproque

Par exemple :
Utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique
Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.

Comprendre l'effet d'une homothétie sur une figure

Repères de progressivité

En 3e faire le lien entre théorème de Thalès, proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.
Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.
Les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction de grandeurs géométriques.

De la géométrie instrumentée vers la géométrie raisonnée.

Construire un triangle avec les instruments de géométrie, un logiciel de géométrie ou Scratch.

Seuil 1 : Cas 1 : connaissant la longueur des 3 côtés

Seuil 2 :

Cas 2 : les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés.

Cas 3 : la longueur d'un côté (côté adjacent) et deux angles.

Seuil 3 : Cas 3 : la longueur d'un côté (côté non adjacent) et deux angles.

Notions associées : Cas d'égalités des triangles ; inégalité triangulaire ; somme des angles dans un triangle.

Calculer une longueur dans des triangles semblables

Seuil 1 : Introduire un triangle semblable au premier (le reproduire à une certaine échelle avec les instruments de géométrie ou Géogébra), mesurer avec la règle graduée ou Géogébra la longueur cherchée puis en déduire la longueur du côté cherché.

Notions associées : échelles ; agrandissements /réductions ; Proportionnalité

Seuil 2 : Introduire un triangle semblable au premier. Justifier qu'il est semblable à partir des angles ou de la proportionnalité des côtés. Trouver le coefficient d'agrandissement ou de réduction. Multiplier par le coefficient le côté homologue ou calculer la longueur en utilisant le théorème de Thalès ou la réciproque du théorème des milieux.

Seuil 3 : Calculer la longueur grâce aux rapports trigonométriques selon le cas.

Notions associées : échelles ; agrandissements /réductions ; proportionnalité ; triangles semblables ; trigonométrie.

Mise en place du questionnement

Le parcours débute par une recherche documentaire (internet, magazines, livres du CDI…). Deux questions sont posées aux élèves :

- Qu'est-ce qu'une « lunette de chantier » ?
- En quoi consiste le métier de géomètre topographe ?


Image empruntée au site " http://www.topograph.eu/"

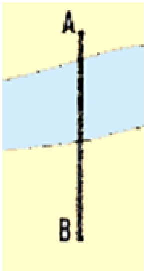
On pourra se référer si besoin à la fiche ONISEP : géomètre- topographe.

Nous allons ensuite étudier une question de géomètre-topographe.


Ce parcours de début de cycle nécessite des connaissances sur le parallélisme en lien avec les angles alternes-internes et correspondants, les échelles et les reports de distances avec le compas.

Question 1 : Comment déterminer la distance AB alors que la droite (AB) traverse un cours d’eau ?



Apport de réponses

A partir du texte issu d’internet sur un site de topographie

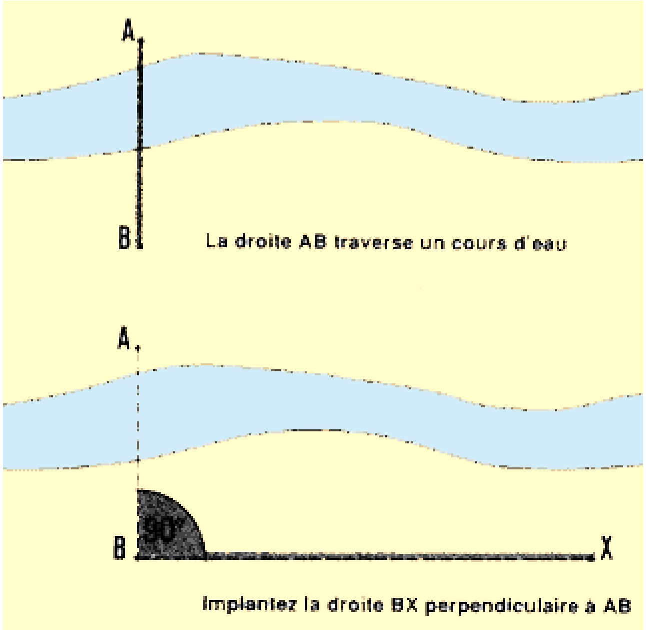
ftp://ftp.fao.org/fi/CDrom/FAO_training/FAO_training/general/x6707f/x6707f02.htm, nous allons répondre à la question.

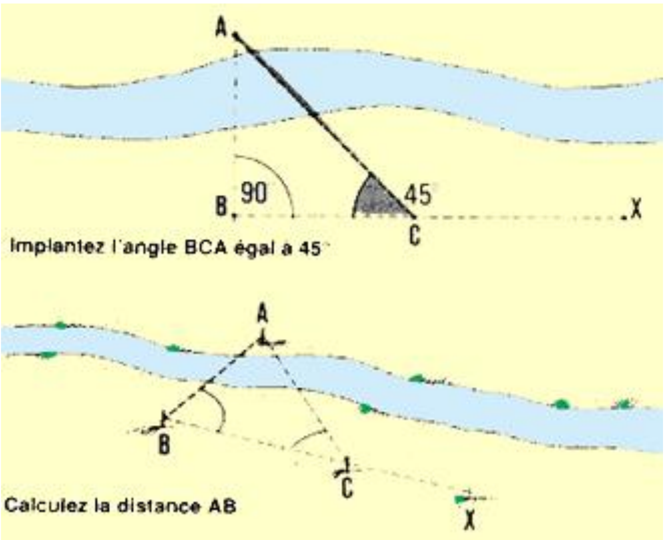
Commentaires :

- Avec les élèves, on peut soit photocopier le texte suivant soit les inviter à aller sur internet chercher le texte en question.
- Cette ressource internet provient de la FAO (Food and Agriculture Organization of the United Nations). Cette institution des Nations unies est spécialisée dans l’agriculture, le pêche et toutes les industries rattachées à l’alimentaire. Elle joue un rôle dans les efforts internationaux de lutte contre la famine et constitue ainsi une source d’informations pour améliorer les pratiques agricoles de pays en voie de développement. Ainsi les usages présentés dans cet extrait de la topographie sont certainement des usages actuels de pays défavorisés. On peut penser que ces usages étaient pratiqués en France un certain nombre d’années en arrière.
- Les élèves peuvent penser à l’usage du télémètre pour calculer des distances inaccessibles.
  Notons tout d’abord que le télémètre ne fonctionne que s’il « bute » contre un objet, ce qui est impossible à réaliser pour mesurer la rivière.
  D’autre part, une différence d’angle de visée donne des résultats différents. On pourra essayer avec une différence de mesure d’angle de 1° et constater des écarts.
  On pourra alors interroger les élèves sur la précision des instruments utilisés.
- On pourra remarquer que les notations ne sont pas conformes à celles utilisées en mathématiques : parenthèses pour les droites, crochets pour les segments. On pourra attirer l’attention des élèves sur le fait que ce texte ne provient pas d’un livre de mathématiques mais de topographie et que les usages sont donc différents. Un exercice peut consister à transformer le texte en rétablissant les notations mathématiques.

Extrait du site en italique (consultation mars 2016)

7. Supposons qu'il faille mesurer la distance AB sur une droite tracée de part et d'autre d'un cours d'eau. Implantez la droite BX perpendiculaire à AB sur l'une des rives. Déterminez le point C de cette perpendiculaire, depuis lequel le point A situé sur l'autre rive est visible suivant un angle de 45degrés (voir par exemple la section 3.6, point 63). Mesurez la distance CB, égale à la distance inaccessible AB.





Exemple

Mesure de la distance AB:

- *depuis le point B, implantez la droite perpendiculaire BX;*
- *déterminez le point C, choisi de façon que l'angle BCA soit égal à 45 degrès;*
- *mesurez BC = 67 m;*
- *distance AB = BC = 67 m. »*

Réponse : Il faut faire intervenir un troisième point appelé C afin de former un triangle rectangle en B et tel que l'angle en C mesure 45°. Les angles étant réalisés grâce à la lunette de chantier.

On pourra faire conjecturer aux élèves que le triangle ainsi formé est rectangle isocèle en B. On peut éventuellement utiliser un logiciel de géométrie dynamique. Par suite AB = BC. En mesurant BC qui se trouve sur la berge, on trouve ainsi AB.

Remarquons qu'à ce stade du parcours les élèves savent justifier qu'ABC est rectangle en B mais pas encore qu'il est isocèle. Nous gardons cette justification pour la suite du parcours. Le dernier schéma de l'extrait du site suggère que la méthode peut être réalisée avec un triangle quelconque.

Question en suspens : Pourquoi le triangle ABC rectangle en B et qui possède un angle en B de 45 degrés est-il isocèle ? (A noter dans le carnet de bord)

Question 2 : Peut-on utiliser une méthode similaire avec un triangle quelconque ? Expliquer à partir du dernier schéma du site.

Réponse : Oui, on place un point C sur la berge. On mesure la distance BC. De plus, on mesure grâce à la lunette de chantier les deux angles en B et C du triangle ABC.

On trace un plan à l'échelle du triangle ABC. On mesure la distance AB sur le plan que l'on transforme grâce à l'échelle.

Deux études sont alors amenées par cette activité :

La première est la notion d'échelle d'un plan, d'une carte.

Notons que pour faciliter l'entrée dans la construction de triangles, on choisit une échelle « simple » : 1 centimètre sur le plan représente 1 mètre dans la réalité.

La deuxième est la construction de triangles à partir d'une longueur et des deux angles adjacents.

On introduit ensuite le vocabulaire concernant l'égalité de triangles ;

On parle ainsi de triangles égaux lorsqu'ils sont superposables.

En conclusion, la construction d'un triangle superposable au premier permet de répondre à la question initiale.

Constructions de triangles ; cas d'égalités des triangles

Question 3 : A partir de quelles données peut-on construire un triangle ?

Quelles données (en termes d'angles et de longueurs de côtés) suffisent pour pouvoir construire un triangle superposable à un triangle donné ?

Est- ce que 2 données suffisent pour tracer un triangle ? Si oui lesquelles ?

Est- ce que 3 données suffisent pour tracer un triangle ? Si oui lesquelles ?

Est- ce que 4 données suffisent pour tracer un triangle ? Si oui lesquelles ?



Activité de groupes : activité de communication

Dans un groupe de 4 élèves, deux élèves servent d'émetteurs et deux élèves ont le rôle de récepteurs.

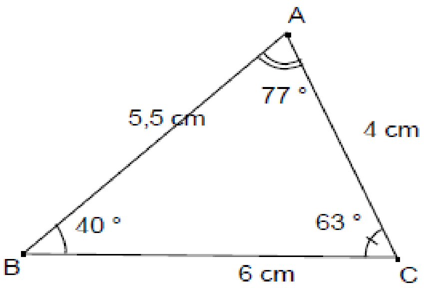
Deux exemplaires de triangles ont été prévus dans la classe et sont donnés pour chaque duo dans un groupe.

Le groupe gagnant est celui qui arrive à construire le triangle avec le moins de données possibles.

La vérification s'effectue à l'aide d'un calque, préalablement préparé par le professeur constitué des deux triangles tracés sans les mesures de longueurs ni les mesures d'angles.

Dans une première phase, les élèves réfléchissent à la transmission des données aux deux autres élèves de leur groupe.

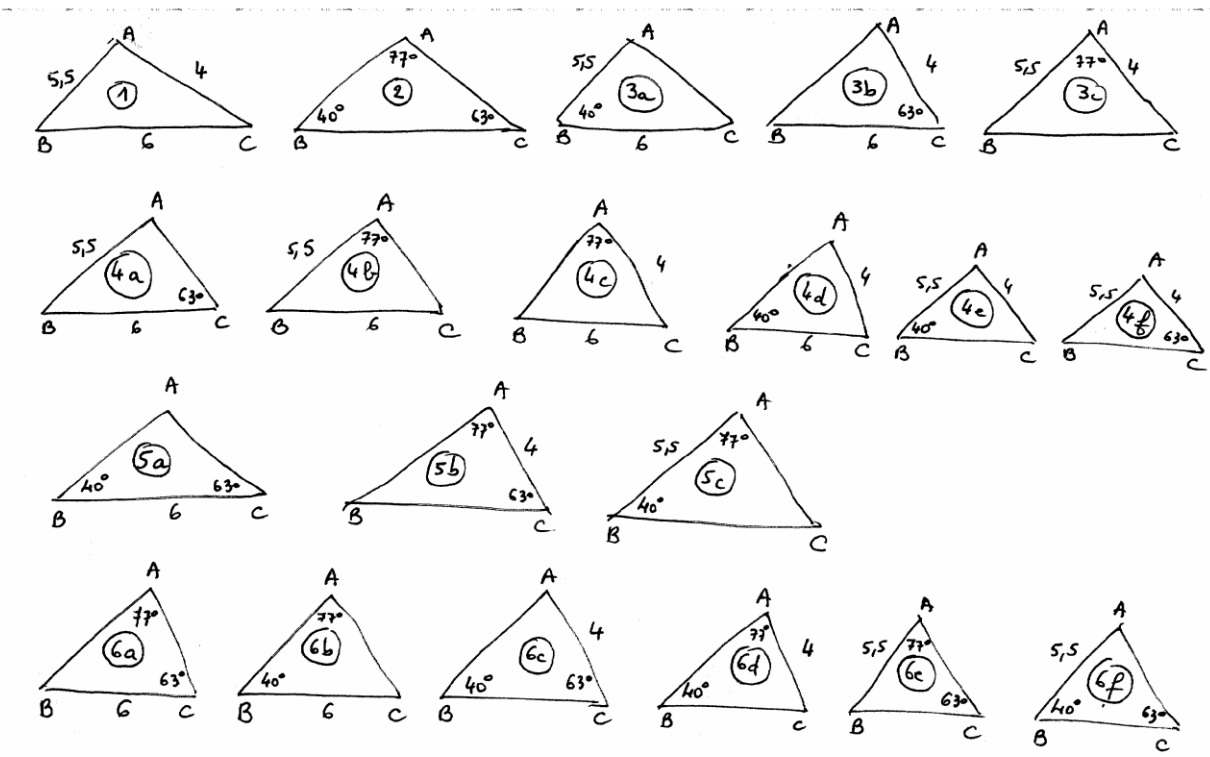
Les émetteurs ont la figure suivante (exemplaire 1) à transmettre :



Le groupe choisit le nombre de données à transmettre et lesquelles (à choisir parmi les angles et les côtés).

Dans une deuxième phase, les élèves reçoivent les données de leurs camarades, ils doivent construire le triangle avec les indications laissées par leurs camarades. Les données transmises sont-elles suffisantes pour construire le triangle ? Pourquoi ? Le groupe récepteur doit alors tracer le triangle.

La vérification est réalisée à l'aide du calque qui ne contient aucune information en terme d'angles et de côtés.



Après une mise en commun et un bilan, on peut par la suite conclure sur la leçon portant sur les cas d'égalités des triangles puis poursuivre par des exercices de constructions de triangles.

Inégalités triangulaires ; somme des angles dans un triangle

On a vu précédemment qu'à partir de la donnée des 3 côtés, on peut construire le triangle.

Question 4 : débat collectif

Donnons 3 nombres (positifs) au hasard, peut-on toujours tracer le triangle de côtés les 3 nombres donnés ?

L'activité permet une expérimentation sur des triangles.

On pourra simuler la donnée des 3 nombres à l'aide du tableur avec la fonction ALEA( ), ou à l'aide de dés ou encore en demandant aux élèves de dicter une liste de 3 nombres .

Il faudra prendre garde aux cas intéressants :

- triangle aplati : par exemple 4 cm ; 1 cm ; 5 cm
- Impossibilité de construire le triangle : par exemple 5 cm ; 3 cm ; 1 cm

On peut poursuivre par la leçon sur les inégalités triangulaires.

On s'interroge par la suite sur les conditions d'existence sur la construction de triangles à partir des 3 côtés et des exercices d'entrainement sur cette notion.

Question 5 : débat collectif en classe entière.

Peut-on construire le triangle avec la donnée d'un côté et de deux angles dont l'un n'est pas adjacent au côté ?

La réponse est OUI si on réussit à déterminer le 3e angle du triangle.

Question 6 : Comment déterminer le 3e angle dans un triangle, connaissant les deux autres ?

Pré-requis :

- Connaître les propriétés relatives aux angles alternes-internes.
- Pour les cas particuliers : propriétés de la symétrie axiale (conservation des distances et des angles).

Activité

ABC est un triangle tel que AB= 6 cm ; L'angle en A mesure 30° et l'angle en B mesure 54°.

Combien mesure l'angle en C ?

Indice : Tracer la parallèle à la droite (AB) passant par C et utiliser des angles alternes-internes.

On pourra poursuivre par le cours sur la somme des angles dans un triangle.

On peut alors traiter et prolonger l'étude par les cas de triangles particuliers (isocèles et équilatéral).

Question 7 : La question laissée en suspens peut à ce stade être résolue de manière individuelle sous la forme d'exercice.

Pourquoi un triangle rectangle qui possède un angle de 45°est-il isocèle ?

Partie B : Milieu de cycle

Notons que conformément au document d'accompagnement, nous avons fait le choix de traiter le théorème relatif aux milieux comme cas particulier du théorème de Thalès. Il s'agit d'un choix didactique en rapport avec notre parcours.

Questionnement

Le parcours débute par un débat collectif avec les élèves autour d'un questionnement qui permet d'enclencher les situations.

Questions 1 : « Comment déterminer des distances inaccessibles ? »

« Qu'est-ce qu'une distance inaccessible ? Pourquoi sont-elles inaccessibles ? »

On peut penser qu'elle est inaccessible à cause d'un obstacle, ou bien parce qu'elle est trop grande ou trop petite.

Par exemple, la hauteur d'un arbre, la largeur d'une rivière, la distance d'un point de la classe à l'arbre de la cour…

Nous déclinons en 4^{e} cette question en 3 sous- questions :

a) Comment déterminer la distance du coin du bureau à l'arbre situé dans la cour et que l'on visualise par la fenêtre ? Quels outils ?
b) Comment déterminer la hauteur d'un arbre ? Quels outils ?
c) Comment déterminer la hauteur d'une pyramide d'Egypte ? Quels outils ?

On utilise pour déterminer cette distance la méthode vue en cinquième utilisant des triangles.

L'activité présentée ensuite sous forme de défis permet de travailler sur les triangles et de faire émerger la notion de triangles semblables.

CC BY NC ND

Certains prérequis vus en début de cycle 4 sont nécessaires à cette activité.

-Angles alternes- internes, correspondants

-Constructions de triangles : cas d'égalités des triangles

-Somme des angles dans un triangle

Cette activité est présentée sous la forme de travail en groupes. Deux versions peuvent être données dans la classe.

GROUPE 1 Triangles mystères

Défi n°1

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm ; 8cm et 6,5 cm.

Pouvez-vous trouver combien mesurent ses angles ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

Défi n°2

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont les angles mesurent 115° ; 43° et 22°.

Pouvez-vous trouver combien mesurent ses côtés ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

Défi n°3

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont on connait deux angles. Ils mesurent 50°et 40°.

Pouvez- vous trouver combien mesurent ses côtés ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

GROUPE 2 Triangles mystères

Défi n°1

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont les côtés mesurent 9,5 cm ; 8cm et 6,5 cm.

Pouvez- vous trouver combien mesurent ses angles ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

Défi n°2

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont les angles mesurent 62° ; 75° et 43°.

Pouvez-vous trouver combien mesurent ses côtés ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

Défi n°3

Dans ma pochette j'ai caché un triangle dont on connait deux angles. Ils mesurent 50°et 40°.

Pouvez- vous trouver combien mesurent ses côtés ?

Si oui, expliquez votre démarche.

Si non, expliquez pourquoi vous ne pouvez pas.

Matériel autorisé : règle graduée ; rapporteur ; compas et équerre.

BY NC ND

Commentaires

Dans le défi 2, les élèves doivent trouver un triangle répondant à une condition d'angles.

Certains se rendent vite compte de la non unicité du triangle (à isométrie près), la longueur du premier segment tracé étant indéterminée. D'autres poursuivent méticuleusement leurs tracés. En comparant les figures obtenues avec celle du voisin, il est facile de répondre que le triangle obtenu n'est pas unique et par suite qu'il est impossible de donner les mesures de longueurs de ses côtés.

Ce défi impossible permet aux élèves de positionner les triangles les uns dans les autres pour comparer les triangles.

Lorsque les élèves sont convaincus que le triangle n'est pas unique et qu'il existe une infinité de triangles ayant 3 angles fixés (à isométrie près), on démontre l'infinité des triangles en « emboitant » des triangles les uns dans les autres.

Remarque 1 (à démontrer) lorsqu'on emboite les triangles les 3^{e} côtés semblent parallèles.

On fait intervenir la notion d'angles correspondants vue en début de cycle.

Remarque 2 (à démontrer) et si on donne que 2 angles? (Défi 3)

Les élèves sont amenés à voir que cela revient au même que la donnée de trois angles puisque la somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°. Cela permet de réinvestir ce théorème en situation.

Question 2 : La donnée de 3 angles d'un triangle est-elle suffisante pour trouver la longueur des côtés de ce triangle ?

Réponse : Non, il existe une infinité de triangles possédant respectivement les mêmes triangles.

Ils sont « plus ou moins grands ».

A ce stade du parcours, les élèves n'ont pas encore la notion de proportionnalité des côtés.

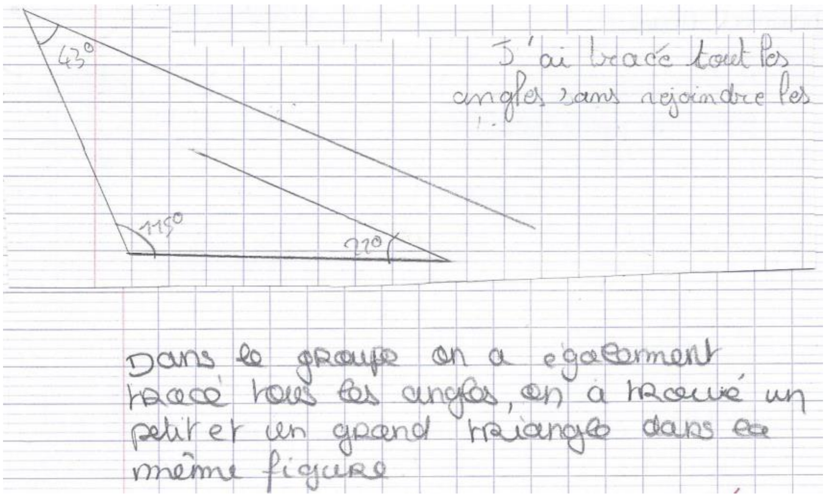
La suite du parcours consiste à expliciter ce que « plus ou moins grand » signifie.

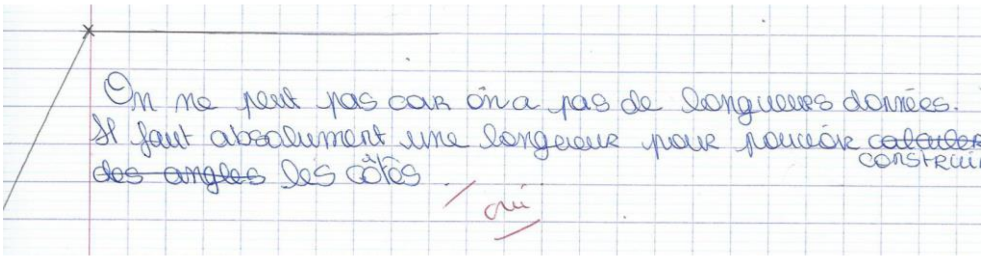
Remarque 3 : Et si on donnait 1 seul angle ?

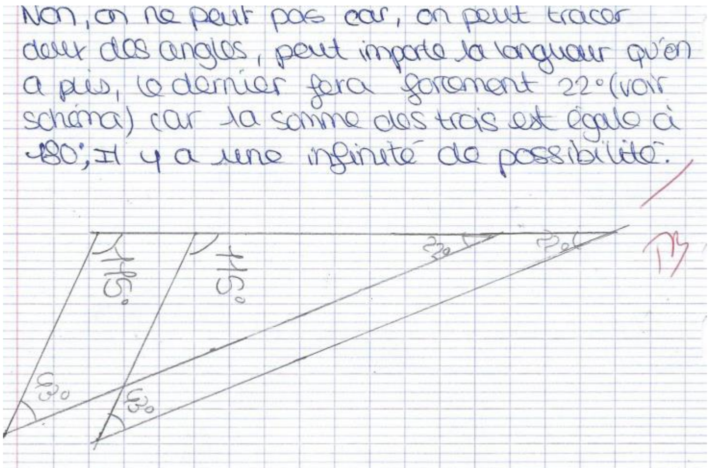
Question 3 Et si je vous donne un côté en plus des 3 angles, est-il unique (à isométrie près) ?

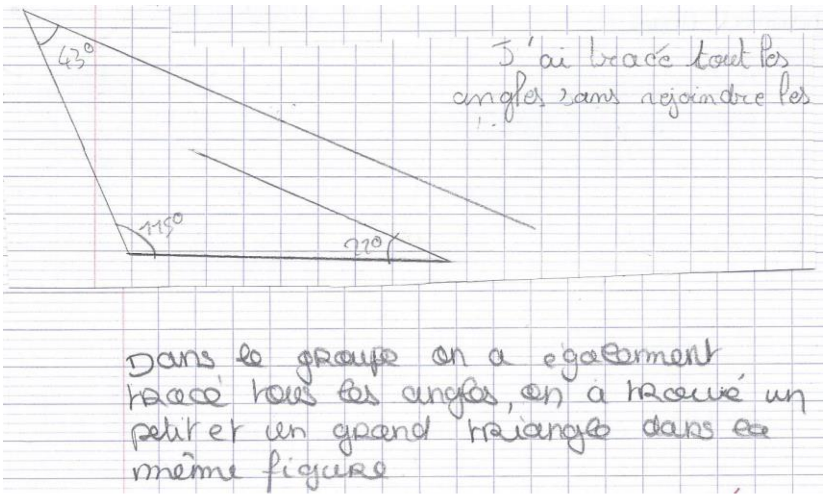
Réponse : oui, notion vue en 5^{e}. Un côté et les deux angles adjacents nous permettent de tracer de manière unique (à isométrie près) notre triangle. Il s'agit de l'un des cas d'égalité des triangles.

Productions d'élèves








43°
115°
22°
J'ai tracé tout les angles sans rejoindre les
Dans le groupe on a égalemment tracé tous les angles, on a trouvé un petit et un grand triangle dans le même figure

CC BY NC ND

Conjecture sur la proportionnalité des côtés

Défi n°4

ABC est un triangle dont ses côtés mesurent :

AC= 16cm

AB= 23 cm

BC= 15,5 cm

Le triangle mystère est un triangle tel que ses angles soient égaux à ceux de ABC chacun à chacun et tel que le plus grand côté du triangle est 92 cm. Peux-tu trouver les deux autres côtés du triangle mystère ?

Les élèves sont amenés à conjecturer la proportionnalité des côtés entre le triangle mystère et le triangle ABC.

On pose alors la question :

Question 4 : Est-ce que tous les triangles qui ont des angles respectivement égaux ont des côtés proportionnels ?

Le retour sur les côtés trouvés précédemment par les différents groupes permet de poser la question « Y-a-t-il proportionnalité ? »

« Emboiter » les triangles au sens d'une configuration de Thalès

La première étape consiste à considérer que l'on peut toujours se ramener à des triangles « emboités » puis démontrer la propriété pour ces triangles « emboités », c'est-à-dire dans une configuration spécifique de Thalès.

Question 5 :

   **Groupe de 2 élèves**

Peut-on toujours emboiter des triangles semblables ? Si oui comment ? Décrire les transformations à réaliser.

Matériel : 2 triangles semblables de couleurs différentes. Le professeur peut demander de les réaliser et de les découper à la maison.

Commentaires : Notons que les transformations qui n'étaient pas présentes dans le Bulletin Officiel de 2008 sont présentes dans les programmes de 2016. On peut donc ainsi nommer de façon précise les isométries qui interviennent.

On commence par faire manipuler les élèves sur des versions papiers couleur de triangles semblables : un triangle rouge et un bleu.

Le cas qui pose problème est celui où il faut retourner l'un des triangles.

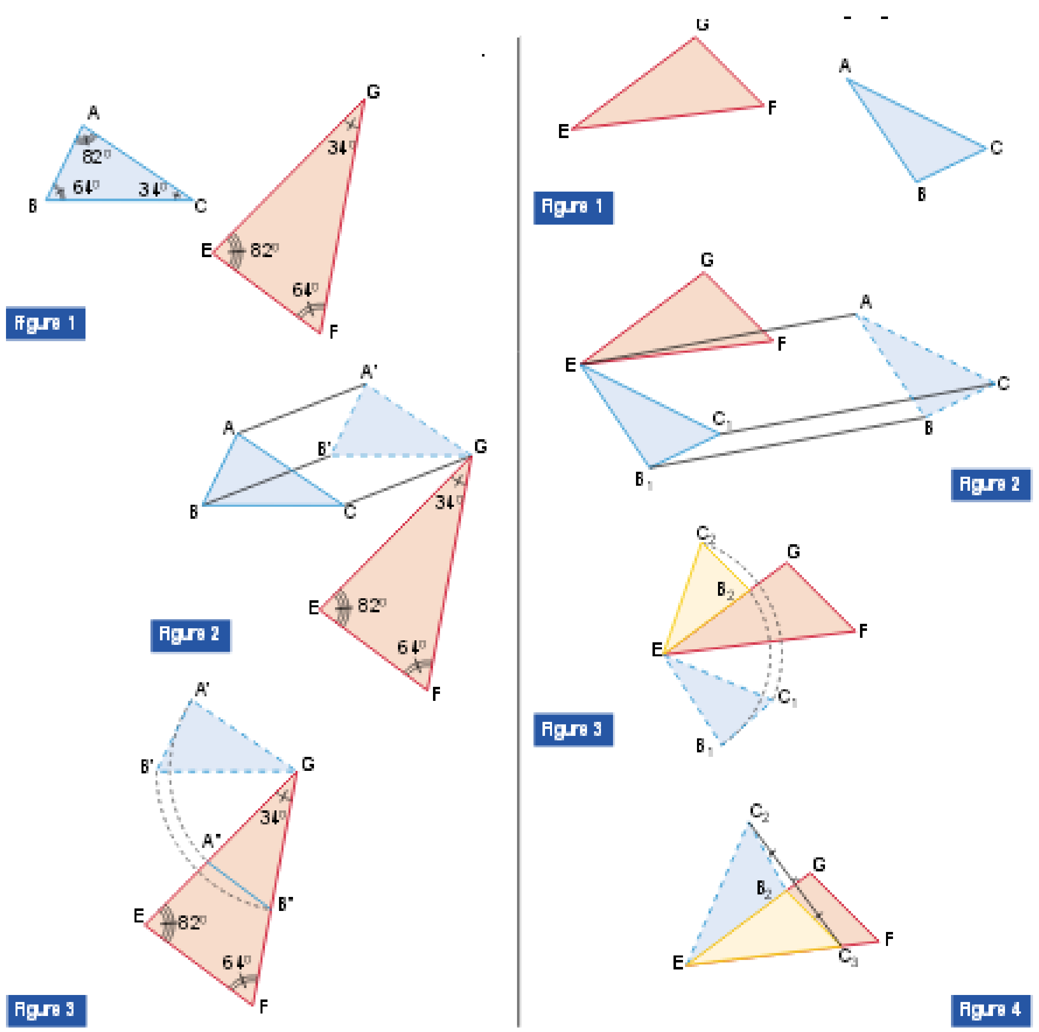
Le professeur passe dans les groupes et dispose de manière volontaire les deux triangles de façon à ce qu'un triangle soit à retourner.

On pourra conclure à :

- Une translation puis une rotation (illustration sur la colonne de gauche)
- Une translation puis une rotation puis une symétrie axiale (illustration sur la colonne de droite)

Correction

La figure 1 correspond à la configuration de départ.



Conjecturer le théorème de Thalès

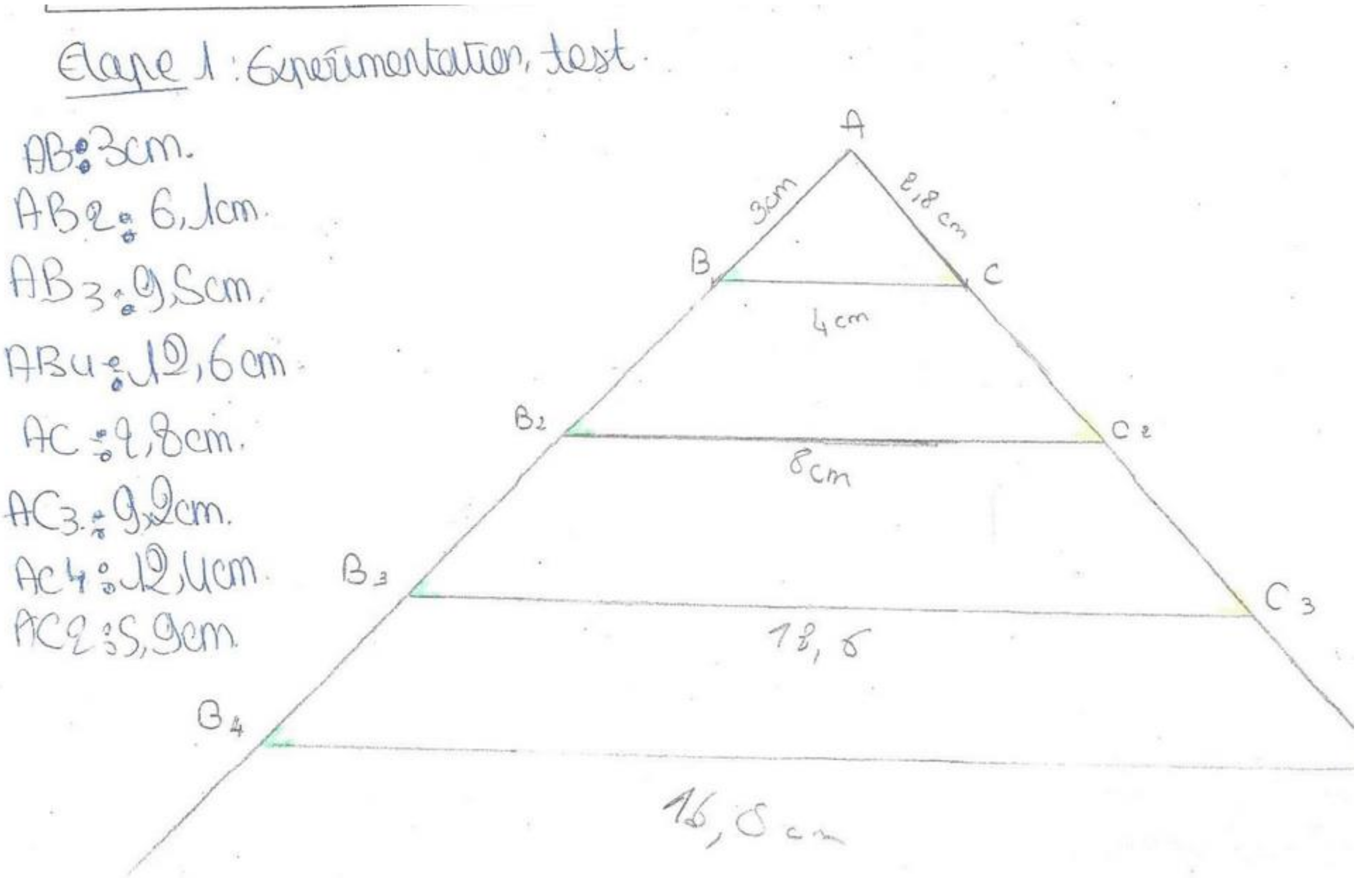
La conjecture sera réalisée à l'aide de géogébra ou sous sa forme papier-crayon. Le choix est laissé aux groupes d'élèves.

En fonction des erreurs de mesures et selon les triangles envisagés, on trouve une réponse positive ou négative.

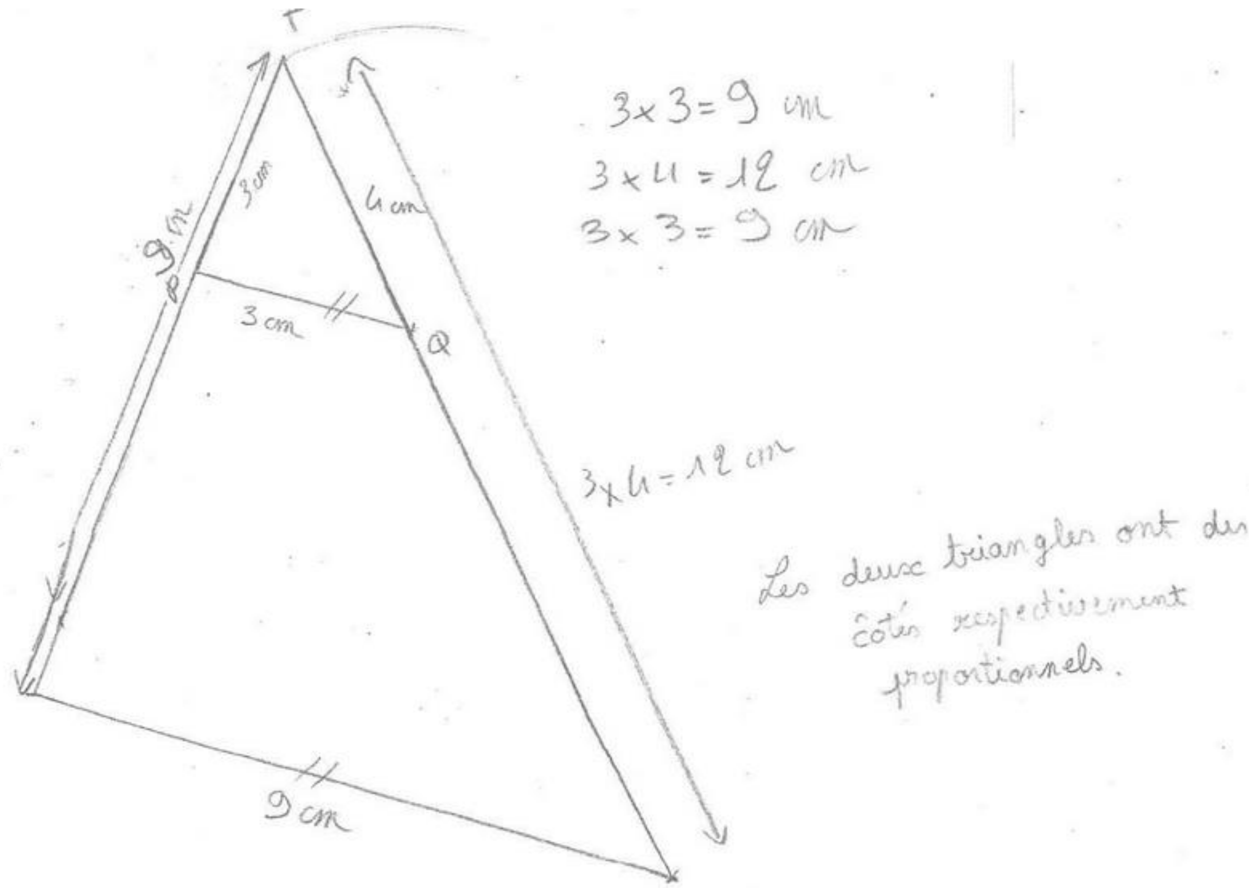
Le recours à la démonstration devient alors indispensable pour que **tous** soient d'accord.

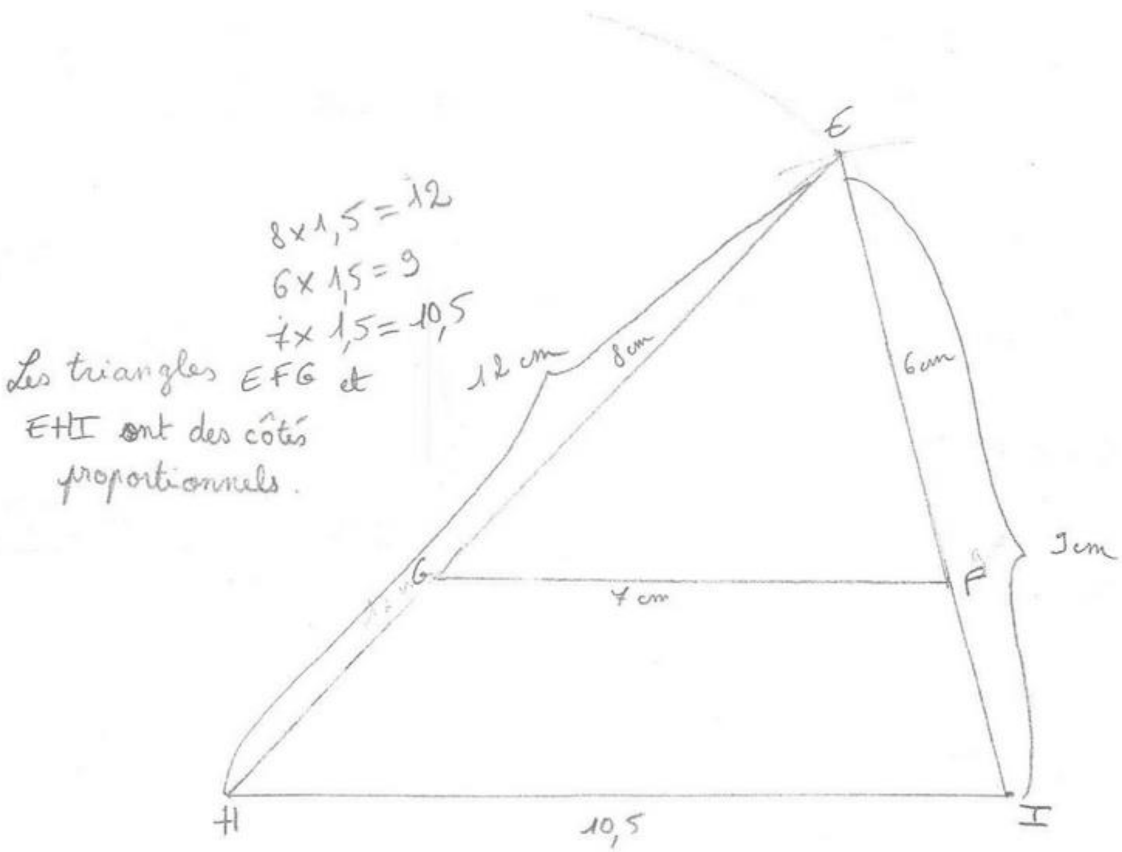
Les élèves tracent des triangles de leur choix et mesurent avec leur règle graduée.

Nous vous présentons ici quelques exemples de copies.

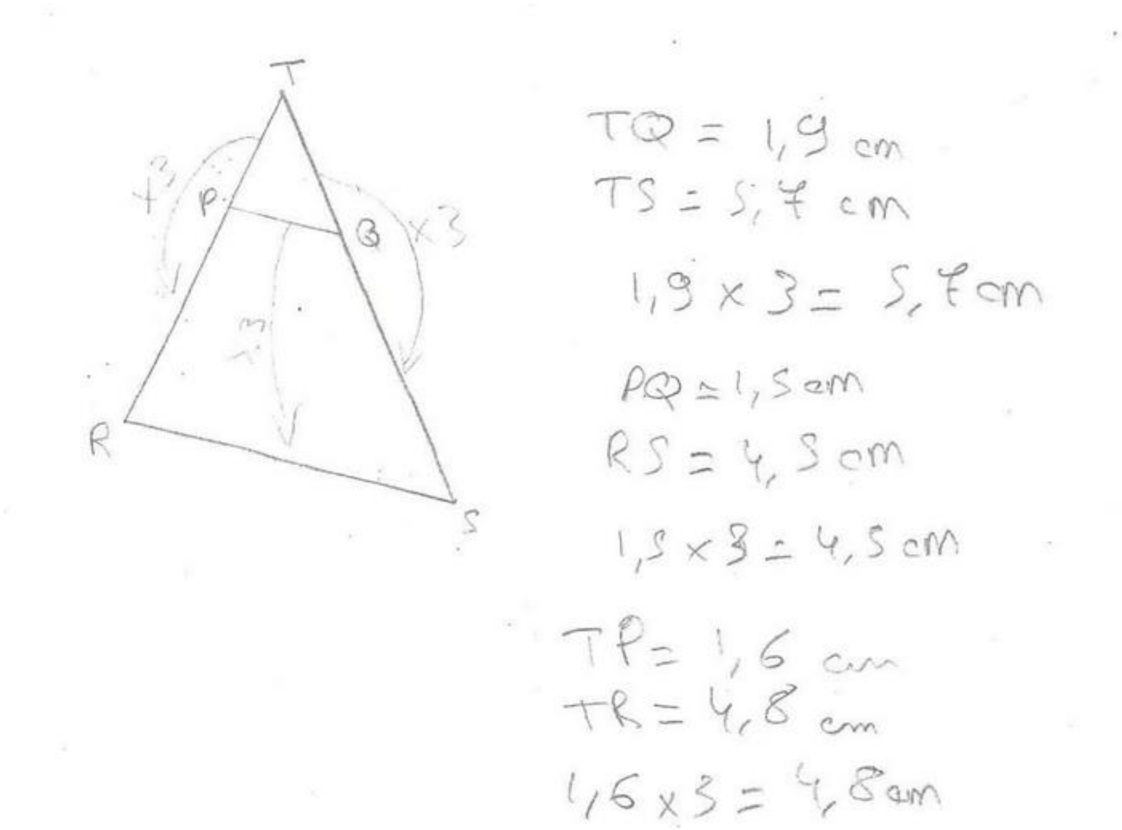


BY NC ND





Avec géogébra : les élèves relèvent sur une figure à main levée les résultats donnés par géogébra.



Les groupes ne sont pas d’accord.

En effet, selon le choix de l’outil et du triangle, certains concluent que les côtés sont proportionnels et d’autres non.

La démonstration est alors introduite pour mettre d’accord les groupes.

Démonstration par les aires

Commentaires : Cette partie est facultative. Le choix est laissé à l’enseignant de traiter ou non la démonstration en fonction du temps et de la classe. Notons qu’il faut environ quatre heures pour traiter entièrement cette partie et qu’elle nécessite un accompagnement en classe de l’enseignant, elle ne peut pas être renvoyée sous forme de travail à la maison.

Pour pouvoir le démontrer on emboite les deux triangles l’un dans l’autre (l’exemplaire et le mystère) et on montre alors qu’il y a bel et bien proportionnalité au niveau des longueurs des côtés.

Au Préalable, un travail sur les aires de triangles avec le sommet qui se déplace sur une parallèle à la base, la base étant commune, est nécessaire.

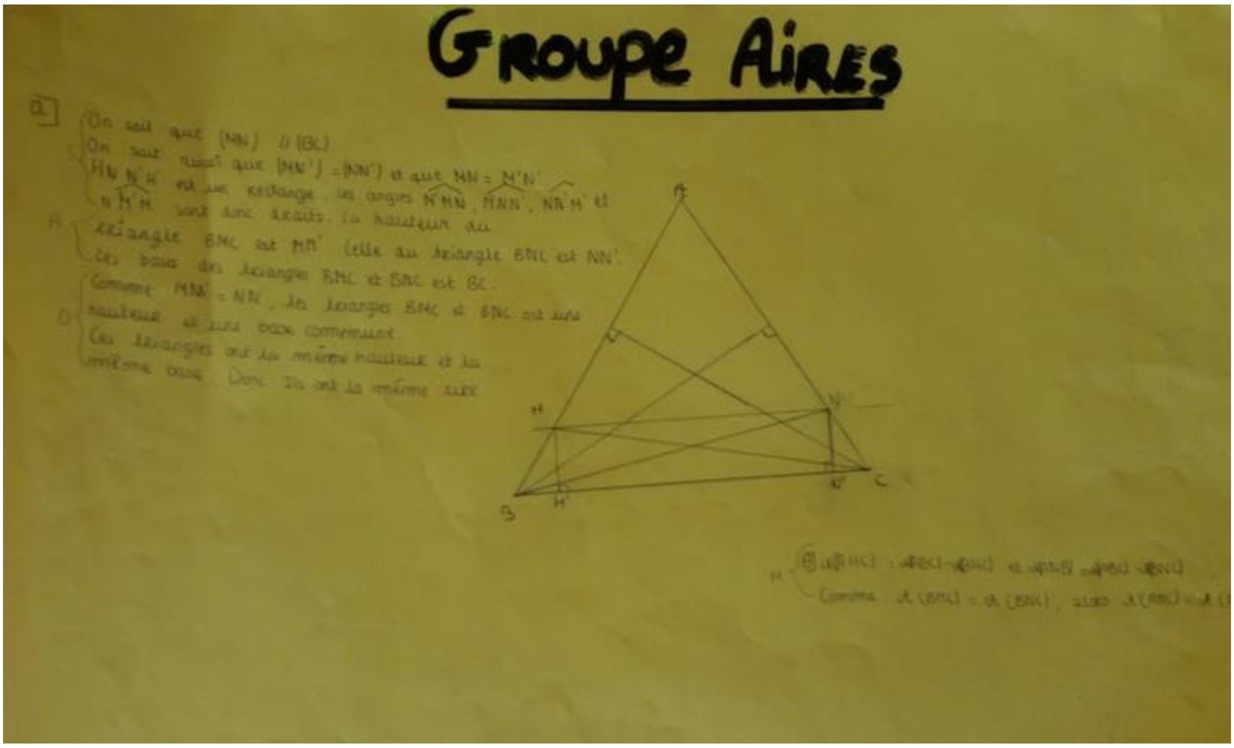
On rappelle ici que la notion de distance d’un point à une droite est maintenant inscrit dans les programmes de cycle 3.

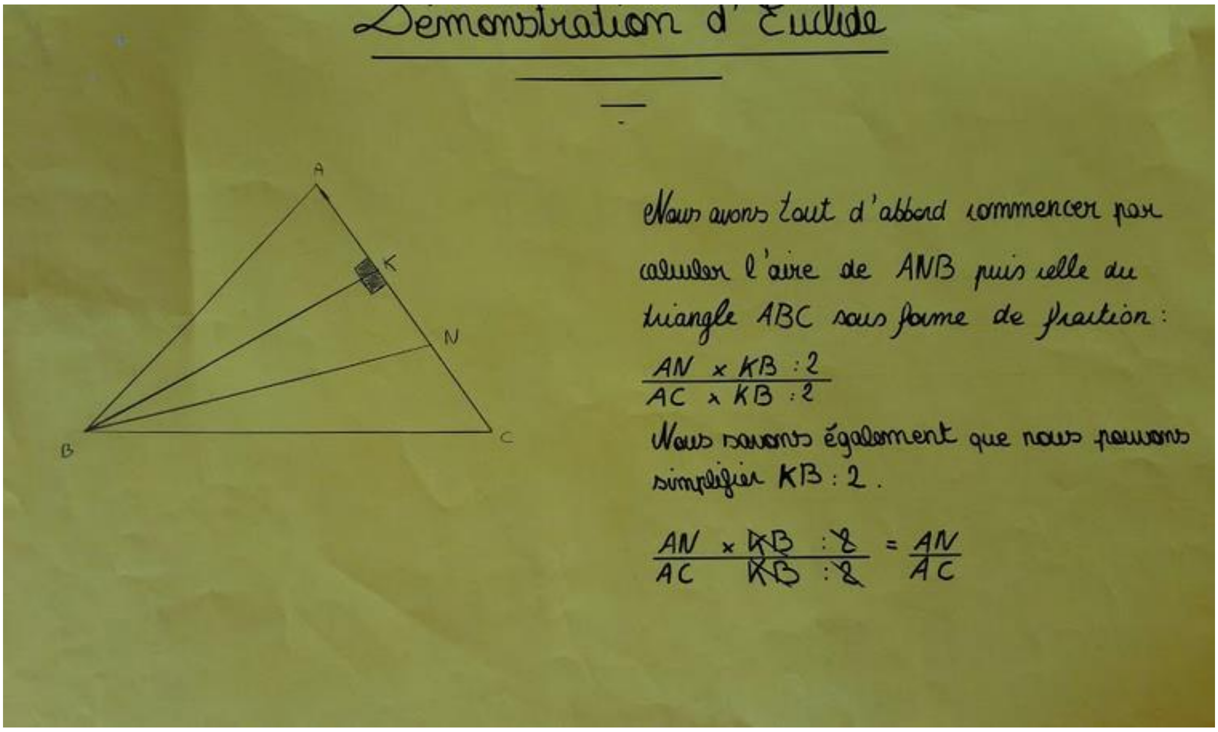
A cette étape du parcours, le professeur énonce le théorème à démontrer qui n’est autre que le théorème de Thalès. Il s’agit du bilan des investigations de la classe.

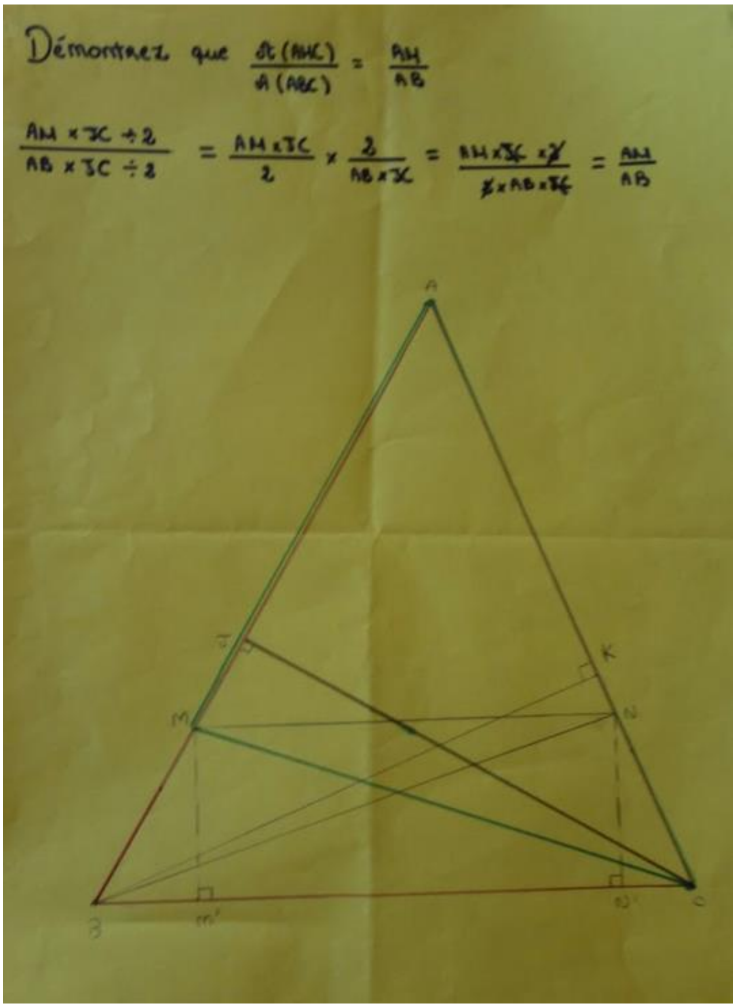
Version facultative : Les élèves doivent rechercher sur internet une démonstration du théorème de Thalès et l’amener (version papier à imprimer au CDI ou à la maison) Une première étape consiste à trier les démonstrations pertinentes et non pertinentes : que fallait-il taper sur le moteur de recherche ? On décide d'une version pertinente de démonstration commune à la classe.

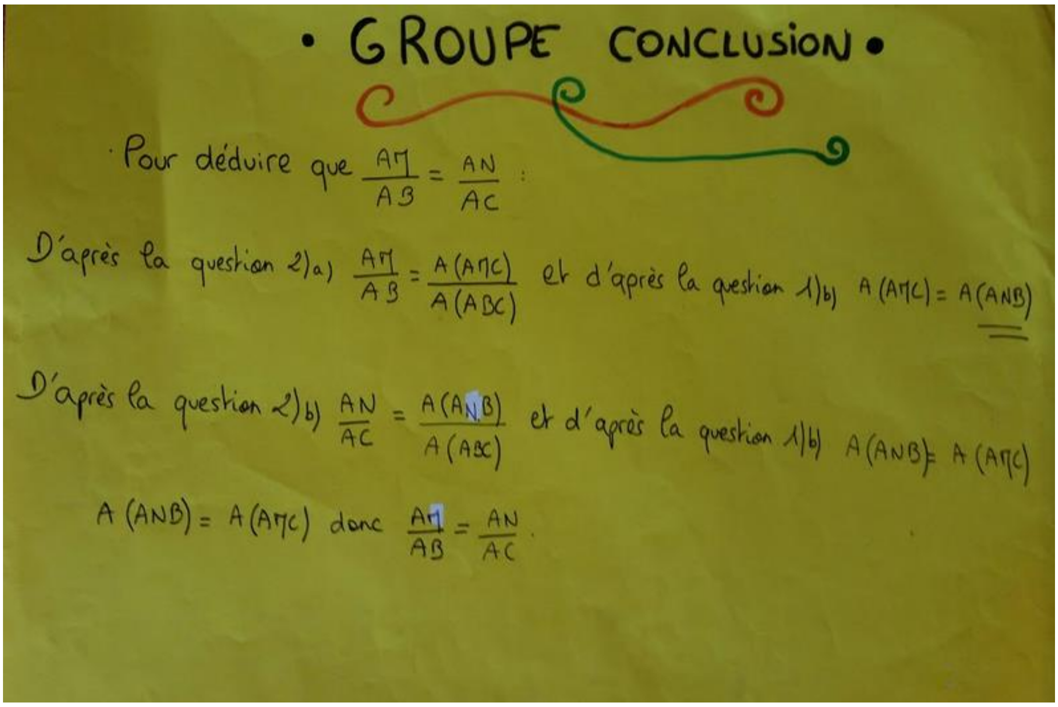
Le professeur répartit les étapes de démonstration par groupes. Chaque groupe a en chargela recherche et la rédaction d'une étape de démonstration.

Chaque groupe doit passer à l'oral devant la classe et présenter le « morceau » qu'ils avaient en charge afin de reconstituer le puzzle de la démonstration. Des affiches servent de support à leur raisonnement. Cette démonstration pourra être écrite dans la partie leçon à la suite de l'énoncé du théorème de Thalès.




Démonstration d'Euclide
A
K
N
B
C
Nous avons tout d'abbord commencer par calculer l'aire de ANB puis celle du triangle ABC sous forme de fraction :
AN × KB : 2 / AC × KB : 2
Nous savons également que nous pouvons simplifier KB : 2.
AN × KB : 2 / AC KB : 2 = AN / AC


Démontrez que A(AMC) / A(ABC) = AM / AB
AM × JC ÷ 2 / AB × JC ÷ 2 = AM × JC / 2 × 2 / AB × JC = AM × JC × 2 / 2 × AB × JC = AM / AB
A
J
K
M
N
B
C



• GROUPE CONCLUSION •

Pour déduire que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$:

D'après la question 2)a) $\frac{AM}{AB} = \frac{A(AMC)}{A(ABC)}$ et d'après la question 1)b) $A(AMC) = A(ANB)$

D'après la question 2)b) $\frac{AN}{AC} = \frac{A(ANB)}{A(ABC)}$ et d'après la question 1)b) $A(ANB) = A(AMC)$

$A(ANB) = A(AMC)$ donc $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Calcul de distances inaccessibles

Retour à la question initiale.

Nous avions laissée en suspens 3 sous-questions :

a) Comment déterminer la distance du coin du bureau à l'arbre situé dans la cour et que l'on visualise par la fenêtre ? Quels outils ?
b) Comment déterminer la hauteur d'un arbre ? Quels outils ?
c) Comment déterminer la hauteur d'une pyramide d'Egypte ? Quels outils ?

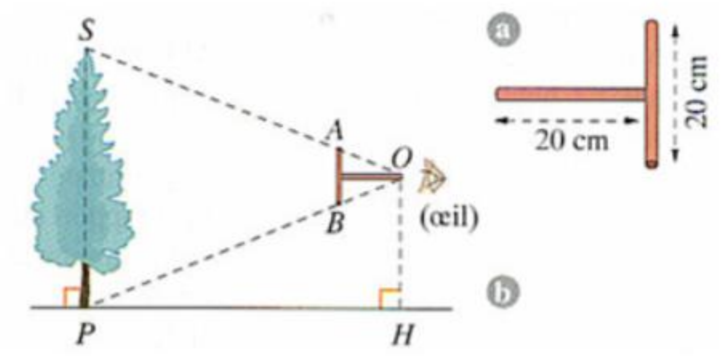
Le travail mené auparavant amène les élèves à élaborer des réponses à la question du calcul de distances inaccessibles.

a) Proposez un protocole réalisable qui vous permette de déterminer la distance entre le coin du bureau et l'arbre de la cour ? De quel matériel de mesure avez -vous besoin ?
Demandez la validation de votre protocole au professeur.
Le professeur valide ou non le protocole selon le matériel demandé et la faisabilité des idées.
Il ne juge pas de la validité mathématique du protocole.
Une fois validé, les élèves peuvent avec l'autorisation du professeur réaliser leurs mesures.

b)

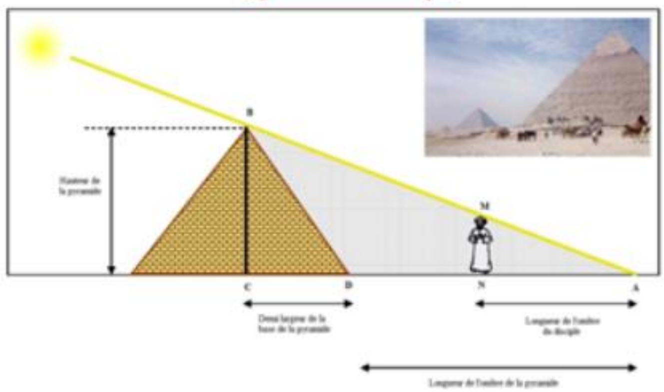
La croix du bûcheron



Pour évaluer la hauteur d'un arbre, le bûcheron utilise une croix (fig. a).
Il se place à la bonne distance de l'arbre pour viser dans sa croix le sommet et le pied de l'arbre (fig. b).
Calculer la hauteur du sapin si le bûcheron est à 25 m de l'arbre.

c)

Pyramide Khéops



Vers 600 avant J-C, un mathématicien grec, T. Millet décide de mesurer la hauteur de la pyramide de Khéops en Egypte.
A un moment ensoleillé de la journée, T. Millet place un de ses disciples de telle sorte que son ombre coïncide avec celle de la pyramide comme sur le schéma. Il prend alors les mesures suivantes :
CD = 221 coudées ; DN = 314 coudées ; AN = 6.7 coudées ; MN = 3,5 coudées (taille du disciple).
Comment a-t-il fait ? Et quelle hauteur a-t-il trouvé ?

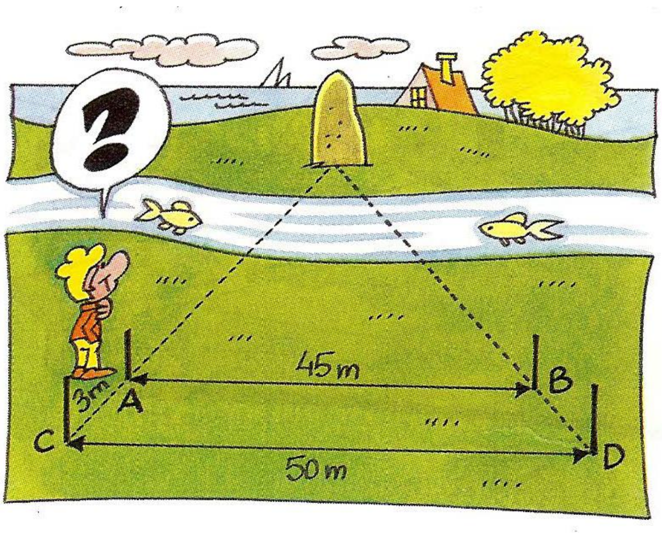
Un travail technique sur les exercices classiques du calcul de longueurs sur le théorème de Thalès peut être à ce stade envisagé.

Remarquons que la réussite est plus importante sur certains exercices moins classiques. La vision du théorème de Thalès via les triangles semblables permet de visualiser les quotients de Thalès comme un coefficient d'agrandissement ou de réduction des triangles.

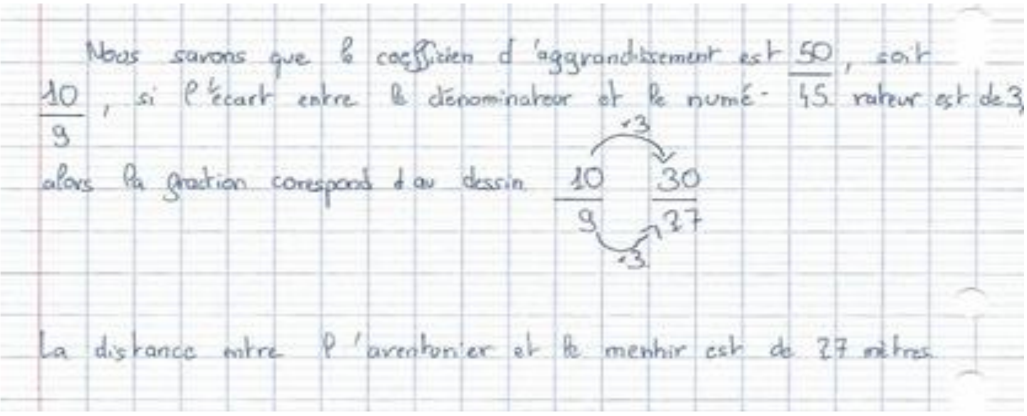
Par exemple,

(AB) étant parallèle à (CD) calculer la distance de l'aventurier A jusqu'au menhir.

cc BY NC ND



Réponse d'élèves


Nous savons que le coefficient d'aggrandissement est $\frac{50}{45}$, soit $\frac{10}{9}$, si l'écart entre le dénominateur et le numérateur est de 3 alors la fraction correspond à au dessin $\frac{10}{9} \xrightarrow{\times 3} \frac{30}{27}$

La distance entre l'aventurier et le menhir est de 27 mètres

:

Il est indispensable qu'en parallèle de ces activités soient travaillés des exercices de techniques concernant :

- Les calculs de longueurs à partir d'une longueur et d'une échelle
- Les calculs d'échelles avec la donnée de deux longueurs : une réelle et celle qui lui correspond sur le plan
- Les calculs de 4^e proportionnelle

Cas particulier avec des milieux

On pourra faire des exercices sur des configurations avec un milieu et une parallèle.

Quel est alors le coefficient de proportionnalité pour passer du petit triangle au grand triangle ?

On pourra le faire expérimenter sur des exemples puis le faire démontrer avec du calcul littéral.

On peut ensuite conclure sur la réciproque du théorème des milieux en bilan.

Triangles semblables.

On a étudié précédemment le cas particulier où les triangles sont emboités l'un dans l'autre. On travaille maintenant sur le calcul de longueurs dans des triangles semblables quelconques.

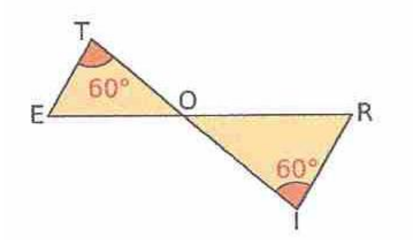
Une liste d'exercices pourra alors être proposée (partie 4).

Les exercices « classiques » peuvent donc être envisagés de deux façons différentes :

- Par le biais des triangles semblables
- Par le biais du théorème de Thalès

Deux techniques coexistent.

Exemple :



Les points T, O et I sont alignés ainsi que les points E, O et R. On donne ET = 2,4 cm ; OT = 6,4 cm ; OR = 7 cm et RI = 3 cm.

Calcule, en justifiant, les longueurs OE et OI.

Déterminons les techniques de résolution et les technologies de cette tâche de niveau cycle 4.

1) Technique τ_1

- Démontrer que les deux triangles sont semblables.

-Utiliser la proportionnalité des longueurs dans les triangles semblables.

Les technologies mobilisées dans cet exercice sont :

Proposition 1. Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure alors ces triangles sont semblables.

Proposition 2. Si deux triangles sont semblables alors leurs côtés sont respectivement proportionnels.

Résolution 1 :

es angles $\widehat{ETO}$ et $\widehat{OIR}$ sont de même mesures (60°). Les points E, O et R ainsi que T, O et I étant alignés, les angles $\widehat{TOE}$ et $\widehat{IOR}$ forment des angles opposés par le sommet. Ils sont par conséquent de même mesure.

Ainsi les triangles ETO et RIO, qui ont deux angles respectivement de même mesure, sont de semblables.

Dans des triangles semblables les côtés sont respectivement proportionnels. Calculons le coefficient de proportionnalité. [RI] et [ET] sont homologues. Donc RI/ET=3/(2,4)=1,25

[OE] et [OR] sont homologues. Donc OR=1,25×OE d'où OE = OR÷1,25=7÷1,25=5,6

[OT] et [OI] sont homologues. Donc OI=1,25×OT d'où OI = 4×1,25=5

Remarquons que pour cette technique de résolution, le coefficient de proportionnalité choisi peut être ET/RI soit 2,4/3=24/30=4/5=0,8 .

2) Technique τ_2

-Démontrer que les triangles sont dans une configuration de Thalès.

- Utiliser le théorème de Thalès pour trouver les longueurs manquantes

Les technologies utilisées dans cette deuxième méthode sont :

Proposition 3 : Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

Théorème 4. Théorème de Thalès

Si deux droites (MN) et (CN) sont sécantes en A et si les droites (MN) et (BC) sont parallèles alors AM/AB=AN/AC=MN/BC

Résolution 2 :

Les points E, O, R et T, O ,I qui sont tous des points distincts deux à deux sont alignés. Les droites (ER) et (TI) sont sécantes en O.

Les angles $\widehat{ETO}$ et $\widehat{OIR}$ sont de même mesure (60°) et T, O, I sont alignés. Les deux droites (TE) et (RI) coupée par la sécante (TI) forment deux angles alternes-internes de même mesure.

Elles sont donc parallèles.

En appliquant le théorème de Thalès on obtient,

OT/OI=OE/OR=TE/RI

d'où

4/OI=OE/7=(2,4)/3

Par suite

OI= 4×3÷2,4=5

et

OE=7×2,4÷3=5,6

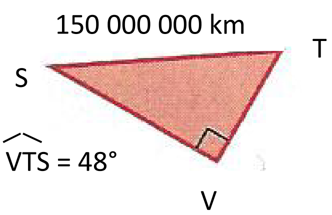
Si dans le bulletin officiel 2008, seule la technique 2 était autorisée, dans les programmes 2016, les deux techniques trouvent leurs places.

Fin de cycle

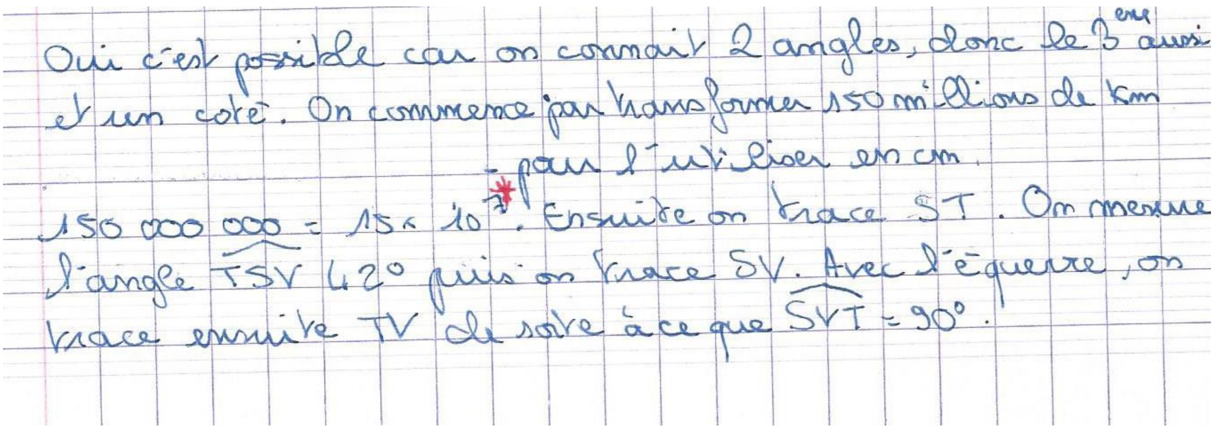
En classe de troisième, la détermination de distances inaccessibles permet d'aborderla trigonométrie.

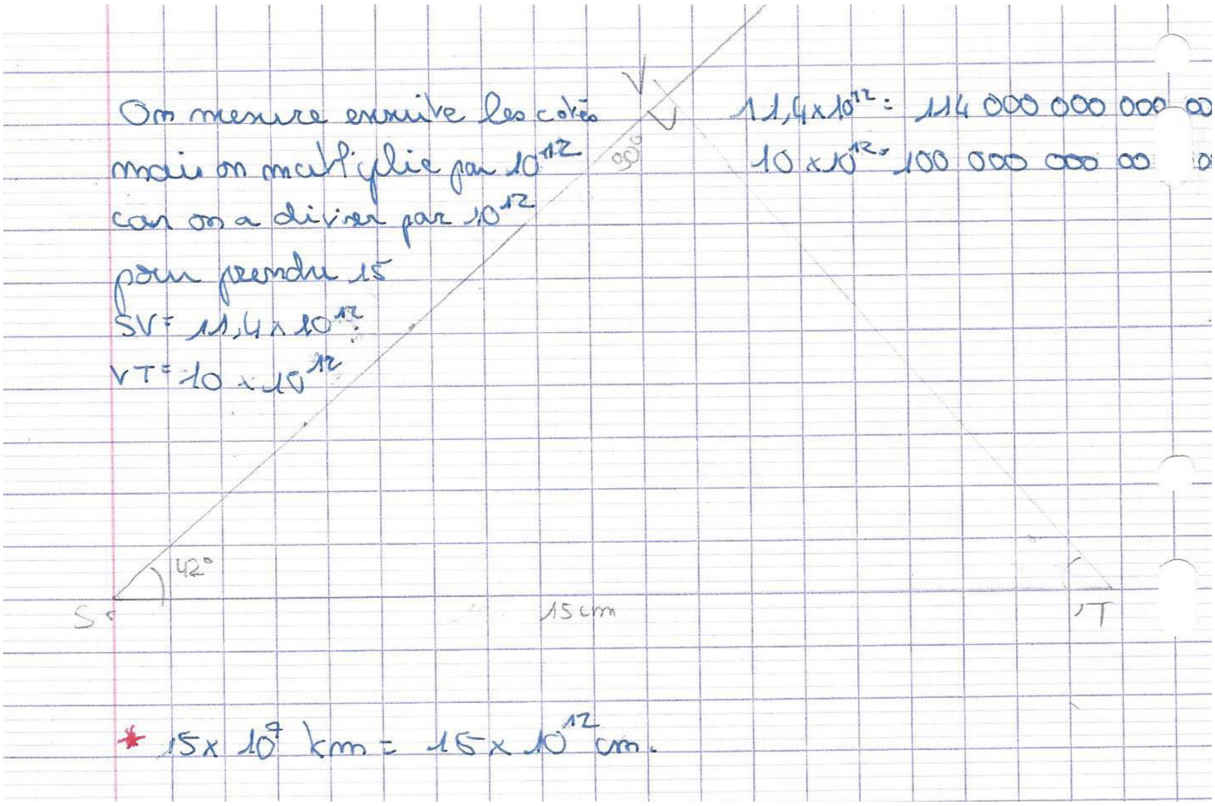
La séquence débute par la question suivante : « Comment estimer la distance Soleil - Vénus ? Pour cela, on utilise la Terre, le Soleil et Vénus. »

On suppose que les planètes tournent autour du Soleil et que leurs orbites sont circulaires, dans un même plan. Vénus, qui fait partie des planètes inférieures (étoile du berger) est visible peu après le coucher du Soleil. L'angle Soleil-Terre-Vénus, appelé élongation de Vénus, est maximal lorsque la ligne de visée TV est tangente à l'orbite. Sa valeur approche 48°. Dans le triangle STV rectangle en V, on a donc :
sin 48°= SV/ST Or sin 48° vaut environ 0,7.
La distance Vénus-Soleil vaut environ 0 ,7 fois la distance Terre-Soleil.
On pourrait de la même façon estimer la distance Soleil-Mercure, qui est aussi une planète inférieure. Précisons que les élèves doivent avoir déjà travaillé sur la distance Terre-Soleil ($1,5 \times 10^8$ km), appelée unité astronomique (u.a.) et sur les triangles semblables dans le parcours précédent. La tâche qu'ils ont à résoudre consiste donc à estimer la longueur du côté opposé [SV], connaissant l'angle VST et la longueur ST.

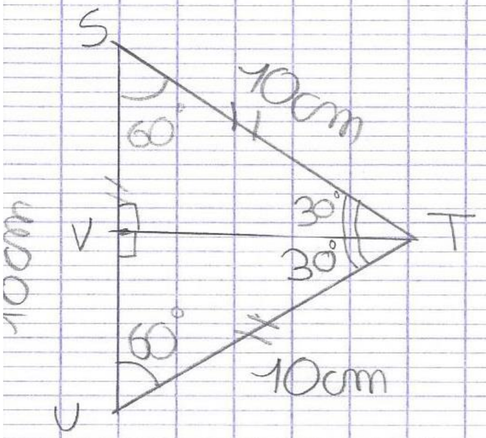


La tâche décrite précédemment appartient au type de tâche *T* « Dans un triangle rectangle, dont on connaît l'hypoténuse et un angle aigu, déterminer la longueur du côté opposé à l'angle aigu connu ». Dans un premier temps, les élèves s'emparent de cette tâche en s'inscrivant dans une problématique pratique (Berthelot Salin, 1992) grâce au choix d'une échelle et à l'utilisation des instruments de géométrie. La question Q « Est–il possible, connaissant dans un triangle rectangle son hypoténuse et un angle aigu, de déterminer la longueur du côté opposé à l'angle aigu connu ? » est résolue par tous les groupes de la classe. En voici un exemple.


Oui c'est possible car on connait 2 angles, donc le 3ème aussi et un coté. On commence par transformer 150 millions de km pour l'utiliser en cm.
150 000 000 = 15 × 10^7. Ensuite on trace ST. On mesure l'angle $\widehat{TSV}$ 42° puis on trace SV. Avec l'équerre, on trace ensuite TV de sorte à ce que $\widehat{SVT}$ = 90°.



Le recueil des différents résultats trouvés dans la classe nous amène à des valeurs comprises entre 93 millions de kilomètres et 114 millions de kilomètres. Ces différences permettent de mettre en évidence l’insuffisance de cette technique, le défaut de précision qui en résulte et par suite de motiver la recherche d’une relation entre l’hypoténuse, le côté opposé et l’angle connu. Ce travail se poursuit par la nouvelle question Q’ « Est-il possible, connaissant dans un triangle rectangle son hypoténuse et un angle aigu, de déterminer − par le calcul − la longueur du côté opposé à l'angle aigu connu ? » La relation n’est pas donnée a priori. L’idée est de tester sur des triangles rectangles familiers où ce type de calcul pourrait se faire sans trop de difficulté (triangles isocèles et demi-triangle équilatéral). Pour étudier cette nouvelle question, la classe est divisée en groupes ; chacun a en charge l’étude d’un cas particulier. Certains pensent à une relation de soustraction, guidés en cela par l’idée que si le côté cherché est plus petit c’est parce qu’on lui a retranché un même nombre. Cette hypothèse ne résiste pas longtemps. Voici deux productions de groupes : l’un travaillant sur la recherche du côté opposé pour un angle de 30° et l’autre pour 45°.



(figure main levée)

Pour trouver combient mesure SV, on a fait le triangle en symétrie. On a pu constater que le petit triangle équilatéral, car tous les angles mesurent 60° SV, il suffit de diviser SV par 2. SV mesure donc 5 cm (10÷2).

a) Pour trouver les deux autres côtés de ce triangle rectangle isocèle (car si ses deux autres angles sont égaux il est isocèle):

$10^2 = 100$

$100 : 2 = 50$ $\quad \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

$5\sqrt{2}$ est la valeur exacte des deux autres côtés de ce triangle.

b) Pour trouver les deux autres côtés de ce ~~même~~ triangle rectangle isocèle :

$18^2 = 324$

$324 : 2 = 162$

$\sqrt{162} = 9\sqrt{2}$

$9\sqrt{2}$ est la valeur exacte des deux autres côtés de ce triangle.

c) Pour trouver les deux autres côtés de ce triangle rectangle isocèle.

$16^2 = 256$

$256 : 2 = 128$

$\sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

$8\sqrt{2}$ est la valeur exacte des deux autres côtés de ce triangle

En traçant des triangles avec des hypoténuses de longueurs diverses, il apparaît que le calcul est toujours le même selon l'angle : pour 30°, on divise par 2. Pour 45°, on divise par 2 puis on multiplie par $\sqrt{2}$. Ils établissent par la suite des conjectures.

Conclusion:
Si un triangle rectangle est isocèle et que l'on connaît l'hypoténuse il faut faire:
$(x:2)\sqrt{2}$.

On institutionnalise les résultats partiels que l'on vient d'obtenir :

Par exemple, dans un triangle rectangle ayant un angle aigu de 30° le côté opposé à l’angle de 30° s’obtient en divisant l’hypoténuse par 2. La même chose est réalisée avec des angles de 45°, et de 60°. Peut-on généraliser à d'autres angles ? La conjecture est engagée en recourant à géogébra sur des angles différents.

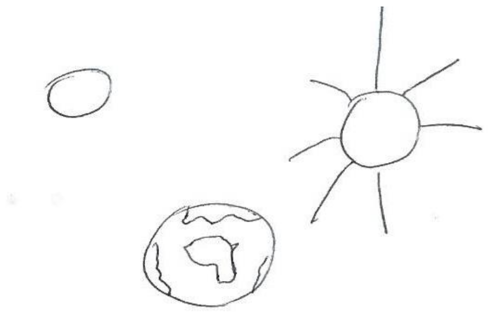
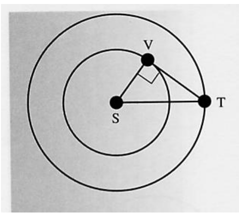
La démonstration qui passe par un usage du théorème de Thalès et par une manipulation de rapports permet finalement d'aboutir au résultat général. Le professeur reprend la main pour introduire le vocabulaire. Ce nombre par lequel on multiplie toujours l'hypoténuse du triangle rectangle pour obtenir le côté opposé et qui ne dépend que de l'angle est appelé sinus de l'angle. Le sens du mot « sinus » est mis à l'épreuve grâce à une recherche documentaire sur internet ou dans le manuel de la classe s'il s'y prête : comment est défini le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ? Il s'agit de faire le lien entre la relation

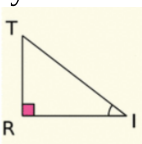
Côté opposé à l'angle = sin (angle) × hypoténuse et la définition donnée par le rapport de la longueur du côté opposé à l'angle sur la longueur de l'hypoténuse. Il en découle la résolution du problème de départ.

Idée de progression de la séquence d'enseignement.

Les séances proposées ne sont pas préparées au jour le jour. Ce sont les avancées des élèves dans la problématique qui guident l'avancement dans le temps. Le travail à la maison est planifié à la semaine et concerne un autre sujet. La séance débute toujours par un quart d'heure de travail de la technique, déconnecté du travail qui suit. Le reste de la séance est consacré aux avancées des recherches individuellement ou par groupes. Durant la séance, il y a une alternance de *rythmes.* Il n'y a pas de durée a priori des activités, seulement des estimations. Le professeur décide de stopper l'activité quand les productions des élèves le permettent. Ceci nécessite d'accepter de la part du professeur une certaine instabilité, qui est amoindrie par une démarche d'anticipation des recherches. Des séances de mise en communs des recherches permettent de réguler et de ramener le collectif au même niveau dans l'avancement.

On ne détaille pas ici tous les éléments relatifs au déroulement mais seulement les grandes étapes.de la séquence. L'axe d'analyse suivi est la mise en lien du découpage du temps sur une période longue de trois semaines.

Séquence	Contenu de la séance au niveau des recherches	rythme	Commentaires
1	Comment estimer la distance Soleil-Vénus ? La question venant d'être posée, le professeur demande de schématiser, de modéliser la situation. La majorité des dessins obtenus ressemblent à celui- ci :  Les questions de la classe : Comment représenter les planètes ? Quelle planète tourne autour de quelle autre ? Tournent-elles en réalisant des cercles ? Quelles sont leurs positions ? Les distances sont-elles fixes puisque les planètes tournent ? Discussion autour du modèle choisi : des points pour les planètes S, T et V – des cercles pour les orbites. Rajout du professeur : on considère les deux orbites dans un même plan.	lent	Un accès internet au bureau du professeur. Un élève, représentant la classe, recherche sur internet les réponses aux questions, notamment la position des planètes.
2	Précision de la question de la part du professeur. Nous allons estimer la distance Soleil-Vénus grâce aux données de Copernic. Questions de la classe : qui est Copernic ? Reformulation de la question : Lorsque (VT) est tangente au cercle C_1, les trois planètes forment un triangle SVT rectangle en V. Copernic a mesuré l'angle $\widehat{STV}$ et a trouvé 48°. Combien mesure la distance VS entre le Soleil et Vénus ?  Extrait de Terre et Espace -Mesure de la Terre – Calculs d'orbites hors-série n°5 Ellipses	lent	Recherche internet d'une personne de la classe : qui est Copernic ?
3	Recherche de réponses. Internet interdit. Pistes de la classe : Tracer à l'échelle et mesurer. Différentes échelles sont utilisées dans la classe.	lent	Recherche par groupes : contrôle collectif à l'intérieur des groupes. Vérification des tracés avec les instruments : règle graduée, équerre et rapporteur
4	Mise en commun et confrontations des résultats. Des différences de mesures de quelques millimètres entrainant des différences de distance Soleil-Vénus entre les groupes de millions de kilomètres. Mise en évidence de l'insuffisance de la méthode. Nouvelle méthode : trouver une relation, un calcul permettant de trouver SV.	rapide	Confrontations des résultats entre groupes.

5	Nouvelle question : introduction par le professeur du vocabulaire côté opposé. Existe-t-il une relation pour passer de ST à SV ? Comment trouver par le calcul (ou calculer) dans un triangle rectangle la longueur du côté opposé à l'angle aigu connu à partir de l'hypoténuse ? Méthode indiquée par le professeur : test sur des cas particuliers de triangles. Ils pensent au triangle rectangle isocèle. Autres cas donnés par le professeur : angles de 30° et de 60°. Répartition du travail. Le professeur donne les cas simple (60°) aux élèves les plus faibles et le cas le plus difficile (30°) aux meilleurs. Tous les élèves cherchent un seul cas.	rapide	
6	Recherche du calcul du côté opposé à partir de l'hypoténuse à angle fixé. Internet interdit. Selon les classes cette étape prendra une ou deux heures.	lent	Contrôle de la justesse des calculs par les instruments de géométrie. La mesure effective des longueurs permet de guider vers la relation à trouver. (anticipation)
7	Lors de la mise en commun, tous les élèves rencontrent tous les cas. Synthèse et mise en en évidence de la relation : une division ou une multiplication selon les groupes. Chaque groupe passe oralement et présente son travail aux autres. L'ordre de passage est choisi par le professeur : les groupes faibles puis les meilleurs.	lent	Passage au tableau par le reste de la classe, qui prend des notes et pose des questions après l'intervention du groupe. Il y a des recoupements entre les différents cas.
8	Cas général avec Géogébra ; La figure est déjà faite. Collectivement, on établit ce que l'on doit observer. Un élève passe au tableau et représente le collectif classe. Démonstration dans le cas général. Le nombre par lequel on multiplie est appelé *sinus de l'angle.* Travail à la maison : recherche documentaire Qu'est-ce que le sinus ? (manuel de la classe ou internet).	rapide puis lent	Géogébra amène-t-il la même conclusion que nos cas particuliers ?
9	Synthèse sur la propriété dégagée la séance précédente :  Pour calculer le côté TR opposé à l'angle TIR, il faut multiplier l'hypoténuse TI par un nombre qui ne dépend que de l'angle TIR. Exemples : a)angle de 30° TR = 0,5 × TI b) angle de 60° TR = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × TI c) angle de 45° TR = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ × TI Retour des recherches documentaires : ils trouvent la définition du sinus comme quotient du côté opposé par l'hypoténuse. Mise en lien avec notre propriété. Leçon sur les sinus et usage de la calculette.	rapide	Recherche de la définition du sinus grâce au manuel ou à internet.

	Questions de la classe : mais Copernic, il n'avait pas de calculette. Comment faisait-il ? Et la calculette comment fait-elle pour donner les valeurs du sinus ?		
10	Retour au problème initial en recherche individuelle : comment estimer la distance Soleil-Vénus à partir de la distance Terre-Soleil et de l'angle de 42° ? Nouvelle question : Et si on cherche l'hypoténuse à partir de l'angle et du côté opposé ? Et si on cherche le 3e côté ? Synthèse : techniques de calcul de la longueur de l'hypoténuse ou du côté opposé. Travail à la maison (recherche documentaire) Vérifier combien mesure la distance Soleil- Vénus.	rapide	
11	Retour à la question initiale : a-t-on une bonne estimation ? Est-elle meilleure que la méthode trouvée au départ en mesurant les côtés avec la règle?	rapide	Confrontation du résultat distance Soleil - Vénus trouvé par la recherche et de la valeur trouvée sur un livre ou sur internet. Confrontation des deux techniques : mesurer avec une règle ou calculer grâce au sinus.
12	Affinement de la technique : comment savoir si l'on multiplie ou si l'on divise par le sinus de l'angle ? Mise en évidence des deux résultats trouvés sur un exemple. Dans l'un des deux cas on trouve une contradiction : l'hypoténuse est plus petite que le côté opposé. Impossible. Synthèse sur la technique de contrôle : vérifier après votre travail que l'hypoténuse est plus grande. Dans les exercices, un élève est désigné pour jouer le rôle du «contrôle». Une colonne est dédiée à la vérification.	lent	Contrôle grâce à la propriété mathématique : « L'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours le côté le plus long. »

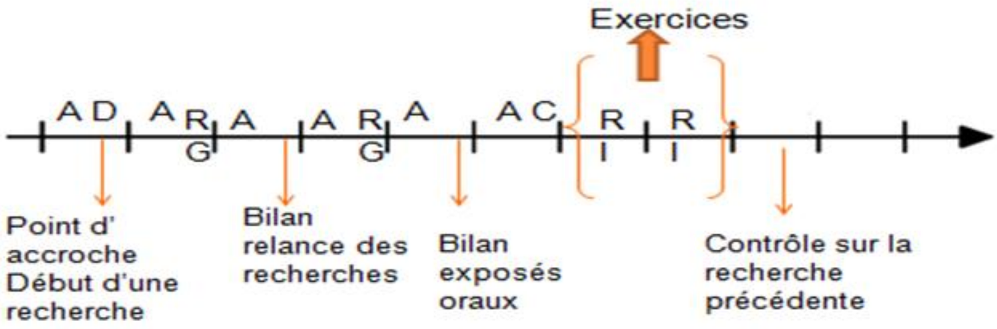
Institutionnalisations

Le travail de recherche sur un parcours permet d'amener les élèves à se poser des questions et à trouver des justifications dans les savoirs qu'ils apprennent. Ces recherches n'empêchent pas de réaliser dans la classe une étape plus classique de « cours ». Le cours apparait alors comme le bilan du parcours et comme réponse à la question que la classe s'était posée.

Ainsi il est important de rattacher le cours à la question posée afin que les élèves réalisent le lien entre le parcours et les éléments nouveaux appris.

Cependant, le cours doit aussi être décontextualisé pour que les élèves prennent conscience de la portée des théorèmes ou des propriétés. Ils ne doivent pas être uniquement vus qu'à travers la situation particulière travaillée dans le parcours mais comme un ensemble beaucoup plus général. Les exercices d'entrainement qui permettent le travail de la technique sont aussi présents pour aider à franchir cette étape.

Voici un schéma qui résume une vision possible de l'imbrication de ces différentes étapes les unes par rapport aux autres.



A : Automatismes – travail de la technique dans la durée (10 minutes sur le début du cours)

D : diagnostic ; test d'entrée sur les notions à venir.

Parcours sous la forme de recherche en groupes (RG) scindé en plusieurs activités.

Exercices sous la forme de recherche individuelle (RI)

C : cours

Début de cycle

Le cours de début de cycle reprend les notions de triangles égaux et les techniques pour construire des triangles.

Les 3 cas d'égalités des triangles servent de support pour construire les triangles avec les instruments usuels de géométrie.

Les conditions d'existence d'un triangle sont abordées grâce à l'inégalité triangulaire.

La question du nombre de données nécessaires suffisantes pour construire un triangle **avec Scratch** est posée. Cependant, aucune réponse complète n'est donnée. On se contente de tracer quelques triangles à l'aide de Scratch. Cela permet de faire sentir aux élèves que le changement d'outils implique un nombre de données différent.

Milieu de cycle

Le cours de milieu de cycle reprend la notion de triangles semblables, définition et propriétés.

On institutionnalise la proportionnalité des longueurs de côtés. Le théorème de Thalès est alors vu comme cas particulier de triangles semblables « emboités ».

On notera que lors d'exercices classiques de calculs de longueurs dans une configuration de Thalès on peut alors choisir de rédiger de deux façons : soit en utilisant directement le théorème de Thalès et les droites parallèles soit en passant par les triangles semblables et l'égalité de chacun des angles.

Le cas de la configuration papillon de Thalès est vu comme cas particulier des triangles semblables au même titre que la configuration avec triangles emboités.

La réciproque du théorème des milieux est vue comme un cas particulier du théorème de Thalès.

Fin de cycle

Le cours de fin de cycle concerne la trigonométrie.

On définit dans un premier temps le sinus d'un angle aigu, le cosinus puis la tangente.

Travail de la technique dans la durée

Lorsqu'une technique nouvelle technique a été découverte, elle doit être entrainée. Cette mise en œuvre nécessite une construction qui est loin d'être naturelle. Ainsi certaines tâches sont *routinières*. En effet ces tâches ayant été construites et entrainées auparavant, elles ont été travaillées maintes et maintes fois sur des spécimens variés et des exemples différents. D'autres tâches au contraire nécessitent d'être construites. Elles sont problématiques, soit parce qu'elles sont nouvelles pour l'élève, soit parce que la technique employée précédemment ne fonctionne plus. Il faut donc créer une nouvelle technique qui puisse répondre à la tâche. Dans les exemples qui suivent, les tâches proposées aux élèves ont été découvertes, institutionnalisées mais ne sont pas encore routinières. L'objectif est donc de les *routiniser*.

Nous avons fait le choix de travailler ces techniques non pas de manière groupée mais progressivement afin de laisser le temps aux plus faibles de se les approprier.

Début de cycle

Fiche 1 : Construire des triangles à partir des cas d'égalités.

Fiche 2 : S'interroger sur l'existence du triangle.

Fiche 3 : Construire des triangles particuliers (isocèle, équilatéral) / construire des triangles en utilisant la somme des angles.

Milieu de cycle

Fiche 1 : Reconnaître des triangles semblables

Fiche 2 : Calculer des angles à partir de triangles semblables.

Fiche 3 : Calculer un coefficient d'agrandissement ou de réduction.

Fiche 4 : Calculer des longueurs manquantes dans des triangles semblables.

Fin de cycle

Fiche 1 : Calculer une longueur dans un triangle rectangle en utilisant un sinus.

Fiche 2 : Choisir un cosinus , un sinus ou une tangente

Fiche 3 : Calculer une longueur grâce à la trignométrie.

CC BY NC ND

Ce document est sous licence Créative Commons

Attribution — Vous devez **créditer** l'Œuvre, intégrer un lien vers la licence et **indiquer** si des modifications ont été effectuées à l'Oeuvre. Vous devez indiquer ces informations par tous les moyens raisonnables, sans toutefois suggérer que l'Offrant vous soutient ou soutient la façon dont vous avez utilisé son Oeuvre.

Pas d'Utilisation Commerciale — Vous n'êtes pas autorisé à faire un usage commercial de cette Oeuvre, tout ou partie du matériel la composant.

Pas de modifications — Dans le cas où vous effectuez un remix, que vous transformez, ou créez à partir du matériel composant l'Oeuvre originale, vous n'êtes pas autorisé à distribuer ou mettre à disposition l'Oeuvre modifiée.

Pas de restrictions complémentaires — Vous n'êtes pas autorisé à appliquer des conditions légales ou des **mesures techniques** qui restreindraient légalement autrui à utiliser l'Oeuvre dans les conditions décrites par la licence.

AUTEURS : GROUPE PERMES Clermont-Ferrand

TITRE : Les distances inaccessibles

EDITEUR : IREM de Clermont-Ferrand

DATE : 01 juin 2017

PUBLIC CONCERNÉ : Enseignants de collège (ou de lycée..)

RESUMÉ : Cette brochure présente une proposition d'enseignement (Questionnement, découverte, appropriation, synthèse, entraînement…) autour de la détermination de distances inacessibles. Le lecteur y trouvera un parcours d'étude et de recherche qui vise à montrer les objets mathématiques à étudier comme réponse à un questionnement.

MOTS CLÉS : Distances ; triangles égaux ; triangles semblables ; homothétie ; trigonométrie ; travailen groupes ; situation concrète ; Parcours d'études et de recherche ; Cycle 4

IREM
Campus Universitaire des Cézeaux
3 place Vasarely
TSA 60026 – CS 60026 –
63178 Aubière cedex
Tél. : **04 73 40 70 98** – Mail : **irem@univ-bpclermont.fr** – Site : **www.irem.univ-bpclermont.fr**

CC BY NC ND